

## ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ДИСПЕРСИИ СВЕТА.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ СТЕКЛА ОТ ДЛИНЫ ВОЛНЫ

**Цель работы** – наблюдение спектра излучения ртутной лампы; определение показателя преломления стекла для различных длин волн; определение показателя угловой дисперсии стеклянной призмы.

#### 1. Теоретические основы работы

Световые волны различных частот распространяются в веществе с различными скоростями. Данное явление называют *дисперсией*. Например, в стекле красный свет распространяется с большей скоростью, чем фиолетовый, имеющий большую частоту, чем красный. В этом случае говорят о *нормальной дисперсии*. В противном случае (когда скорость света растёт с частотой), имеет место *аномальная дисперсия*. Влияние вещества на распространение света обусловлено взаимодействием света с атомами или молекулами, из которых состоит вещество. Это взаимодействие ведет к изменению *фазовой скорости* света  $v$ .

Фазовая скорость вводится для *монохроматических волн*. По определению, фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k}, \quad (1)$$

где  $\omega$  – циклическая частота волны, а  $k$  – волновое число. С фазовой скоростью связан *показатель преломления* среды  $n = c/v$ .

Реальные световые *сигналы* всегда ограничены во времени и поэтому представляют собой *суперпозицию* монохроматических волн многих частот (*гармоник* сигнала) – так называемый *волновой пакет* или (по-другому) *группу волн*. Из-за дисперсии каждая из гармоник распространяется со своей фазовой скоростью, поэтому, при наличии дисперсии, для характеристики скорости

распространения сигнала (скорости распространения *энергии* сигнала) вводят другую скорость – *групповую*, которую обозначают  $u$ . Как показал Рэлей для случая *слабой* дисперсии, групповая скорость

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2)$$

Связь между  $u$  и  $v$  легко найти из (1) и (2), действительно:

$$u = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v + ku \frac{dv}{d\omega},$$

или  $u = \frac{v}{1 - k \frac{dv}{d\omega}}$ . Отсюда следует, что *при нормальной дисперсии*  $\left(\frac{dv}{d\omega} < 0\right)$

*групповая скорость всегда меньше фазовой*. В области аномальной дисперсии  $\left(\frac{dv}{d\omega} > 0\right)$  формально имеем  $u > v$ , и даже  $u < 0$ , что абсурдно. Однако анализ этой области частот показывает фактическую неприменимость формулы (2) из-за сильной дисперсии и малой прозрачности среды. Интересно отметить, что *фазовая скорость* отдельных гармоник сигнала *может превышать скорость света в вакууме  $c$* . Этот факт не противоречит утверждению, что  $c$  – максимально-возможная скорость в природе, так как расчёт скорости  $u$  распространения сигнала (энергии, информации) *всегда* даёт  $u < c$ .

Согласно *классической элементарной теории дисперсии*, применимой для *качественного* объяснения дисперсии в разреженных газах, электроны внешних оболочек атомов среды (оптические электроны) совершают *вынужденные колебания* под действием переменного поля электромагнитной волны, что равносильно *поляризации* атомов среды (то есть возникновение у атомов дипольных моментов) под действием электромагнитного поля волны. Так как *восприимчивость* среды  $\chi$  зависит от частоты, то и показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \chi}$  завит от частоты, то есть имеет место дисперсия.

В элементарной теории дисперсии в качестве *модели* молекулы среды берут *пружинный маятник*<sup>1</sup>. В наиболее простом варианте теории говорить о

молекуле с одним «оптическим» электроном с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Электрон совершает вынужденные колебания относительно ядра под действием переменной силы  $e\vec{E}$ , создаваемой электрическим полем световой волны. Тогда уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} = F_{\text{упр } x} + F_{\text{торм } x} + F_{\text{вын } x}, \quad (3)$$

где  $x$  – смещение электрона из положения равновесия  $x = 0$  (в нашем случае  $x$  имеет смысл плеча диполя);  $F_{\text{упр } x} = -kx$  – проекция квазиупругой силы, удерживающей электрон в молекуле;  $k$  – «жесткость» (она обусловлена силами электростатической природы);  $F_{\text{торм } x} = \alpha\dot{x}$  – проекция «тормозящей» силы, обуславливающей затухание колебаний оптического электрона;  $\alpha$  – постоянный коэффициент (коэффициент «радиационного» трения<sup>2</sup>), который предполагается малым;  $F_{\text{вын } x} = eE_x$  – проекция силы, действующей на электрон при взаимодействии его с полем  $E_x$  волны. Напряженность электрического поля монохроматической световой волны изменяется по закону  $E_x = E_0 \cos \omega t$ , где  $E_0$  – амплитуда напряженности,  $F_{\text{вын } x} = eE_0 \cos \omega t$ . Таким образом, уравнение (3) принимает вид:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

Здесь  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , квадрат собственной частоты «маятника»,  $\gamma = \alpha/m$  – константа, имеющая размерность частоты и характеризующая ширину области частот, в которой существенно влияние тормозящей силы. Дипольный момент молекулы в нашей модели  $p = ex$ , поэтому дипольный момент единицы объема газа (поляризованность)  $P = n_0 p$ ,  $n_0$  – число диполей (молекул) в единице объема.

Умножив уравнение (4) на  $n_0 e$ , получим

$$\ddot{P} + \gamma \dot{P} + \omega_0^2 P = \epsilon_0 \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} E_0 \cos \omega t \equiv \epsilon_0 \omega_p^2 E_0 \cos \omega t, \quad (5)$$

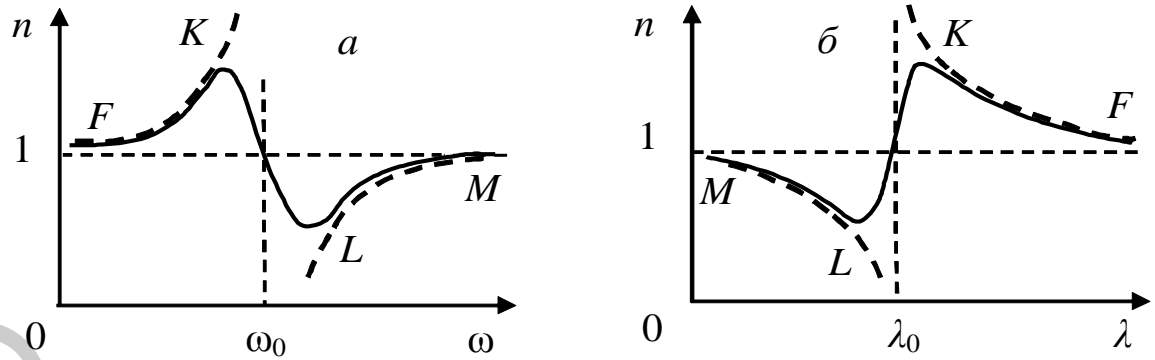


Рис. 1. Кривая дисперсии с участками нормальной и аномальной дисперсии

где  $\omega_p^2$  – некоторая положительная константа (её называют квадратом плазменной частоты<sup>3</sup>). Вдали от резонансной частоты  $\omega_0$  ( $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ ) в уравнении (5) можно пренебречь  $\gamma$ , тогда решение имеет вид  $P = P_0 \cos \omega t$ , или:

$$P = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E = \varepsilon_0 \chi E. \quad (6)$$

Таким образом, восприимчивость:

$$\chi = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

От восприимчивости легко перейти к показателю преломления. Из (7) имеем (за исключением частот, близких к  $\omega_0$ ):

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

Так как  $\varepsilon(\omega)$  близка к единице, то

$$n = \sqrt{1 + \chi} \approx 1 + \frac{\chi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (9)$$

Примерный вид кривых дисперсии и поглощения, следующих из соотношения (9), а также из не приведённого здесь анализа области в окрестности  $\omega_0$  показан на рис. 1. Участки кривых  $FK$  и  $LM$  соответствуют нормальной дисперсии, а участок  $KL$  – аномальной дисперсии.

Несмотря на то, что описанная выше элементарная теория сильно упрощает ситуацию в реальных веществах, она вполне пригодна для *качественного* объяснения явления дисперсии.

Реальные молекулы характеризуются не одной резонансной частотой  $\omega_0$ , а целым *набором* таковых –  $\omega_{0i}$ . Как можно показать, в этом случае выражение (8) принимает вид:

$$n^2 = 1 + \omega_p^2 \sum_{i=1}^N \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \quad (10)$$

где  $N$  – число резонансных частот, а  $f_i$  – *силы осцилляторов* (коэффициенты, определяющие вклад  $i$ -го колебания в дисперсию). Далее, можно показать, что в областях частот, близких к  $\omega_{0i}$ , свет испытывает сильное *поглощение*; за пределами этих областей среда *прозрачна*. Поэтому резонансные частоты  $\omega_{0i}$  принято называть *линиями поглощения*. Наконец, *в твёрдых телах* из-за взаимодействия молекул (атомов) линии поглощения расщепляются в квазинепрерывные *полосы поглощения*. В частности, для прозрачных диэлектриков, например для стекла, полоса поглощения лежит в ультрафиолетовой области. В видимом диапазоне у стекла наблюдается нормальная дисперсия и  $n > 1$ .

В качестве источника света в лабораторной работе использована *ртутная лампа*, излучение которой имеет *линейчатый спектр*. Частоты излучения спектральных линий – это именно те  $\omega_{0i}$ , которые фигурируют в (10) как частоты поглощения. Данный факт является следствием закона Кирхгофа для теплового излучения (см. лаб. раб. №52 в наст. сборнике).

Таким образом, для каждого вещества зависимость показателя преломления от длины волны в вакууме (дисперсионная кривая) имеет свой вид, обусловленный строением данного вещества. Количественной характеристикой оптических свойств вещества является величина, называемая *дисперсией*:

$$D = \frac{dn}{d\lambda}. \quad (11)$$

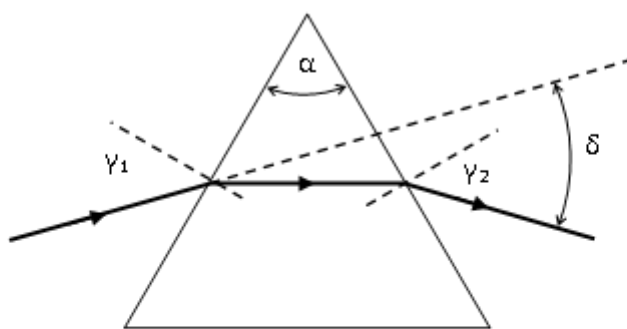


Рис. 2. Ход луча через призму при минимальном угле отклонения

Показатель преломления стекла в данной работе определяется **методом наименьшего отклонения** светового пучка призмой. На рис. 2. показан ход луча через призму для случая, когда угол падения  $\gamma_1$  таков, что преломленный передней гранью луч оказывается параллельным основанию призмы, а угол преломления задней гранью призмы  $\gamma_2$  равен углу падения  $\gamma_1$ . Как это можно показать, угол  $\delta$  отклонения луча призмой оказывается минимальным.

Связь между показателем преломления стекла призмы и углом наименьшего отклонения  $\delta$  имеет простой вид:

$$n = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (12)$$

где  $\alpha$  – преломляющий угол призмы. Таким образом, для вычисления показателя преломления стекла по формуле (12) необходимо измерить преломляющий угол призмы  $\alpha$  и минимальный угол отклонения  $\delta$ .

Важной характеристикой любого спектрального прибора является **угловая дисперсия**  $D_\varphi$ . Угловая дисперсия характеризует степень пространственного (углового) разделения световых лучей с различными длинами волн и численно равна отношению углового расстояния  $\Delta\varphi$  между двумя спектральными линиями к соответствующей разности длин волн  $\Delta\lambda$

$$D_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}. \quad (13)$$

Угловая дисперсия различна для различных участков спектра.

## 2. Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. В качестве источника излучения используется ртутная лампа, а в качестве измерителя углов  $\delta$  – высокоточный гониометр Г5. В лампе 1 под действием электрического разряда в парах ртути происходит возбуждение атомов ртути, которые излучают линейчатый спектр. Призма 2 разлагает излучение ртутной лампы в спектр. Излучением ртутной лампы 1 освещается входная щель 3 коллиматора 4, расположенная в фокальной плоскости линзы 5. Коллиматор служит для создания параллельного пучка света. Это необходимо для того, чтобы угол падения всех лучей на призму был одинаков. После преломления на гранях призмы 2, закрепленной на предметном столике 6 гониометра, параллельные пучки света, соответствующие различным спектральным линиям, собираются объективом зрительной трубы в её фокальной плоскости, образуя действительное изображение выходной щели коллиматора 4, которое рассматривается через окуляр 7.

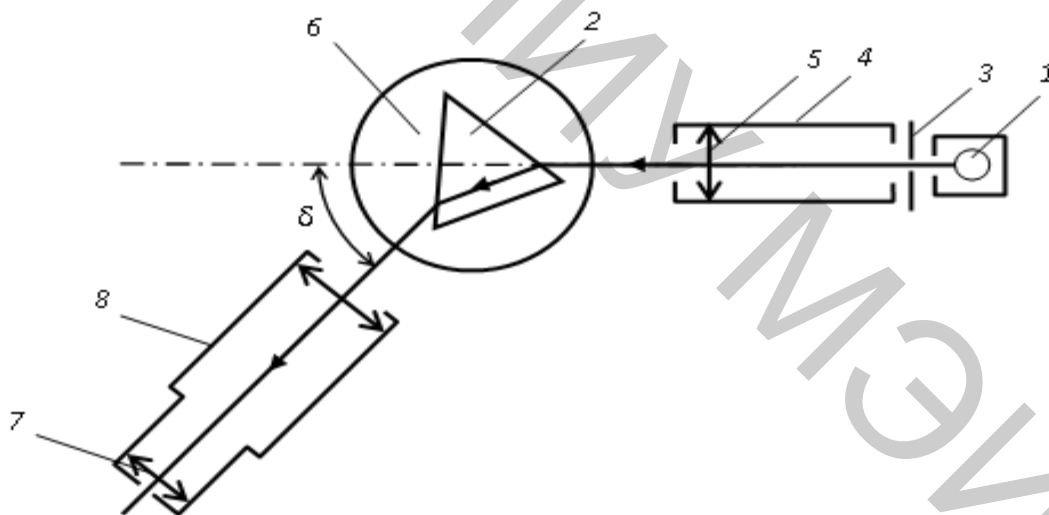


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

При измерениях зрительную трубу 8 наводят на исследуемый спектр и в окуляре 7 наблюдают дискретные линии, соответствующие различным длинам волн излучения ртути. Окуляр содержит автоколлимационное устройство, которое используется для настройки гониометра и измерения преломляющего угла призмы.

**Отсчёт углов.** Поворот зрительной трубы осуществляется сначала рукой (для грубой наводки), а затем микрометрическим винтом для точного наведения на спектральную линию.

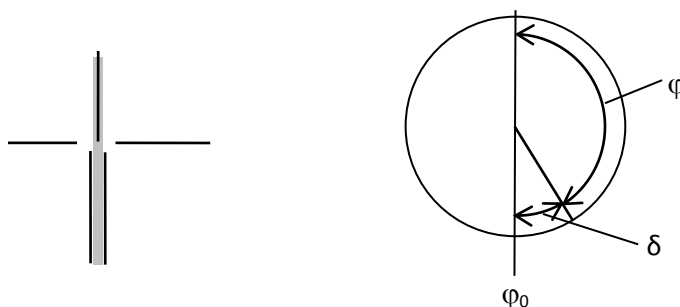


Рис. 4. Наведение креста на спектральную линию и измеряемый угол

В окуляре зрительной трубы виден черный крест, который должен быть совмещен со спектральной линией так, как это показано на рис. 4. На этом же рисунке показан угол отклонения светового луча  $\delta$  и измеряемый с помощью гониометра угол  $\varphi$ .

Глядя в окуляр отсчетного микроскопа (этот окуляр расположен ниже окуляра зрительной трубы), настраивают резкое изображение лимба (**круговой шкалы**) и вертикальной шкалы **оптического микрометра**, расположенной справа от лимба.

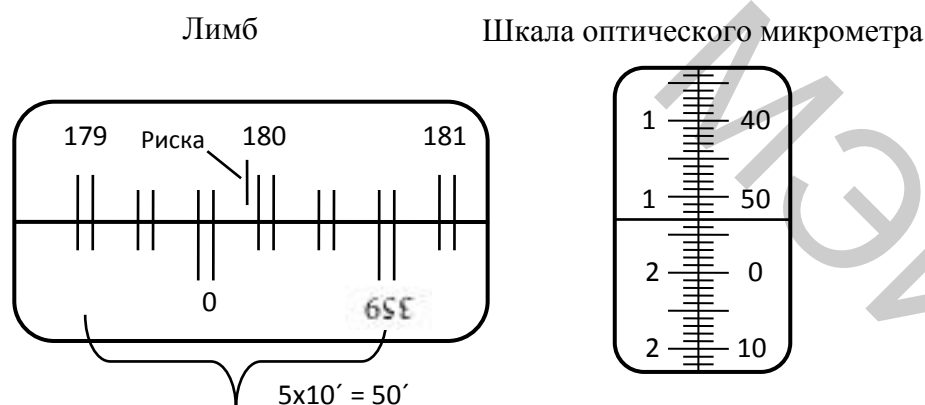


Рис. 5. Поле зрения отсчетного микроскопа ( $179^{\circ}51'53''$ )

Вращением маховичка оптического микрометра (**без усилий!**) на круговой шкале совмещают ближайший к отсчетной риске левый двойной **оцифрованный** штрих на верхней шкале с ближайшим двойным штрихом на нижней шкале.



Если без усилия не удастся совместить штрихи, то маховичок следует вращать в противоположную сторону и совмещать следующий штрих нижней шкалы. На рис. 5 показано состояние лимба после совмещения штрихов. Теперь снимают отсчет угла: число градусов равно видимому ближайшему слева от риски прямому числу (на рис. 5 это число 179).

Число десятков минут равно числу интервалов, заключенных между оцифрованными верхними и нижними штрихами, оцифровка которых отличается на 180 градусов. На рис. 4 это 5 интервалов между штрихами, оцифрованными прямым числом 179 на верхней шкале лимба, и двойными штрихами, оцифрованными перевернутым числом 359, на нижней шкале. Число десятков минут равно пяти.

Число *единиц минут* отсчитывается по *левой* шкале **оптического микрометра** относительно горизонтального штриха, находящегося в центре поля зрения (на рис. 5 это число равно 1).

Число секунд отсчитывается по *правой* шкале оптического микрометра относительно горизонтального штриха, находящегося в центре поля зрения (на рис. 5 это число равно 53).

Положение, показанное на рис. 5. соответствует отсчету  $179^{\circ}51'53''$ .

### 3. Порядок выполнения работы

Заполните табл. 1 спецификации измерительных приборов и запишите данные установки.

Таблица 1

Спецификация измерительных приборов

Название прибора и его тип	Пределы измерения	Цена деления	Инструментальная погрешность

Данные установки

Преломляющий угол призмы  $\alpha =$

1. Включите ртутную лампу и осветители отсчетного устройства и окуляра. После включения ртутной лампы до начала измерений должно пройти 5–10 минут, чтобы давление паров ртути поднялось (за счет прогрева колбы и испарения ртути) до стационарного уровня, обеспечивающего достаточно высокую интенсивность излучения.

Проверьте настройку гониометра и при необходимости произведите его юстировку, как это описано в Приложениях I и II.

2. Измерьте преломляющий угол призмы, для чего:

– установите призму на столик так, чтобы ее рабочие грани располагались параллельно оси гониометра (оси вращения предметного столика). Поворачивая зрительную трубу, найдите автоколлимационное изображение креста, отраженного от одной из граней призмы, и совместите его вертикальную ось с вертикальной осью перекрестия зрительной трубы. Снимите отсчет угла  $\alpha_1$  по лимбу и оптическому микрометру. Из-за неточного крепления призмы, возможно, придется подстроить наклон столика для того, чтобы увидеть отражение креста. Наклон зрительной трубы при этом изменять нельзя;

– не трогая призму и столик, поверните зрительную трубу вокруг преломляющего угла призмы, найдите автоколлимационное изображение креста от второй грани призмы и совместите его с перекрестием. Снимите отсчет угла  $\alpha_2$  по лимбу и оптическому микрометру;

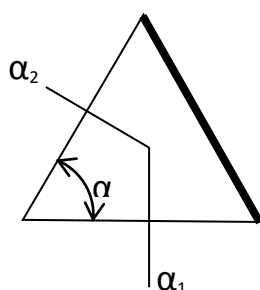


Рис. 6. К определению преломляющего угла призмы

– вычислите преломляющий угол призмы по формуле  $\alpha = 180^\circ - |\alpha_2 - \alpha_1|$  (см. рис. 6).

3. Измерьте углы минимального отклонения для всех наблюдаемых спектральных линий ртути, для чего:

– расположите за призмой (по ходу лучей) лист бумаги и найдите на нем спектр, вращая столик рукой. Продолжая вращать столик и наблюдая за перемещением спектра, добейтесь минимального отклонения преломленных лучей от направления падающего луча;

– поворачивая зрительную трубу, найдите в ее окуляре изображение спектра и настройтесь на вторую желтую линию. Вращая столик сначала рукой, а затем с помощью микрометрического винта, установите его в такое положение, при котором угол отклонения будет минимальным. Поворачивая зрительную трубу сначала рукой, а затем с помощью микрометрического винта, совместите перекрестие зрительной трубы со спектральной линией, как это показано на рис. 4. Снимите отсчет угловой координаты спектральной линии и запишите в табл. 2. Повторите измерения еще два раза;

– проведите измерения минимального угла отклонения для линий спектра, указанных в табл. 2.

4. Снимите призму со столика и измерьте угловую координату  $\varphi_0$  ахроматического изображения входной щели коллиматора, соответствующую направлению не отклоненного луча. Значение угла  $\varphi_0$ , выраженное в градусах, минутах и секундах, переведите в градусы.

Измерение угла наименьшего отклонения для спектральных линий паров ртути

Длина волны $\lambda$ , нм	Угол наблюдения $\varphi$ , ° ' "	Угол наблюдения $\varphi$ , °	Угол отклонения $\delta$ , °	Показатель преломления $n$
435,8 Синяя				
491,6 Голубая				
546,1 Зеленая				
576,96 Желтая 1				
579,07 Желтая 2				

#### 4. Обработка результатов измерений

1. Найдите средние значения измеренных углов наблюдения для всех спектральных линий, выраженных в градусах, минутах и секундах, и переведите в градусы и запишите в табл. 2.

2. Рассчитайте углы наименьшего отклонения  $\delta$  для всех спектральных линий по формуле

$$\delta = |\varphi - \varphi_0|.$$

3. По формуле (12) рассчитайте значение показателя преломления для всех спектральных линий.

4. Для зеленой линии спектра вычислите абсолютную погрешность показателя преломления и запишите результат для показателя преломления стекла  $n_e$  в стандартной форме.

4. Используя результаты измерений, по формуле (12) рассчитайте угловую дисперсию для желтого дублета.

5. Постройте график зависимости показателя преломления от длины волны.

*Дополнительное задание.*

Используя график зависимости показателя преломления от длины волны, определите среднюю дисперсию, и коэффициент дисперсии оптического стекла призмы. По значениям показателя преломления  $n_e$  и коэффициента дисперсии определите марку оптического стекла (см. ПРИЛОЖЕНИЕ).

### **5. Контрольные вопросы**

1. Какое явление называется дисперсией? С чем связано явление дисперсии? Что такое нормальная дисперсия?
2. Сформулируйте основные положения элементарной теории дисперсии.
3. Что такое фазовая и групповая скорости? Как они связаны между собой?
4. Что можно сказать о величине показателя преломления для частот, превышающих резонансную частоту осцилляторов? Может ли фазовая скорость света превышать скорость света в вакууме?
5. Что такое аномальная дисперсия? На каких частотах она наблюдается?
6. Чем отличается вид спектров, полученных с помощью призмы и дифракционной решетки?

## Примечания

<sup>1</sup> Возможность использовать аналогию с пружинным маятником даёт *линейная* зависимость дипольного момента  $p$  *неполярной* молекулы от внешнего поля  $E$ .

Действительно,  $p = xe = \varepsilon_0 \beta E = \varepsilon_0 \beta \frac{F}{e}$ , или:

$$F = \frac{e^2}{\varepsilon_0 \beta} \cdot x.$$

Здесь  $x$  и  $e$  – соответственно, плечо и заряд диполя,  $\beta$  – поляризуемость,  $F$  – электрическая сила  $eE$ . Последнее соотношение имеет вид закона Гука для «пружинки» с «жесткостью»  $e^2/\varepsilon_0\beta$ . Рассмотрение случая *полярных* молекул более сложно, но, в конечном счёте, приводит к такому же выводу.

<sup>2</sup> Колеблющийся заряд движется с *ускорением* и, следовательно, теряет энергию на излучение. Пропорциональность тормозящей силы *скорости* заряда принята в теории для удобства и является условностью. Всегда можно подобрать такой коэффициент  $\alpha$ , чтобы средние за период потери энергии соответствовали потерям энергии, получаемым при «правильной» записи тормозящей силы как силы, зависящей от ускорения.

<sup>3</sup> *Плазменной* называют собственную частоту колебаний всех электронов *как целого* относительно ионов. В плазме, для которой в (10) следует положить  $\omega_{0i}=0$ , величина  $\omega_p$  ограничивает область прозрачности со стороны низких частот.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Классификация оптических стёкол

Для изготовления призм используется специальное *оптическое стекло*. От обычного технического стекла оно отличается особенно высокой прозрачностью, чистотой, бесцветностью, однородностью, а также строго нормированными значениями преломляющей способности и дисперсии.

Оптическое стекло принято характеризовать показателем преломления, измеренным при определенной длине волны. Ранее и до недавнего времени, для

характеристики оптических стёкол использовался показатель преломления  $n_D$ , определяемый для жёлтой спектральной  $D$ -линии натрия ( $\lambda = 589,3$  нм).

Однако, это не одиночная линия, а пара линий (так называемый, «натриевый дублет»), что не могло не сказаться на точности измерений. По этой причине, сейчас в качестве главного показателя преломления стекла стали принимать его значение либо для жёлтой  $d$ -линии гелия с  $\lambda = 587,56$  нм, либо для жёлто-зелёной  $e$ -линии ртути с  $\lambda = 546,07$  нм. Первый ( $n_D$ ) используется такими производителями как Schott, Hoya, Ohara и др., второй ( $n_E$ ), в частности, принят в документации российских производителей. В настоящее время достигнутые пределы значений  $n_D$  промышленных оптических стёкол составляют примерно 1,43 – 2,17.

Кроме значения показателя преломления характеристиками оптического стекла являются средняя дисперсия и коэффициент дисперсии.

**Средняя дисперсия** определяется как разность показателей преломления  $n_F$  для синей линии спектра  $\lambda = 488,1$  нм и  $n_C$  для красной линии спектра с  $\lambda = 656,3$  нм. Величина средней дисперсии представляется как

$$D = (n_F - n_C).$$

**Коэффициент дисперсии** (число Аббе,  $\nu_\lambda$ ) – задаётся отношением разности показателя преломления  $n_\lambda$  без единицы к средней дисперсии

$$\nu_\lambda = \frac{n_\lambda - 1}{n_F - n_C}.$$

Оптические стёкла делятся на два основных типа: **кроны** (стёкла с низким показателем преломления и высокими значениями коэффициента дисперсии) и **флинты** (стёкла с низкими значениями коэффициента дисперсии и высоким показателем преломления). К группе кронов относятся натриево-силикатные стекла, а к группе флинт – стёкла содержащие свинец.

В настоящее время к флинтам относят стекла с коэффициентом преломления  $> 1,60$  и коэффициентом дисперсии  $< 50$ , а к кронам – стекла с коэффициентом преломления  $< 1,60$  и коэффициентом дисперсии  $> 55$ .

В оптике также широко используются кварцевые стекла, их особенность заключается в слабом поглощении ультрафиолетового света.