

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

---

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

*Под редакцией Д.А. Иванова*

Москва  
Издательство МЭИ  
2021

УДК 53  
ББК 22.3  
К 937

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»  
в качестве учебного издания*

Рецензенты: О.С. Еркович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф.  
физики МГТУ им. Н.Э. Баумана;  
В.С. Булыгин, канд. техн. наук, проф. каф.  
общей физики МФТИ

**Авторы:** М.К. Губкин, А.В. Дедов, Д.А. Иванов,  
И.В. Иванова, В.В. Манухин, В.С. Спивак

К 937 Курс общей физики: учеб. пособие / М.К. Губкин, А.В. Дедов, Д.А. Иванов и др.; под ред. Д.А. Иванова. – М.: Издательство МЭИ, 2021. – 512 с.

ISBN 978-5-7046-2429-5

В пособии изложено развернутое и расширенное содержание лекций, которые читаются по курсу общей физики в НИУ «МЭИ».

Для аудиторных и самостоятельных занятий студентов младших курсов, а также для самостоятельных занятий студентов, обучающихся по дистанционной форме. Может быть полезно преподавателям при подготовке к проведению лекционных и практических занятий.

**УДК 53  
ББК 22.3**

ISBN 978-5-7046-2429-5

© Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7
Введение .....	8
Часть I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА .....	11
1. Кинематика поступательного движения материальной точки... ..	11
2. Динамика поступательного движения твердого тела.....	22
3. Работа и энергия в механике поступательного движения... ..	33
4. Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела .....	44
5. Работа по вращению тела и кинетическая энергия вращения... ..	57
6. Собственные свободные и затухающие механические колебания .....	65
7. Вынужденные механические колебания. Резонанс.....	75
8. Элементы специальной теории относительности.....	79
9. Основные понятия молекулярной физики макросистем. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.....	93
10. Элементы статистической физики.....	104
11. Первое начало термодинамики.....	115
12. Понятие теплоемкости. Применение первого начала тер- модинамики для идеального газа .....	119
13. Тепловые машины. Цикл Карно.....	128
14. Второе начало термодинамики. Энтропия.....	133
15. Явления переноса в газах .....	138
16. Реальные газы.....	150
Часть II. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.....	161
17. Электростатическое поле в вакууме. Напряженность поля.....	161
18. Работа сил электростатического поля. Разность потенци- алов. Потенциал.....	170
19. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме .....	176
20. Электрическое поле в диэлектриках.....	188
21. Проводники в электростатическом поле. Энергия элект- ростатического поля .....	203
22. Постоянный электрический ток.....	219
23. Магнитное поле постоянного тока. Магнитная индукция и способы ее расчета .....	232
24. Действие магнитного поля на движущийся заряд и про- водник с током .....	249
25. Электромагнитная индукция .....	263

26. Явления самоиндукции и взаимной индукции. Энергия магнитного поля .....	272
27. Магнитное поле в веществе. Напряженность магнитного поля.....	281
28. Диа-, пара- и ферромагнетики .....	289
29. Собственные свободные и затухающие электромагнитные колебания в контуре.....	302
30. Вынужденные электромагнитные колебания в контуре. Резонанс напряжений .....	311
31. Уравнения Максвелла .....	317
32. Электромагнитные волны и их свойства.....	330
<b>Часть III. ОПТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ.....</b>	<b>345</b>
33. Интерференция.....	345
34. Полосы равной толщины и полосы равного наклона.....	355
35. Дифракция Френеля.....	361
36. Дифракция Фраунгофера.....	374
37. Дифракционная решетка.....	382
38. Поляризация .....	393
39. Оптическая анизотропия.....	403
40. Интерференция поляризованного света .....	414
41. Дисперсия и поглощение света .....	422
42. Распространение сигналов в среде с дисперсией.....	433
43. Тепловое излучение.....	444
44. Квантовые свойства света.....	456
45. Волны де Бройля .....	465
46. Квантовая механика.....	476
47. Бозоны и фермионы .....	487
48. Ядерная физика .....	498
Физические константы.....	509
Список рекомендуемой литературы.....	510

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой второе издание «Курса общей физики», разработанного на кафедре общей физики и ядерного синтеза (ОФиЯС) Национального исследовательского университета «МЭИ». Изучаемый материал представлен в книге в виде 48 разделов, скомпонованных в соответствии с действующей программой курса общей физики для технических университетов и охватывающих все основные темы этой программы. Изложение теоретического материала дополнено множеством примеров, иллюстрирующих основные физические законы, соотношения и правила, используемые для описания физических явлений. Некоторые из этих примеров и задач входили в ранее изданные издательством МЭИ учебные пособия и задачки по отдельным разделам курса общей физики. Каждый раздел завершается списком контрольных вопросов, поиск ответов на которые поможет студенту глубже усвоить изучаемый материал.

Книга рассчитана в первую очередь на студентов 1–2 курсов и может быть широко использована для самостоятельной работы.

Предыдущее издание «Курса общей физики» вышло в свет в 2010 г. Настоящее издание существенно переработано и дополнено с учетом 40-летнего опыта преподавания физики на кафедре ОФиЯС. Названия изучаемых тем и разделов максимально соответствуют программе проведения лекционных и практических занятий по курсу. Существенно переработано содержание теоретического материала, уточнены формулировки законов, определения и обозначения физических величин. Приведены новые примеры решения задач.

Издание может оказаться полезным не только студентам энергетических вузов, но и других учебных заведений и технических университетов. Обсуждение содержания всех разделов сборника задач на методических семинарах кафедры помогло сформировать комплексный и логически непротиворечивый целостный подход к изложению курса общей физики на таком уровне подачи материала, который выделяет главные, фундаментальные основы физических явлений и законов, описывающих эти явления, и способствует наилучшему закреплению полученных знаний.

*Авторы*

## ВВЕДЕНИЕ

Физика – одна из основных фундаментальных наук, составляющих основу теоретической подготовки инженеров. Кроме того, физика играет роль базы, без которой невозможна успешная деятельность инженера в любой области современной техники. На протяжении последних трех столетий развитие техники неразрывно связано с физической наукой, которая научно обосновывала принципиально новые направления в технике. Фундаментальные законы, лежащие в основе физической науки, являются общими для описания всех наблюдаемых в природе и технике физических явлений.

С одной стороны, одна из важнейших задач курса общей физики состоит в формировании у студентов представлений о современной физической картине мира. С другой стороны, физика явилась научным фундаментом, на котором выросли такие новые области техники, как электро- и радиотехника, космическая техника и приборостроение, электронная и вычислительная техника, теплоэнергетика и ядерная энергетика. С третьей стороны, именно технические потребности общества создали предпосылки для развития отдельных областей физической науки: механики, термодинамики, оптики.

Важность и необходимость изучения курса общей физики в техническом университете можно определить следующим образом:

1) изучение курса важно для формирования представлений о явлениях и процессах, происходящих в природе, т.е. для выработки научного мировоззрения;

2) физика является базовой дисциплиной для большинства общеинженерных и специализирующих дисциплин;

3) развитие любой отрасли современного производства неразрывно переплетается с физикой, поэтому инженер любого профиля должен владеть физикой в такой степени, чтобы быть в состоянии активно и со знанием дела применять достижения научно-технического прогресса в своей деятельности.

Программа курса общей физики в технических университетах соответствует тем целям и задачам, которые возникли в современном инженерном образовании в связи с развитием совре-

менной техники. В результате изучения курса общей физики студент должен научиться постановке и выбору алгоритмов решения конкретных задач из различных физических областей, приобрести начальные навыки для самостоятельного овладения новыми методами и теориями, необходимыми в практической деятельности современного специалиста. Знания, умения и навыки, полученные при успешном освоении курса общей физики, являются основой и базой для последующего изучения теоретической механики, динамики и прочности машин, прикладной механики, электротехники и электроники, технической термодинамики, теории тепло- и массообмена, механики жидкости и газа. Безусловно, подготовка современного грамотного специалиста в области теплоэнергетики и теплотехники, обладающего необходимыми компетенциями в сфере своей профессиональной деятельности, невозможна без успешного освоения курса общей физики.

В современных условиях техническое образование должно рассматриваться не только и не столько как овладение необходимым объемом учебной информации, а как развитие у студентов в процессе обучения потребностей и способностей к самостоятельному получению новых общих и профессиональных знаний и умений при использовании многообразных источников информации.

Кафедра общей физики и ядерного синтеза Национального исследовательского университета «МЭИ» ведет преподавание курса общей физики более 40 лет. За это время на кафедре сложилась устойчивая научно-методическая система преподавания дисциплины и накоплен большой опыт организации лекционных, практических и лабораторных занятий. Для методического сопровождения учебного процесса на кафедре разработан и успешно используется учебно-методический комплекс по курсу общей физики для студентов, обучающихся по образовательным программам в области энергетики. Основу комплекса составляют учебные пособия, посвященные изучению теоретических основ дисциплины, выполнению лабораторного практикума и получению практических навыков по решению задач.

Предлагаемый «Курс общей физики» – составной элемент учебно-методического комплекса, во многом рассчитанный на самостоятельную работу. Цель пособия – помочь студенту в глу-

боком усвоении основных положений курса общей физики. Как показывает практика, большие трудности в правильном усвоении многих разделов курса общей физики возникают не из-за сложности в понимании дисциплины «физика» как таковой, а в следствие отсутствия навыков самостоятельного анализа изучаемых явлений, исходя из их комплексного рассмотрения.

Предлагаемая книга состоит из 48 разделов, посвященных рассмотрению физических законов, явлений и процессов, которые входят в программу изучения трех основных частей курса общей физики: «Механика. Молекулярная физика и термодинамика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и элементы квантовой физики».

В каждом разделе авторы стремились дать последовательное изложение основных положений теории, опираясь на которые обучающийся сможет научиться отвечать на вопросы, связанные с пониманием и объяснением явлений окружающего мира, и решать основные типы задач по физике. Примеры и задачи с решениями, приводимые одновременно с изложением теоретических основ, позволят обучающемуся обратить внимание на важнейшие аспекты этого материала, в том числе на факты и соотношения, которые при первом чтении понимаются недостаточно глубоко. Приводимые в каждом разделе контрольные вопросы необходимы для усвоения и понимания изученного материала. Основной своей задачей авторы считали такое изложение курса общей физики, которое вызывает минимальные трудности при самостоятельной работе студента.

# Часть I

## МЕХАНИКА

Механика – это раздел физики, который рассматривает простейшую форму движения материи: перемещение различных тел относительно друг друга и изменение формы тела. Основные законы механики были в значительной степени выяснены Г. Галилеем и окончательно сформулированы И. Ньютоном. Механика Галилея – Ньютона получила название классической. Ее законы и выводы справедливы при одновременном выполнении двух условий (границы применимости):

1) рассматриваемые тела – макроскопические;

2)  $\frac{v}{c} \ll 1$ , где  $v$  – скорость тела, а  $c = 2,998 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме (универсальная, т.е. мировая постоянная).

Классическая механика делится на три части: кинематику, динамику и статику. **Кинематика** изучает движение тел в пространстве и времени без рассмотрения причин, вызывающих это движение. **Динамика** изучает движение тел в связи с причинами (силами), которые обуславливают тот или иной характер движения. **Статика** изучает равновесие тел и в нашем курсе не рассматривается.

### 1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В механике широко пользуются двумя моделями: материальная точка и материальное тело. **Материальная точка** – это тело нулевых размеров, т.е. абстрактная физическая модель. Тело можно считать материальной точкой, если его размерами можно пренебречь в условиях данной задачи. Любое тело можно представить как совокупность материальных точек. **Абсолютно твердым телом** называется такое тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется.

Важным вопросом в кинематике является задание положения тела в пространстве. Свободное пространство является однородным (в нем нет точек, обладающих особыми свойствами) и изотропным (в нем нет выделенных направлений). Поэтому в свободном пространстве нельзя определить положение материальной точки или тела. **Тело отсчета** – это абсолютно твердое тело, относительно которого можно задать положение произвольного объекта в пространстве.

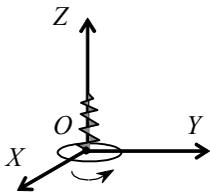


Рис. 1.1

Все физические процессы протекают в пространстве и во времени. С телом отсчета связывают **систему координат**, которая позволяет задать положение точки или тела в пространстве. Мы будем использовать декартову прямоугольную (правую) систему координат (рис. 1.1). В такой системе координат ось  $OZ$  направлена в сторону поступательного движения правого винта, который вращается от оси  $OX$  к оси  $OY$  по кратчайшему углу.

**Время** – мера длительности и последовательности процессов. Для его отсчета требуются часы. Тело отсчета, система координат и часы образуют **систему отсчета**. В нашем курсе будут использованы два способа задания положения точки в пространстве: векторный и координатный.

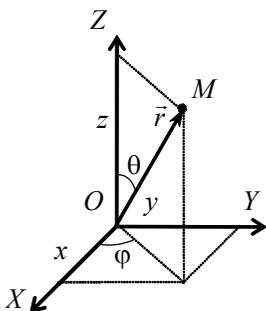


Рис. 1.2

**Векторный способ.** Положение материальной точки  $M$  задается с помощью радиуса-вектора  $\vec{r}$ , который проводится из начала координат в точку  $M$  (рис. 1.2). Для того, чтобы задать радиус-вектор  $\vec{r}$ , необходимо указать:

- 1) начало системы координат – т.  $O$ ;
- 2) модуль  $|\vec{r}|$ ;
- 3) направление радиуса-вектора в пространстве, определяемое двумя независимыми углами.

Используя векторы единичной длины, сонаправленные с осями координат (**орты**)  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , можно представить  $\vec{r}$  следующим образом:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}. \quad (1.1)$$

Для случая, изображенного на рис. 1.2, можно записать:

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z.$$

**Координатный способ.** Положение материальной точки  $M$  задается с помощью координат  $x, y, z$  и записывается в виде:  $M(x, y, z)$ .

**Замечание.** Минимальное число независимых параметров, которое однозначно определяет положение физической системы в пространстве, называется **числом ее степеней свободы**. Таким образом, материальная точка имеет три степени свободы.

Линия, которую описывает движущаяся точка в пространстве, называется **траекторией**. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета. Рассмотрим равномерное движение точки по радиусу равномерно вращающегося диска от центра к краю (рис. 1.3). Относительно системы координат  $(X', Y', Z')$ , свя-

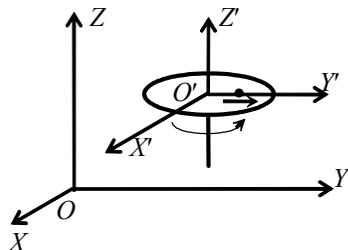


Рис. 1.3

занной с вращающимся диском, траектория точки будет прямой линией. Относительно системы координат  $(X, Y, Z)$ , связанной с Землей, траектория точки будет спиралью Архимеда.

В зависимости от вида траектории различают **прямолинейное и криволинейное** движения. Для описания движения материальной точки необходимо задавать **кинематический закон движения** – уравнение или систему уравнений, определяющих положение тела в любой момент времени относительно выбранной системы отсчета. В случае векторного способа задания положения точки в пространстве кинематический закон ее движения имеет вид:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , а при координатном способе он может быть записан в виде:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

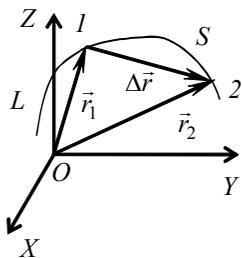


Рис. 1.4

Если из соотношений (1.2) исключить время  $t$ , то получим уравнение, которое будет описывать траекторию материальной точки.

Рассмотрим движение точки по траектории  $L$  (рис. 1.4). Пусть в момент времени  $t$  точка находилась в положении 1, определяемом радиусом-вектором  $\vec{r}_1$ , а в момент времени  $t + \Delta t$  в положении 2, определяемом радиусом-вектором  $\vec{r}_2$ . Вектор, проведенный из начального положения точки в конечное, называется **вектором перемещения**  $\Delta \vec{r}$ . Как видно из рис. 1.4,  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , т.е. вектор перемещения равен изменению (или приращению) радиуса-вектора. Расстояние между точками 1 и 2, измеренное вдоль траектории, называется **путем**  $S$ .

При стремлении  $\Delta t$  к нулю конечное приращение радиуса-вектора  $\Delta \vec{r}$  заменяется на бесконечно малое приращение радиуса-вектора  $d\vec{r}$ . При этом, направление вектора  $d\vec{r}$  будет совпадать по направлению с единичным вектором  $\vec{\tau}$ , направленным по касательной к траектории в сторону движения точки.

Для определения быстроты изменения положения материальной точки в пространстве вводят понятие скорости. Рассмотрим отношение вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$  к времени перемещения  $\Delta t$ . Малому времени будет соответствовать элементарное перемещение  $d\vec{r}$ . Отношение элементарного перемещения к малому времени определяет производную (рис. 1.5). **Мгновенной скоростью** материальной точки называется производная ее радиуса-вектора по времени:

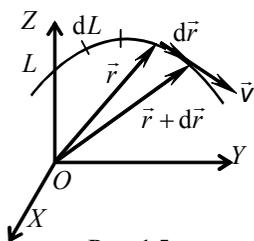


Рис. 1.5

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad (1.3)$$

где точкой сверху будем обозначать производную по времени.

Направление вектора мгновенной скорости  $\vec{v}$  определяется направлением вектора перемещения  $d\vec{r}$ . С учетом выражения (1.1) вектор мгновенной скорости может быть представлен в виде

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}.$$

Таким образом, компоненты вектора скорости определяются как соответствующие производные:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (1.4)$$

Тогда модуль скорости может быть найден следующим образом:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

**Равномерным** называется движение с постоянной по модулю скоростью, т.е.  $|\vec{v}| = \text{const}$ .

Определим путь, проходимый телом за время  $t$  при движении по произвольной траектории из положения 1 в положение 2 (рис. 1.6). Разобьем траекторию на такие малые участки (в дальнейшем называемые элементарными), чтобы можно было считать скорость на этих участках неизменной. Тогда длина траектории  $i$ -го участка (путь) будет выражаться формулой

$$\Delta L_i = v_i \Delta t_i,$$

где  $v_i$  – модуль скорости на  $i$ -м участке;  $\Delta t_i$  – время его прохождения.

Весь путь можно найти как сумму длин всех элементарных участков. При этом значение пути будет определено тем точнее, чем меньше рассматриваемые элементарные участки  $\Delta L_i$ , т.е. чем меньше промежутки времени  $\Delta t_i$ :

$$\Delta L_i = v_i S = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum \Delta L_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum v_i \Delta t_i = \int_0^t |v(t)| dt. \quad (1.5)$$

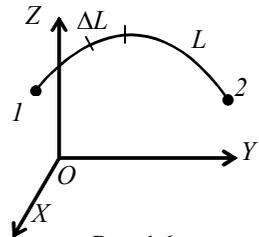


Рис. 1.6

Значение пути определяется площадью под графиком зависимости скорости от времени (геометрический смысл интеграла).

Важной векторной кинематической величиной является **ускорение** – производная мгновенной скорости по времени, которое характеризует быстроту изменения вектора скорости (как по величине, так и по направлению):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}; \quad \vec{a} \uparrow \uparrow d\vec{v}.$$

В проекциях на оси координат получим следующие выражения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.6)$$

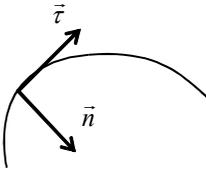


Рис. 1.7

В общем случае направление вектора ускорения тела неизвестно. Для его нахождения выберем в каждой точке траектории два единичных вектора,  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$ . Вектор  $\vec{\tau}$  направим по касательной к траектории в сторону движения точки, а вектор  $\vec{n}$  – по нормали в сторону вогнутости траектории (рис. 1.7).

Проекция вектора  $\vec{a}$  на направление  $\vec{n}$  называется **нормальным** (центростремительным) **ускорением**, а на направление  $\vec{\tau}$  **тангенциальным** (касательным) **ускорением**

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}, \quad (1.7)$$

где  $a_\tau$  и  $a_n$  – модули тангенциального и нормального ускорений.

Выясним физический смысл этих ускорений. Для этого представим скорость следующим образом:

$$\vec{v} = v\vec{\tau}.$$

Определим ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}v. \quad (1.8)$$

Из сравнения первых слагаемых в формулах (1.7) и (1.8) видно, что

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, **тангенциальное ускорение** характеризует быстроту изменения модуля скорости.

Найдем модуль и физический смысл второго слагаемого выражения (1.8).

Напомним, что скалярным произведением векторов называется скалярная величина, определяемая как произведение модулей векторов и косинуса угла между векторами. Поскольку

$(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = 1 = \text{const}$ , то  $\frac{d(\vec{\tau}, \vec{\tau})}{dt} = 0$ . Производную по времени выражения

$(\vec{\tau}, \vec{\tau})$  можно найти следующим образом:

$$\frac{d(\vec{\tau}, \vec{\tau})}{dt} = \vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} \vec{\tau} = 2\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Поэтому  $\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0$ , а следовательно

$\vec{\tau} \perp \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ . Итак, второе слагаемое выражения (1.8) – это вектор, перпендикулярный  $\vec{\tau}$ , направленный по нормали к касательной, т.е. это – вектор нормального ускорения, **характеризующий быстроту изменения направления вектора скорости.**

Рассмотрим частный случай равномерного движения материальной точки по окружности радиуса  $R$  (рис. 1.8, а). Пусть за промежуток времени  $\Delta t$  точка, двигаясь из положения 1 в положение 2,

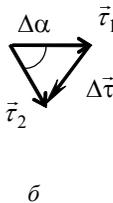
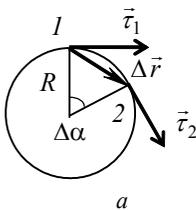


Рис. 1.8

совершила перемещение  $\Delta \vec{r}$ .

Вектор  $\vec{\tau}$  за это время изменил направление, повернувшись вместе с точкой на угол  $\Delta \alpha$ . Изобразим вектор  $\Delta \vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$  (рис. 1.8, б). Из подобия равнобедренных треугольников следует

$$\frac{|\Delta \vec{\tau}|}{\tau} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{R},$$

откуда  $\Delta \tau = \frac{1}{R} \Delta r$ . Устремим промежуток времени  $\Delta t$  к 0. Тогда

$\Delta \tau \rightarrow d\tau$ ,  $\Delta r \rightarrow dr$ , а поэтому  $d\tau = \frac{1}{R} dr$ . Разделив на  $dt$ , получаем

$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{R} v$ . Поэтому модуль второго слагаемого в (1.8)

$\left| \frac{d\vec{\tau}}{dt} v \right| = \frac{1}{R} v^2$ . Таким образом, получено, что  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .

Если движение по окружности будет неравномерным, то

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (1.9)$$

В случае произвольной плоской траектории (рис. 1.9) в каждой ее точке можно провести так называемую соприкасающуюся окружность, которая достаточно хорошо в этом месте траектории совпадает с самой траекторией. Радиус этой окружности назовем **радиусом кривизны траектории**  $\rho$ . В этом случае нор-

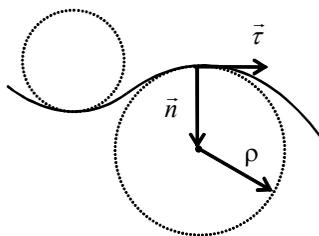


Рис. 1.9

мальное ускорение запишется в виде  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ .

**Определим кинематический закон движения материальной точки в случае постоянного ускорения.** Если вектор ускорения остается постоянным по модулю и направлению, то такое движение называется **равнопеременным**. Из определения ускорения следует  $d\vec{v} = \vec{a} dt$ . После интегрирования этого выражения получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t, \quad (1.10)$$

где  $\vec{v}_0$  – начальная скорость в момент времени  $t = 0$ ;  $\vec{v}$  – скорость в момент времени  $t$ .

Воспользуемся выражением (1.3), которое запишем в виде  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ . После подстановки значения скорости из (1.10) и интегрирования при  $\vec{a} = \text{const}$  получаем:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad (1.11)$$

где  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор, определяющий положение тела в момент времени  $t = 0$ .

Используя (1.2), запишем законы изменения координат тела:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad z = z_0 + v_{0z}t + \frac{a_z t^2}{2}. \quad (1.12)$$

Поставим перед собой следующую задачу – выяснить законы преобразования скорости и ускорения при переходе к другой системе отсчета. Имеются две произвольные системы отсчета  $(X, Y, Z)$  и  $(X', Y', Z')$ , движущиеся относительно друг друга. Известны скорость  $\vec{v}$  и ускорение  $\vec{a}$  некоторой точки  $M$  в системе отсчета  $(X, Y, Z)$ . Необходимо выяснить соответствующие значения скорости  $\vec{v}'$  и ускорения  $\vec{a}'$  этой точки в системе  $(X', Y', Z')$ .

В рамках классической механики длины пространственных и временных отрезков считаются абсолютными (одинаковы в различных системах отсчета). Свойство физических величин сохранять свои значения неизменными в разных системах отсчета называется **инвариантностью**, а сами такие величины – **инвариантами**.

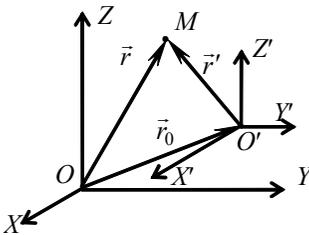


Рис. 1.10

Пусть положение точки  $M$  в системе  $(X, Y, Z)$  задается радиусом-вектором  $\vec{r}$ , а в системе  $(X', Y', Z')$  радиусом-вектором  $\vec{r}'$  (рис. 1.10). Будем считать систему  $(X, Y, Z)$  неподвижной (абсолютной), а систему  $(X', Y', Z')$  – движущейся относительно нее (относительной). Если положение движущейся системы относительно неподвижной

задается радиусом-вектором  $\vec{r}_0$ , то

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

Таким образом, преобразования координат и времени при переходе из одной системы отсчета в другую в классической механике описываются системой уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \\ z = z_0 + z', \\ t = t'. \end{cases} \quad (1.13)$$

Данная система уравнений носит название **преобразований Галилея**.

Если перемещение точки  $M$  за время  $dt$  происходит в неподвижной системе, то оно складывается из перемещения относительно движущейся системы  $d\vec{r}'$  и перемещения самой движущейся системы  $d\vec{r}_0$ :

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}'.$$

Разделив последнее выражение на  $dt$ , получим формулу преобразования скорости

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'. \quad (1.14)$$

Данное выражение называется **классическим законом сложения скоростей**. Если соотношение (1.14) продифференцировать по времени, то найдем формулу преобразования ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'. \quad (1.15)$$

Из (1.15) видно, что из условия  $\vec{a}_0 = 0$  следует, что  $\vec{a} = \vec{a}'$ . Таким образом, при поступательном движении двух систем отсчета без ускорения друг относительно друга ускорения точки  $M$  в таких системах будут одинаковыми.

**Рассмотрим пример решения задачи.** Стальной шарик отпускают в поле тяжести на высоте  $h = 3$  м от массивной стальной плиты, движущейся вверх со скоростью  $v = 2$  м/с. Определите время  $\tau$  между двумя последовательными абсолютно упругими ударами шарика о плиту.

Эту задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с движущейся плитой. В такой системе отсчета формулировка задачи будет иметь вид: «С высоты  $h$  со скоростью  $v$ , направленной вниз, на неподвижную плиту бросают шарик». Найдем скорость

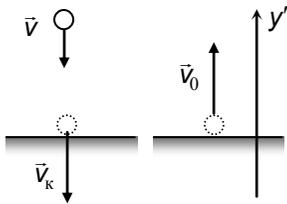


Рис. 1.11

$v_k$ , с которой шарик подлетит к плите (рис. 1.11), по формуле  $v_k^2 - v^2 = 2gh$ , откуда  $v_k = \sqrt{v^2 + 2gh}$ . Скорость  $v_0$ , с которой шарик отскочит от плиты, равна по модулю  $v_k$ , так как удар абсолютно

упругий. В момент  $\frac{\tau}{2}$  после отскока скорость шарика обратится в 0 (время подъема равно времени спуска). Запишем это условие в проекции на ось  $y'$ :  $v'_y = v_0 - g\frac{\tau}{2} = 0$ . Следовательно, искомое

время получится таким:  $\tau = \frac{2}{g}v_0 = 2\sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. На каких аксиомах и свойствах пространства основывается классическая механика?
2. В каких случаях модуль перемещения точки равен длине пути, пройденного точкой за тот же промежуток времени?
3. Как движется точка, если скорость этой точки все время перпендикулярна ее ускорению?
4. Что можно сказать о траектории точки, двигающейся по плоскости, если:
  - а) радиус-вектор частицы меняется только по модулю;
  - б) меняется только по направлению;
  - в) меняется только проекция на ось  $OX$ ?
5. Какой физический смысл тангенциального и нормального ускорений?
6. Нарисуйте векторы скорости и ускорения материальной точки для следующих типов движения:
  - а) прямолинейное ускоренное;
  - б) криволинейное ускоренное;
  - в) движение по окружности с постоянной по модулю скоростью.

## 2. ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Законы механики в разных системах отсчета имеют, вообще говоря, различный вид, поэтому возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики были бы возможно более простыми. Опыт показывает, что причиной появления ускорения материальной точки могут быть как действия других тел на данную точку, так и свойства самой системы отсчета. Можно предположить, что существует такая система отсчета, в которой ускорение тела целиком обусловлено только его взаимодействием с другими телами. Свободная материальная точка, не подверженная действию других тел, движется относительно такой системы отсчета без ускорения, т.е. равномерно и прямолинейно (или покоится). Утверждение, что такие системы отсчета существуют, составляет содержание первого закона динамики – закона инерции.

**Первый закон Ньютона** – существуют такие системы отсчета, называемые **инерциальными**, в которых материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния. Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, также является инерциальной. Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, называют **неинерциальными**.

Для инерциальных систем отсчета справедлив **принцип относительности Галилея**, согласно которому все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу. Это означает, что никакими механическими опытами, проводимыми в данных системах, нельзя установить, покоится эта система отсчета или движется. Основные законы механики, которыми определяются изменения характера движения тел, во всех инерциальных системах отсчета одни и те же.

Изучая на опыте различные движения, можно обнаружить, что в инерциальных системах отсчета любое ускорение тела вызывается действием на него каких-либо других тел. Мера механического взаимодействия тел называется **силой**. Сила – векторная физическая величина, характеризующаяся модулем, направлением и точкой приложения к телу. Действие силы на тело выражается в сообщении телу ускорения и (или) деформации тела.

Опыт показывает, что любое тело «оказывает сопротивление» попыткам изменить его скорость – как по модулю, так и по направлению. Свойство материальных тел сохранять свою скорость неизменной при отсутствии действующих на тело сил, и постепенно изменять скорость, когда на тело начинают действовать силы, называется **инертностью**. Мера инертности тела называется **массой тела**. При действии одинаковых сил на два различных тела отношение масс тел обратно отношению ускорений, сообщаемых телам равными силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (2.1)$$

Таким образом, сравнение масс двух тел, на которые действует одна и та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел. Взяв некоторое тело за эталон массы, можно сравнить массу любого тела с этим эталоном. В рамках классической механики масса обладает двумя важнейшими свойствами:

- 1) масса – величина аддитивная, т.е. масса тела равна сумме масс его частей;
- 2) масса – величина постоянная, не изменяющаяся при движении тела.

**Второй закон Ньютона** утверждает, что в инерциальных системах отсчета ускорение тела прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

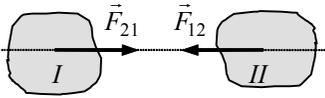


Рис. 2.1

Если рассматриваемое тело взаимодействует с несколькими телами, то суммарный результат действия отдельных тел можно представить как действие на данное тело векторной суммы сил:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{m}, \quad (2.2)$$

где  $\vec{F}_i$  – сила взаимодействия  $i$ -го тела с данным.

**Единицей силы** в СИ является ньютон (Н). 1 ньютон – это такая сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение  $1 \text{ м/с}^2$ .

Общее свойство всех сил взаимодействия постулируется **третьим законом Ньютона**: силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга в инерциальной системе отсчета, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки, т.е.

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (2.3)$$

Эти силы приложены к разным телам и являются силами одной природы.

Современный взгляд на природу возникновения сил устанавливает три **типа взаимодействий**: 1) гравитационное; 2) электрослабое (электромагнитное и слабое); 3) сильное (или ядерное).

Взаимодействие тел может происходить при «контактном» действии (силы трения, сила упругости, сила натяжения нити, реакция опоры, вес и т.д.) и при действии на расстоянии, посредством поля (сила тяжести, сила Кулона, сила Лоренца и т.д.).

Однако такое разделение сил имеет условный характер: и при непосредственном контакте силы взаимодействия обусловлены наличием тех или иных полей, создаваемых атомами или молекулами тел. Под **полем** мы будем понимать объективную реальность, посредством которой осуществляются взаимодействия.

Поле – форма существования материи, которая в отличие от вещества не локализовано в пространстве.

Рассмотрим некоторые виды сил, которые встретятся нам при изучении задач механики.

1. **Гравитационное взаимодействие** является универсальным взаимодействием между любыми видами материи. Если две материальные точки движутся со скоростями  $v \ll c$ , то справедлив **закон всемирного тяготения Ньютона**, согласно которому эти точки притягиваются друг к другу с силой, вычисляемой по формуле

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.4)$$

где  $r$  – расстояние между точками. Коэффициент пропорциональности  $G$  называется **гравитационной постоянной**, и был впервые экспериментально определен английским ученым Г. Кавендишем в 1798 г. По современным данным  $G = 6,67259(85) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ . Фигурирующие в этом законе массы называют **гравитационными** в отличие от **инертной** массы, входящей во второй закон Ньютона. Из опыта установлено, что гравитационная и инертная массы любого тела равны.

При рассмотрении движения тела массой  $m$  в поле тяготения Земли, если высота тела над поверхностью планеты меняется незначительно по сравнению с радиусом Земли, выражение для силы тяготения (2.3) удобно заменить на формулу **однородной силы тяжести**

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

где  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения тела в поле тяжести.

2. В механике вводится понятие **веса тела**  $\vec{P}$  – силы, с которой тело действует на опору (или подвес), неподвижную относительно данного тела.

3. Рассмотрим так называемое **внешнее трение**, которое обычно называют просто трением в отличие от внутреннего трения, о котором будет сказано в разделе «Молекулярная физика».

Внешнее трение – механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух прижатых друг к другу тел при их относительном перемещении или попытке к перемещению. В первом случае говорят о наличии **силы трения скольжения**, во втором – о наличии **силы трения покоя**. Направление силы трения противоположно относительному перемещению трущихся поверхностей или возможному перемещению.

Возникновение силы трения объясняется, во-первых, изменением поверхностного слоя (разрушением), а, во-вторых, преодолением молекулярных связей. В дальнейшем будем рассматривать силу трения скольжения, действующую на тело,двигающееся по шероховатой поверхности. Ее модуль определяется выражением

$$F_{\text{тр. ск}} = \mu N, \quad (2.5)$$

где  $N$  – модуль силы нормальной реакции, приложенной к телу со стороны опоры;  $\mu$  – коэффициент трения.

Модуль силы трения покоя не превышает модуля силы трения скольжения и определяется внешней силой.

4. Свойство тел изменять свою форму и размеры под действием нагрузок и самопроизвольно восстанавливать исходную конфигурацию при снятии внешних воздействий называется **упругостью**. Упругость тел обусловлена электрическими силами взаимодействия атомов и молекул, из которых они построены. Упругие деформации (возникающие, например, при растяжении или сжатии пружин) подчиняются **закону Гука**, который гласит, что

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}, \quad (2.6)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия;  $k$  – **коэффициент жесткости**, численно

равный модулю силы, вызывающей единичное удлинение.

Знак “–” в законе Гука показывает, что упругая сила и перемещение пружины (ее деформация) имеют противоположные направления. На рисунке 2.2 показаны направление силы упругости при одномерном растяжении пружины и зависимость проекции силы упругости на направление деформации пружины от деформации.

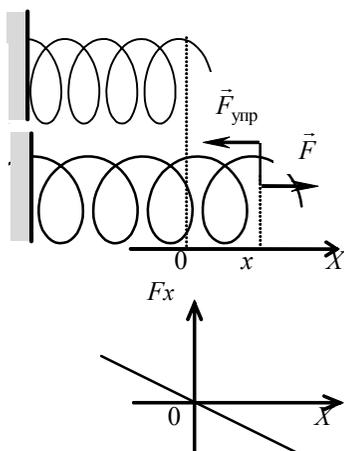


Рис. 2.2

Рассмотрим выражение второго закона Ньютона (2.2) для материальной точки, на которую действует несколько сил. Если учесть определение ускорения, то из формулы  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$  можно получить, что

$$d(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt. \quad (2.7)$$

Данное соотношение представляет собой иную форму записи второго закона Ньютона. В правой его части находится произведение суммы всех сил, действующих на материальную точку, на временной интервал их действия. Эта величина носит название **импульса сил**. В левой части (2.7) определяется изменение **векторной физической величины, равной произведению массы тела на его скорость**. Эта величина называется **импульсом тела**:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.8)$$

Таким образом, **второй закон Ньютона** можно сформулировать следующим образом: изменение импульса материальной точки равно суммарному импульсу всех сил, к ней приложенных.

Рассмотрим теперь систему  $N$  материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , которые могут взаимодействовать друг с другом и с внешними телами, не входящими в данную систему (рис. 2.3). Положение каждой материальной точки в системе задается радиусом-вектором  $\vec{r}_i$  в выбранной системе отсчета. Пусть на  $i$ -ю точку со стороны  $k$ -й действует сила  $\vec{f}_{ik}$ . Тогда по третьему закону

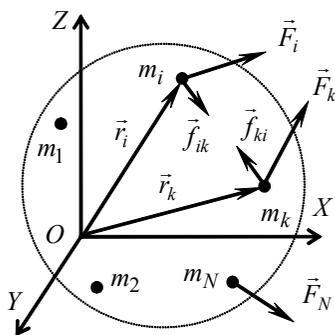


Рис. 2.3

Ньютона на  $k$ -ю точку со стороны  $i$ -й действует сила  $\vec{f}_{ki}$ , причем  $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$ . Силы, с которыми тела, входящие в рассматриваемую систему тел, взаимодействуют друг с другом называются **внутренними силами**. Силы, с которыми тела, не входящие в рассматриваемую систему тел, действуют на материальные точки

рассматриваемой системы называются **внешними силами** (на рис. 2.3 такие силы обозначены  $\vec{F}_i$ ). В общем случае на любую материальную точку системы могут действовать как внутренние, так и внешние силы. Запишем второй закон Ньютона для каждой точки:

$$\begin{aligned}d\vec{p}_1 &= (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \dots + \vec{f}_{1N})dt, \\d\vec{p}_i &= (\vec{F}_i + \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i3} + \dots + \vec{f}_{iN})dt, \\d\vec{p}_N &= (\vec{F}_N + \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + \dots + \vec{f}_{N,N-1})dt,\end{aligned}$$

где  $\vec{F}_i$  – равнодействующая всех внешних сил, действующих на  $i$ -ю точку.

Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^N d\vec{p}_i = \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right) dt,$$

причем во втором слагаемом правой части полученного выражения отсутствуют члены с индексами  $i = k$ . **Импульсом системы** материальных точек называется геометрическая сумма импульсов всех ее тел:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i. \quad (2.9)$$

Тогда, поскольку  $\sum_{i=1}^N d\vec{p}_i = d \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ , то

$$d\vec{p}_{\text{сист}} = \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right) dt.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона  $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} = 0$ ,

поэтому

$$d\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i dt. \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что импульс системы материальных точек могут изменить только внешние силы, если их геометрическая сумма не равна нулю. Система называется **изолированной**, если на

систему не действуют внешние силы, и **замкнутой**, если внешние силы, действующие на систему, скомпенсированы. Сформулируем **закон сохранения импульса системы материальных точек**: импульс изолированной или замкнутой системы материальных точек сохраняется:

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}, \text{ или } \vec{p}_{1\text{сист}} = \vec{p}_{2\text{сист}}, \quad (2.11)$$

где  $\vec{p}_{1\text{сист}}$  – импульс системы тел до начала рассматриваемого взаимодействия;  $\vec{p}_{2\text{сист}}$  – импульс системы тел после окончания рассматриваемого взаимодействия.

Часто в задачах рассматривается случай, когда внешние силы не скомпенсированы, но сумма их проекций на какое-либо направление равна нулю. Такая система тел называется **условно замкнутой в** данном направлении и можно сказать, что проекция импульса системы на это направление не меняется. В некоторых задачах взаимодействие тел происходит за очень малое время (удар, взрыв), причем внешние силы малы. Тогда начальный импульс системы примерно равен конечному импульсу системы.

В любой системе тел имеется одна замечательная точка, называемая центром масс, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Положение **центра масс** относительно начала  $O$  координатной системы определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_C$ :

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (2.12)$$

где  $m_i$  и  $\vec{r}_i$  – масса и радиус-вектор  $i$ -й материальной точки;  $M$  – масса всей системы тел.

Центр масс системы совпадает с ее центром тяжести (**точка приложения равнодействующей сил тяжести, действующих на все части системы, которая не изменяет своего положения при любых поворотах системы**), если поле сил тяжести в пределах данной системы тел можно считать однородным.

Найдем скорость центра масс, продифференцировав (2.12) по времени:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i.$$

Если скорость центра масс равна нулю, то говорят, что система в целом покоится. Сама же скорость центра масс имеет смысл скорости движения всей системы как целого. Из последней формулы следует, что

$$\vec{P}_{\text{сист}} = M \vec{v}_C, \quad (2.13)$$

**т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.**

Понятие центра масс позволяет придать уравнению (2.10) иную форму, которая часто бывает более удобной. Для этого достаточно подставить (2.13) в (2.10) и учесть, что масса системы тел – постоянная величина. Тогда получим

$$M \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (2.14)$$

где  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  – результирующая всех внешних сил, действующих на систему.

Выражение (2.14) называется **уравнением движения центра масс** системы тел. Согласно этому уравнению **центр масс любой системы тел движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке, и к ней были бы приложены все внешние силы системы.**

Из (2.14) следует, что если  $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ , то  $\frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0$ , а значит, что  $\vec{v}_C = \text{const}$ . Кроме того, в этом случае и импульс системы  $\vec{P}_{\text{сист}} = \text{const}$ .

Таким образом, если центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, то импульс системы сохраняется в процессе движения. Справедливо и обратное утверждение.

Уравнение (2.14) является обобщением основного уравнения динамики материальной точки на систему частиц: ускорение системы как целого пропорционально результирующей всех внешних сил и обратно пропорционально суммарной массе системы.

Ранее мы говорили, что основное уравнение динамики (2.2) справедливо только в инерциальных системах отсчета. Между тем имеется много случаев, когда решение интересующей задачи

необходимо получить в **неинерциальных системах** (например, движение математического маятника в ускоренно движущемся лифте).

Рассмотрим случай, когда неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной с постоянным ускорением  $\vec{a}_0$ . Воспользуемся формулой преобразования ускорений (1.15), в соответствии с которой  $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$ , где  $\vec{a}'$  – ускорение точки в неинерциальной системе,  $\vec{a}$  – ускорение той же точки в инерциальной системе. Умножив это выражение на массу тела, и воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим формулу, описывающую движение материальной точки в неинерциальной системе отсчета:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (2.15)$$

Это и есть основное уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета. Из него видно, что даже при  $\vec{F} = 0$  тело будет двигаться в этой системе с ускорением, в общем случае отличным от нуля. При этом на тело в неинерциальной системе отсчета как бы действует сила

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0, \quad (2.16)$$

называемая **силой инерции**. Направление силы инерции противоположно направлению  $\vec{a}_0$ .

Поскольку сила инерции не является мерой взаимодействия тел, то понятие «сила инерции» не попадает под определение понятия «сила». Уравнение (2.15) показывает, что введение сил инерции позволяет сохранить по форме основное уравнение динамики и для неинерциальных систем: слева – произведение массы тела на его ускорение (но уже в неинерциальной системе отсчета), справа – сумма сил. Отметим основные особенности сил инерции.

1. Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. Поэтому на силы инерции третий закон Ньютона не распространяется.

2. Эти силы существуют только в неинерциальных системах отсчета.

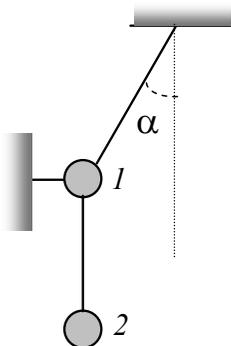


Рис. 2.4

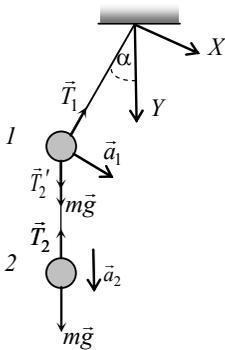


Рис. 2.5

3. Все силы инерции, подобно силам тяготения, пропорциональны массе тела. Поэтому в однородном поле сил инерции, как и в поле тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

### Рассмотрим пример решения задачи.

Два одинаковых груза с помощью идеальных нитей удерживаются в положении, показанном на рис. 2.4. Найдите ускорения грузов сразу после пережигания горизонтальной нити. Угол  $\alpha$  известен.

Покажем систему сразу после пережигания нити на рис. 2.5. Начальные скорости тел равны 0, поэтому нормальное ускорение груза 1 равно 0. Следовательно, ускорение этого груза направлено по касательной к траектории его дальнейшего движения, т.е. перпендикулярно силе  $\vec{T}_1$ . На груз 2 действуют вертикально направленные силы, поэтому его ускорение направлено вертикально вниз. Таким образом, выберем оси  $X$  и  $Y$  вдоль направлений ускорений  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ .

Векторные уравнения второго закона Ньютона для каждого груза:  $m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2'$  и  $m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{T}_2$ . Проекция этих уравнений на выбранные оси имеют вид:  $ma_1 = (mg + T_2')\sin\alpha$ ,  $ma_2 = mg - T_2$ . Если считать нить невесомой, то  $T_2' = T_2$ . Кроме того, если нити нерастяжимы, то проекции ускорений крайних точек нити на ось  $Y$  связаны соотношением:  $a_1 \sin\alpha = a_2$ .

Совместное решение всех составленных уравнений дает

$$a_1 = \frac{2\sin\alpha}{1 + \sin^2\alpha} g, \quad a_2 = \frac{2\sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha} g.$$

## Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается принцип относительности Галилея?
2. Сформулируйте уравнения движения центра масс системы тел.
3. На полу лифта лежит тело массой  $m$ . Чему равен вес тела:
  - а) при равномерном движении лифта вниз;
  - б) при свободном падении лифта;
  - в) при подъеме лифта вверх с ускорением?
4. В чем состоит закон изменения импульса механической системы?
5. При каких условиях импульс системы не меняется?
6. Брусок массой  $m$  неподвижно лежит на горизонтальной плоскости. Определите минимальную силу, которая необходима для того, чтобы сдвинуть брусок с места при помощи идеальной нити, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен  $\mu$ .

## 3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ В МЕХАНИКЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Понятие энергии является одним из основных понятий в физике. В этом смысле понятие энергии относится к числу первичных понятий физики. Можно сказать, что **энергия – это общая количественная мера движения и взаимодействия всех видов материи**. Различным формам движения материи соответствуют и различные виды энергии: механическая, внутренняя, электромагнитная, ядерная и т.д. Фундаментальным законом природы является **общефизический закон сохранения энергии**: в изолированной системе энергия может переходить из одной формы в другую, но ее количество остается постоянным.

Этот закон относится к числу строгих законов (применимых как в макром мире, так и в микромире), не имеющих в настоящее время никаких отступлений. Окончательно закон был сформулирован в середине XIX в. в трудах выдающихся ученых Р. Майера, Д. Джоуля и Г. Гельмгольца.

В курсе механики нас будет интересовать **механическая энергия** тела  $W_{\text{мех}}$ , которая определяется как сумма потенциальной  $W_{\text{п}}$  и кинетической  $W_{\text{к}}$  энергий:

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{п}} + W_{\text{к}}. \quad (3.1)$$

Механическая энергия системы может меняться под действием сил, действующих как внутри системы, так и на нее. Для количественного описания изменения механической энергии вводится понятие работы силы. Энергия характеризует состояние системы, а работа – количественная характеристика преобразования энергии в физических процессах.

Рассмотрим прямолинейное движение тела из положения 1 в положение 2 под действием постоянной силы  $\vec{F}$  (рис. 3.1). Если тело совершило перемещение  $\Delta\vec{r}$ , то **механической работой постоянной силы** называется скалярное произведение силы на вектор перемещения:

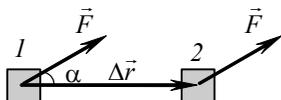


Рис. 3.1

$$A(F) = (\vec{F} \Delta\vec{r}) = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \alpha. \quad (3.2)$$

Если известны проекции векторов  $\vec{F}$  и  $\Delta\vec{r}$ , то (3.2) можно переписать в виде

$$A(F) = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z.$$

Рассмотрим теперь перемещение тела вдоль произвольной траектории, если к телу приложена сила  $\vec{F}$ , изменяющаяся во времени (рис. 3.2). Разобьем траекторию на такие малые участки, чтобы на каждом участке силу можно было считать постоянной.

Тогда на  $i$ -м участке малая работа силы  $\vec{F}_i$  (обозначим ее  $\delta A_i$ ) может быть вычислена по формуле  $\delta A_i = (\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i)$ . Вся работа силы по перемещению тела из положения 1 в положение 2 будет равна сумме работ на отдельных участках:

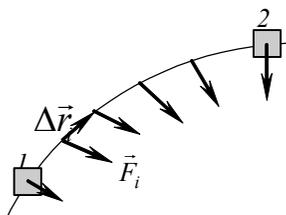


Рис. 3.2

$$A = \sum_i \delta A_i = \sum_i (\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i).$$

Совпадение вычисленного результата с истинным будет тем более полным, чем меньшие векторы  $\Delta \vec{r}_i$  будем рассматривать. Поэтому определение **механической работы произвольной силы** при движении тела можно представить следующим образом:

$$A = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i (\vec{F}_i \Delta \vec{r}_i) = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}). \quad (3.3)$$

Такой интеграл носит название **криволинейного интеграла вдоль траектории**. Если выбрана система координат, и начальному 1 и конечному 2 положениям тела соответствуют радиусы-векторы  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , то можно записать, что

$$A = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F} d\vec{r}).$$

Единицей измерения работы в СИ является джоуль (Дж). Джоуль – это работа, совершаемая силой 1 Н по перемещению тела на 1 м в направлении действия силы. Работа – величина алгебраическая, ее знак определяется знаком косинуса угла между направлением силы и направлением перемещения тела.

Пусть на материальную точку действуют несколько сил  $\vec{F}_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ . Тогда равнодействующая  $\vec{R}$  этих сил определяется как  $\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ . Умножим это равенство скалярно на  $d\vec{r}$ :

$(\vec{R} d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i d\vec{r})$ . Если точка перемещается из положения, определенного радиусом-вектором  $\vec{r}_1$ , в положение, определенное радиусом-вектором  $\vec{r}_2$ , то полученное соотношение можно проинтегрировать в пределах:

$$\int_{r_1}^{r_2} (\vec{R} d\vec{r}) = \int_{r_1}^{r_2} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F}_i d\vec{r}) = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_i).$$

Это выражение доказывает следующую теорему: **работа равнодействующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ, совершаемой каждой из сил в отдельности.**

**Силовым полем** называется часть пространства (ограниченная или неограниченная), в каждой точке которой на помещенное туда материальное тело действует сила, модуль и направление которой зависят либо только от координат этого тела, либо от координат и времени. В первом случае силовое поле называется **стационарным**, во втором – **нестационарным**. Если же сила во всех точках силового поля имеет одно и то же значение и направление, то силовое поле называется **однородным**.

Существует особый класс полей, называемых **потенциальными**. Сила поля, действующая на тело, называется потенциальной, если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения тела и не зависит ни от вида траектории, ни от закона движения тела.

Пусть материальная точка перемещается в потенциальном поле из положения 1 в положение 2 (рис. 3.3). Работа силы поля  $\vec{F}$  на траектории “a” равна работе силы поля  $\vec{F}$  на траектории “b” по определению:  $A(F) = A(F)$ .

Но, поскольку  $\cos\alpha = -\cos\beta$ , то  $A(F) = -A(F)$ . Тогда не-

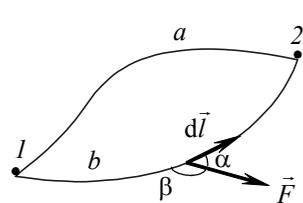


Рис. 3.3

трудно получить, что  $A(F) + A(F) = 0$ ,

т.е.  $A(F) = 0$ . Таким образом, работа

потенциальной силы по замкнутой траектории  $1-a-2-b-1$  равна нулю. Так

как траектории “a” и “b” были произвольными, то можно сказать, что **работа**

**потенциальной силы на любой замкнутой траектории L всегда равна нулю.** Эту фразу можно коротко записать следующим образом:

$$\oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = 0. \quad (3.4)$$

Такой интеграл носит название **циркуляции** вектора  $\vec{F}$  по замкнутому контуру  $L$ , а полученное выражение дает критерий потенциальности поля сил.

Существует особый класс сил, линия действия которых проходит всегда через одну и ту же точку (центр), а модуль этих сил зависит только от расстояния до этой точки. Такие силы называются **центральными**. Примеры таких сил – сила тяжести, кулоновская, сила упругости и др. Центральные силы являются потенциальными.

Пусть материальная точка движется из положения 1, где она имела скорость  $\vec{v}_1$ , в положение 2, где скорость стала равной  $\vec{v}_2$ . Обозначим равнодействующую всех сил, приложенных к точке, через  $\vec{R}$ , и найдем ее работу по перемещению тела. Учтем соотношение (2.10) и получим

$$A(\vec{R}) = \int_1^2 \vec{R} d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \int_1^2 d\vec{p} \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_1^2 \vec{v} d\vec{p}.$$

Поскольку скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату модуля этого вектора:  $\vec{v}\vec{v} = v^2$ , то

$$A(\vec{R}) = \int_1^2 \vec{v} d(m\vec{v}) = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.5)$$

В приведенном выводе рассмотрен нерелятивистский случай движения ( $v \ll c$ ), поэтому  $m = \text{const}$ .

Величина  $\frac{mv^2}{2}$  называется **кинетической энергией**  $W_k$  материальной точки. Так как работа равнодействующей силы равна сумме работ сил, то можно записать, что

$$\Delta W_k = W_{k2} - W_{k1} = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_i). \quad (3.6)$$

Таким образом, доказана **теорема об изменении кинетической энергии**: изменение кинетической энергии материальной точки равно алгебраической сумме работ всех приложенных к ней сил.

Рассмотрим теперь систему материальных точек. Кинетической энергией системы тел называется сумма кинетических энер-

гий всех тел, входящих в эту систему. Запишем теорему об изменении кинетической энергии для каждой точки, входящей в эту систему. Тогда для  $j$ -й точки получаем уравнение

$$\Delta W_{kj} = \sum_{i=1}^N A(\vec{F}_{ij}) + \sum_{i=1}^N A(\vec{f}_{ij}),$$

в котором  $\vec{F}$  – внешние силы, действующие на эту точку, а  $\vec{f}$  – внутренние силы. Сложив все уравнения, получим

$$\Delta W_{\text{к. сист}} = \sum A(\vec{F}) + \sum A(\vec{f}). \quad (3.7)$$

Изменение кинетической энергии системы материальных точек определяется работой как внутренних, так и внешних сил. Напомним, что изменение импульса системы материальных точек определяется импульсом только внешних сил.

Если система материальных точек под действием потенциальных сил перешла из одного состояния в другое, то потенциальные силы совершили работу, которая не зависит от того, каким образом осуществилось изменение состояния системы. Работа потенциальных сил зависит только от начального и конечного состояний системы. Поэтому эту работу можно взять в качестве характеристики изменения состояния системы тел.

Введем **потенциальную энергию** системы тел  $W_{\text{п}}$ , которая связана с работой потенциальных сил по следующему правилу:

$$W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}), \quad (3.8)$$

где  $W_{\text{п1}}$  – потенциальная энергия системы тел в состоянии 1;  $W_{\text{п2}}$  – потенциальная энергия системы тел в состоянии 2;  $A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}})$  – работа потенциальных сил взаимодействия при переходе системы из состояния 1 в состояние 2. Это правило можно переписать в виде:

$$\Delta W_{\text{п}} = -A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}) \text{ или } dW_{\text{п}} = -\delta A_{1 \rightarrow 2}(f_{\text{п}}).$$

Из последнего выражения видно, что работа потенциальных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии системы. **Изменение потенциальной энергии системы тел, между которыми действуют потенциальные силы, равно взятой с обратным знаком работе этих сил при переходе системы из одного состояния в другое.**

Физический смысл имеет только изменение потенциальной энергии, однако часто говорят о потенциальной энергии системы в данном состоянии. В этом случае потенциальная энергия в одном из состояний условно принимается за нуль (нулевой потенциальный уровень). Пусть  $W_{п1} = 0$ , тогда  $W_{п2} = -A_{1 \rightarrow 2}(f_{п}) = = A_{2 \rightarrow 1}(f_{п})$ . Таким образом можно сказать, что потенциальная энергия системы в некотором состоянии равна работе потенциальных сил при переходе системы из этого состояния в состояние, в котором значение потенциальной энергии условно принято за нулевое.

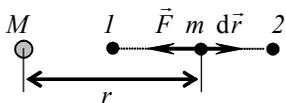


Рис. 3.4

В качестве примера рассмотрим изменение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами  $M$  и  $m$  при удалении их друг от друга (рис. 3.4).

Допустим, что тело массой  $M$  создает гравитационное поле, а тело массой  $m$  перемещается в этом поле из точки 1 в точку 2, которые находятся на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  соответственно от массы, создающей поле. Поскольку гравитационная сила – центральная, то перемещение массы  $m$  может осуществляться по любой траектории. Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории движения тела, а рассчитывать ее удобнее при прямолинейном движении. На малом перемещении  $d\vec{r}$  элементарная работа

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \pi = -F dr .$$

Тогда изменение потенциальной энергии

$$\Delta W_{п} = -\int_1^2 \delta A = \int_1^2 F dr = \int_{r_1}^{r_2} G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) .$$

Рассмотрим на данном примере выбор нулевого уровня потенциальной энергии.

**1 способ.** В физике часто встречаются силы, модуль которых с увеличением расстояния между взаимодействующими телами уменьшается и при  $r \rightarrow \infty$  достаточно быстро стремится к нулю. К таким силам относится сила гравитационного взаимодействия. В таких задачах обычно потенциальную энергию принимают равной нулю «на бесконечности», т.е. в положении системы,

когда тела удалены друг от друга бесконечно далеко. Пусть в рассматриваемом примере точка 2 находится «на бесконечности», тогда  $W_{п2} = 0$ . В этом случае получим

$$W_{п1} = -\frac{GMm}{r_1}, \text{ или } W_{п} = -\frac{GMm}{r}.$$

Этой зависимости потенциальной энергии гравитационного взаимодействия материальной точки  $m$ , находящейся на произвольном расстоянии  $r$  от массы  $M$ , соответствует график, показанный на рис. 3.5, а.

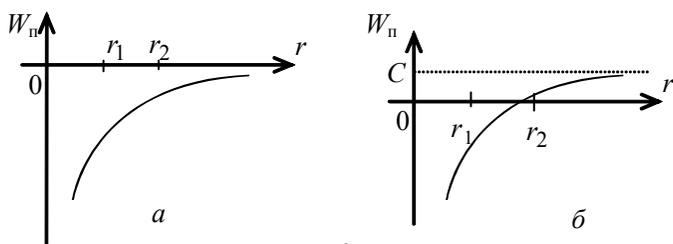


Рис. 3.5

**2 способ.** Примем теперь потенциальную энергию системы равной нулю во втором положении системы, т.е. при  $r = r_2$ . Тогда

$$W_{п1} = -\frac{GMm}{r_1} + \frac{GMm}{r_2}, \text{ причем второе слагаемое в этой формуле –}$$

некоторая постоянная величина:  $\frac{GMm}{r_2} = C$ . Потенциальная энер-

гия гравитационного взаимодействия на произвольном расстоянии  $r$  между телами может быть представлена в виде

$$W_{п} = -\frac{GMm}{r} + C. \text{ График, соответствующий этой зависимости,}$$

представлен на рис. 3.5, б.

Из последней формулы видно, что потенциальная энергия определена с точностью до некоторой постоянной величины, значение которой зависит от выбора нулевого потенциального уровня. Этот выбор в каждой конкретной задаче осуществляется индивидуально.

В качестве еще одного примера рассмотрим гравитационное поле Земли, радиус которой  $R$ , а масса  $M$ . Можно показать, что если расстояние до центра Земли  $r > R$ , то гравитационное поле, создаваемое Землей такое же, как если бы вся масса Земли была бы сосредоточена в ее центре. Пусть тело массы  $m$  перемещается из точки 1, находящейся на расстоянии  $r_1 = R$  от центра Земли в точку 2, находящуюся на высоте  $h$  над поверхностью планеты ( $r_2 = R + h$ ). Найдем изменение его потенциальной энергии. Выберем нулевой потенциальный уровень на поверхности Земли в точке 1. Тогда  $W_{п1} = 0$ . Следовательно,  $W_{п2} = GMm \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{GMmh}{R(R+h)}$ .

Если  $h \ll R$ , то  $W_{п2} = \frac{GMmh}{R^2}$ , а так как  $g = \frac{GM}{R^2}$ , то  $W_{п2} = mgh$ .

Ранее была получена интегральная связь между изменением потенциальной энергии и потенциальной силой:

$$\Delta W_{п} = - \int_1^2 \vec{F}_{пот} d\vec{r}.$$

Решим обратную задачу: зная значение потенциальной энергии (по отношению к заранее выбранному нулевому уровню), которой обладает материальная точка, помещенная в силовое потенциальное поле, найдем величину потенциальной силы. Рассмотрим бесконечно малое перемещение  $d\vec{r}$ . Изменение потенциальной энергии на этом перемещении будет

$$dW_{п} = -\vec{F} d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Пусть перемещение тела происходит только вдоль оси  $Ox$  так, что  $y = \text{const}$  и  $z = \text{const}$ . Тогда  $F_x = -\frac{dW_{п}}{dx}$ . Производная функции, когда при дифференцировании по одной из переменных (в нашем случае по  $x$ ) остальные переменные считаются постоянными

ными, называется **частной производной** и обозначается  $\frac{\partial}{\partial x}$ . Та-

ким образом,  $F_x = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x}$ . Аналогично,  $F_y = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y}$  и  $F_z = -\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z}$ .

Тогда вектор силы можно представить следующим образом:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = -\left(\vec{i}\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial W_{\Pi}}{\partial z}\right) = -\text{grad}W_{\Pi}. \quad (3.9)$$

Вектор, компоненты которого равны соответствующим частным производным скалярной величины по координатам, носит название **градиента скалярной функции** (обозначается символом grad) и направлен в сторону максимального возрастания функции  $W_{\Pi}$ .

Рассмотрим систему материальных точек, между которыми могут действовать как потенциальные, так и непотенциальные силы. Эти силы могут быть как внешними (обозначим их  $\vec{F}$ ), так и внутренними (обозначим их  $\vec{f}$ ). Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для системы материальных точек (3.6):

$$\Delta W_k = A(\vec{f}_{\text{пот}}) + A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{пот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}),$$

где  $\Delta W_k$  – изменение кинетической энергии рассматриваемой системы;  $A(\vec{f}_{\text{пот}})$  – сумма работ всех внутренних потенциальных сил;  $A(\vec{f}_{\text{непот}})$  – сумма работ всех внутренних непотенциальных сил;  $A(\vec{F}_{\text{пот}})$  – сумма работ всех внешних потенциальных сил;  $A(\vec{F}_{\text{непот}})$  – сумма работ всех внешних непотенциальных сил.

Перепишем равенство следующим образом:

$$\Delta W_k + [-A(\vec{f}_{\text{пот}})] + [-A(\vec{F}_{\text{пот}})] = A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}).$$

Слагаемые  $[-A(\vec{f}_{\text{пот}})]$  и  $[-A(\vec{F}_{\text{пот}})]$  представляют собой изменение потенциальной энергии взаимодействия тел системы за счет работы внутренних и внешних потенциальных сил. Тогда теорему об изменении кинетической энергии можно записать следующим образом:

$$\Delta W_k + \Delta W_{\Pi} = A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}).$$

Поскольку сумма кинетической и потенциальной энергий называется механической энергией, то окончательно можно сформулировать равенство:

$$\Delta W_{\text{мех}} = A(\vec{f}_{\text{непот}}) + A(\vec{F}_{\text{непот}}). \quad (3.10)$$

**Таким образом, изменение механической энергии системы материальных точек равно сумме работ внутренних и внешних непотенциальных сил.** Выражение (3.10) является математической записью закона изменения механической энергии.

**Закон сохранения механической энергии** утверждает, что если работа внутренних и внешних непотенциальных сил равна нулю, то механическая энергия системы не меняется.

**Рассмотрим пример решения задачи.** Брусок массой  $M$  покоится на идеально гладком столе. Частица массой  $m$  налетает на брусок со скоростью  $v$ , образуя угол  $\alpha$  с поверхностью бруска. С какой скоростью  $u$  частица отскочит от бруска после абсолютно упругого удара? Поверхность бруска идеально гладкая.

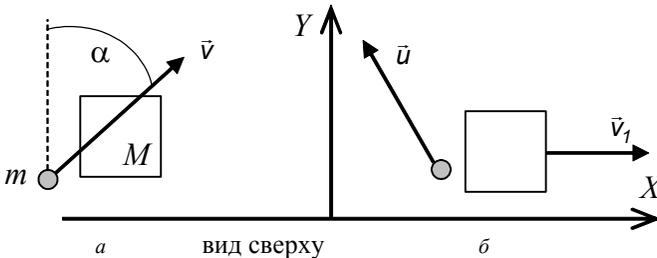


Рис. 3.6

На виде сверху (рис. 3.6) показаны положения системы тел до и после удара. По условию задачи эта система тел замкнута и консервативна. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси  $OX$  и  $OY$  и закон сохранения энергии:  $p_{1x} = p_{2x}$ ,  $p_{1y} = p_{2y}$ ,  $W_1 = W_2$ . Эти соотношения имеют вид:

$$mv\sin\alpha = mu_x + Mv_1, \quad mv\cos\alpha = mu_y, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2}.$$

Из этих уравнений получаем ответ:

$$u = \sqrt{\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 v^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha}.$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Каков смысл понятия «механическая работа»?
2. Как классифицируются силы по характеру и значению совершаемой ими работы?
3. Можно ли найти силу, действующую на тело в какой-либо точке траектории, если известно значение потенциальной энергии тела в этой точке?
4. Какую работу над окружающими телами совершит материальная точка массой  $m$ , движущаяся со скоростью  $v$  в некоторой системе отсчета, если она остановится в этой системе отсчета?
5. При каких условиях сохраняется механическая энергия системы?
6. Первоначально покоившееся на горке тело массой  $m$  очень медленно сползает с высоты  $h$  на горизонтальную поверхность. Определите работу, которую должна совершить внешняя сила, чтобы медленно втащить тело на горку на прежнее место.

## 4. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Вращательным движением** абсолютно твердого тела называется такое, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

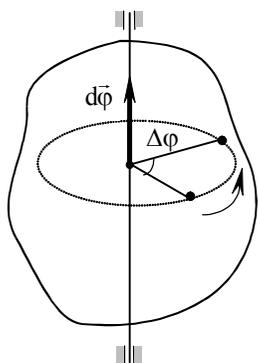


Рис. 4.1

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 4.1). За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  все точки тела повернутся на бесконечно малый угол  $d\varphi$ . Будем считать **угол поворота** вектором, который направлен по оси вращения тела в сторону, определяемую правилом правого винта (правилом буравчика). Согласно этому правилу, если правый винт вращать по направлению враще-

ния твердого тела вокруг оси, совпадающей с осью вращения тела, то направление поступательного движения винта дает направление вектора угла поворота тела  $d\vec{\varphi}$ .

Рассмотрим поворот тела на малый угол  $d\vec{\varphi}$  за время  $dt$ . **Угловой скоростью тела** называется производная угла поворота по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (4.1)$$

причем направление вектора  $\vec{\omega}$  совпадает с направлением вектора  $d\vec{\varphi}$ , т.е. также определяется по правилу правого винта. Размерность угловой скорости  $[\omega] = \text{рад/с}$ . **Вращение называется равномерным, если модуль угловой скорости при вращении тела остается постоянным.** В этом случае  $\varphi = \omega t$ .

В качестве характеристик равномерного вращения используют такие: **период** ( $T$ ) – время, за которое тело совершает один оборот; **частота** ( $\nu$ ) – число оборотов за единицу времени. Между этими величинами существует очевидная связь:  $\nu = \frac{1}{T}$ .

При **неравномерном** вращении тела вводится **угловое ускорение** – производная угловой скорости по времени. Это – векторная величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости:  $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ .

Сравним угловые скорости  $\vec{\omega}_1$  в момент времени  $t$  и  $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + d\vec{\omega}$  в момент времени  $t+dt$ . Из рисунка 1.12 видно, что векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{\varepsilon}$  сонаправлены при ускоренном (рис. 4.2, а) и противоположны при замедленном вращении тела (рис. 4.2, б). Таким образом, направление вектора  $\vec{\varepsilon}$  определяется направлением вектора приращения угловой скорости  $d\vec{\omega}$ .

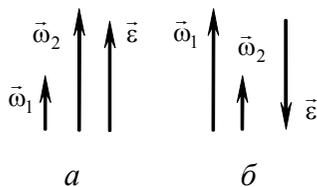


Рис. 4.2

Если модуль углового ускорения сохраняет постоянное значение, то **вращение** называется **равнопеременным**. В этом случае кинематический закон вращения запишем в виде

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t, \\ \vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon}t^2}{2}, \end{cases}$$

где  $\vec{\omega}_0$  и  $\vec{\varphi}_0$  – начальные угловая скорость и угол поворота.

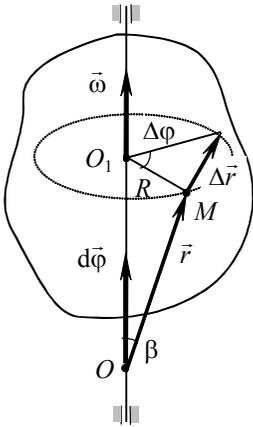


Рис. 4.3

Если твердое тело вращается относительно оси, то каждая точка тела имеет определенную линейную скорость  $\vec{v}$ . Найдем связь между  $\vec{v}$  и  $\vec{\omega}$ . Пусть твердое тело повернулось на угол  $d\vec{\varphi}$  (рис. 4.3). Тогда произвольная точка тела  $M$  совершила перемещение  $d\vec{r}$ . Напомним, что вектор  $d\vec{r}$  направлен по касательной к траектории точки  $M$  и при малом  $d\vec{\varphi}$  направление  $\Delta\vec{r}$  стремится к направлению  $d\vec{r}$ .

Выберем на оси вращения произвольную точку  $O$ , называемую **полюсом**, и поместим в нее начало координат. Положение точки  $M$  задается радиусом-вектором  $\vec{r}$ , который в общем случае составляет с осью вращения угол  $\beta$ . Отметим, что

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}. \quad (4.2)$$

Действительно, векторы  $d\vec{r}$ ,  $d\vec{\varphi}$  и  $\vec{r}$  подчиняются правилу правого винта. Найдем модуль векторного произведения:

$$dr = R d\varphi = r \sin \beta d\varphi,$$

где  $R$  – радиус окружности, по которой движется точка  $M$ .

Если продифференцировать по времени обе части равенства (4.2), то с учетом (1.3) и (4.1) можно получить

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (4.3)$$

Заметим, что выбор полюса  $O$  может быть произвольным (положение точки  $O$  никак не влияет на вывод формулы). Если в качестве полюса выбрать точку  $O_1$ , то из (4.3) следует, что

$$v = \omega R.$$

Последнее равенство связывает модули угловой и линейной скоростей точки твердого тела с радиусом окружности, по которой движется рассматриваемая точка.

Найдем ускорение точки  $M$ , для чего продифференцируем выражение (4.3) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (4.4)$$

Первое слагаемое в (4.4) – это вектор, направленный по касательной к траектории точки  $M$ , т.е. тангенциальное ускорение:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad (4.5)$$

его модуль  $a_\tau = \varepsilon r \sin \beta = \varepsilon R$ .

Второе слагаемое в (4.4) – это вектор, направленный к центру окружности, по которой движется точка  $M$ , т.е. нормальное ускорение:

$$\vec{a}_n = a_n \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad (4.6)$$

его модуль  $a_n = \omega v \sin \frac{\pi}{2} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$ .

Рассмотрим вращение материальной точки массой  $m$  вокруг некоторой оси по окружности радиусом  $R$  под действием силы  $\vec{F}$  (рис. 4.4). Положение точки определяется радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из произвольного полюса  $O$ , лежащего на оси вращения.

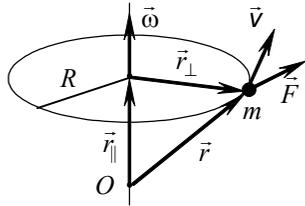


Рис. 4.4

Запишем для данной точки выражение второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.7)$$

Левую часть полученного выражения можно представить в виде

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, m\vec{v}].$$

**Векторное произведение радиуса-вектора материальной точки, проведенного из полюса, на импульс этой точки называется моментом импульса материальной точки относительно полюса:**

$$\vec{l}_O = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (4.8)$$

Таким образом, левая часть выражения (4.7) определяет скорость изменения момента импульса материальной точки относительно полюса.

Момент импульса материальной точки относительно полюса может быть представлен как сумма двух составляющих (параллельной  $\vec{l}_{O\parallel}$  и перпендикулярной  $\vec{l}_{O\perp}$  оси вращения):

$$\vec{l}_O = \vec{l}_{O\parallel} + \vec{l}_{O\perp} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega} - mr_{\parallel} \omega \vec{r}_{\perp}. \quad (4.9)$$

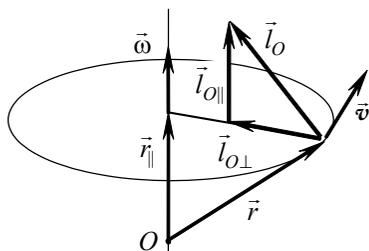


Рис. 4.5

Последнее равенство проиллюстрировано на рис. 4.5. Размерность момента импульса в СИ:  $[l_O] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ .

Вернемся к выражению (4.7) и рассмотрим его правую часть. **Векторное произведение радиуса-вектора точки, проведенного из полюса, на вектор**

**силы называется моментом силы относительно полюса, которое обозначается  $\vec{M}_O$ :**

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (4.10)$$

Модуль момента силы (рис. 4.6)

$M_O = rF \sin \alpha = Fh$ , где  $h = r \sin \alpha$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию действия силы — называется **плечом силы**. Рассмотрим основные свойства вектора  $\vec{M}_O$ .

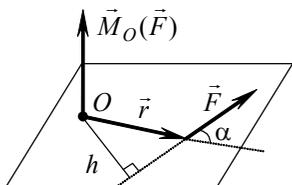


Рис. 4.6

1. Момент силы относительно полюса не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия, поскольку при этом не меняется плечо силы.

2. Момент равнодействующей нескольких сил равен сумме моментов каждой силы относительно полюса. Действительно, согласно свойству дистрибутивности векторного произведения

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r} \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i}.$$

Таким образом, выражение (4.7) может быть записано в виде

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O_i}, \quad (4.11)$$

т.е. скорость изменения момента импульса материальной точки равна суммарному моменту сил, действующих на нее. Соотношение (4.11) называется **основным уравнением динамики вращательного движения материальной точки или уравнением моментов**.

Составим для системы материальных точек основное уравнение динамики вращения вокруг общей оси. Запишем для каждой точки системы соотношение (4.8):

$$\frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt} = [\vec{r}_i, \vec{R}_i], \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\vec{L}_{O_i}$  – момент импульса  $i$ -й точки;  $\vec{r}_i$  – ее радиус-вектор;  $\vec{R}_i$  – равнодействующая всех сил на  $i$ -ю точку;  $N$  – число точек системы.

Просуммируем все составленные уравнения. Тогда левая часть полученной суммы будет выражена в виде

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

**Моментом импульса системы точек относительно полюса** называется векторная сумма моментов импульсов каждой материальной точки системы относительно этого полюса:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (4.12)$$

Тогда

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{R}_i]. \quad (4.13)$$

Равнодействующая всех сил, действующих на  $i$ -ю точку системы, определяется векторной суммой внешних  $\vec{F}_i$  и внутренних  $\vec{f}_{ik}$  сил:

$$\vec{R}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik}.$$

Поэтому (4.10) перепишем в виде

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_{i=1}^N \left[ \vec{r}_i, \sum_{k=1}^N \vec{f}_{ik} \right].$$

Второе слагаемое в последнем уравнении определяет суммарный момент внутренних сил системы, который, исходя из третьего закона Ньютона, равен нулю.

Таким образом, получили следующее выражение:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = \vec{M}_{O \text{ внеш}}. \quad (4.14)$$

Данное уравнение называется **основным уравнением динамики вращательного движения системы материальных точек** или **уравнением моментов**: скорость изменения момента импульса системы материальных точек равна суммарному моменту внешних сил, действующих на нее.

Из выражения (4.14) следует, что **если суммарный момент внешних сил, действующих на систему точек, равен нулю, то момент импульса такой системы остается постоянным**. Это – **закон сохранения момента импульса** системы материальных точек. Изменить момент импульса системы могут не внешние силы, а их момент. Вспомним, что отсутствие внешних сил, действующих на систему, приводит к постоянству ее импульса (2.10).

Рассмотрим вращение материальной точки вокруг оси  $OZ$  (рис. 4.5). Выбрав произвольный полюс на этой оси (точка  $O$ ), найдем вектор  $\vec{l}_O$  – момент импульса данной точки относительно этого полюса. **Моментом импульса точки относительно оси**

называется скалярная величина  $l_z$  – проекция на данную ось момента импульса точки относительно произвольного полюса, принадлежащего этой оси:

$$l_z = \text{Pr}_{Oz} \vec{l}_O. \quad (4.15)$$

Ранее (4.9) мы показали, что  $\vec{l}_{O1} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega}$ . Поэтому

$$l_z = mr_{\perp}^2 \omega_z. \quad (4.16)$$

Подставив это в (4.11), получим

$$\frac{dl_z}{dt} = mr_{\perp}^2 \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_{zi}. \quad (4.17)$$

Вспомним определение углового ускорения и перепишем (4.17) в виде:

$$mr_{\perp}^2 \varepsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{zi}, \text{ или } \varepsilon_z = \frac{\sum_{i=1}^N M_{zi}}{mr_{\perp}^2}.$$

Проекция углового ускорения материальной точки на ось вращения пропорциональна проекции на эту ось суммы моментов сил, действующих на точку. Коэффициентом пропорциональности в этом соотношении выступает величина  $mr_{\perp}^2$ . **Произведение массы материальной точки на квадрат расстояния точки до оси вращения называется моментом инерции материальной точки относительно оси:**

$$I_z = mr_{\perp}^2, \quad (4.18)$$

где индекс “z” указывает на выбранную ось. Момент инерции – скалярная величина, его размерность в СИ  $[I_z] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Теперь можно записать (4.17) в виде

$$I_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{zi}. \quad (4.19)$$

Это иная форма записи **основного уравнения динамики вращательного движения** материальной точки (4.11) в скалярном виде. Из этого соотношения следует физический смысл момента инерции. Момент инерции – **мера инертности материальной точки во вращательном движении**, он определяет момент сил, который должен быть приложен к телу для придания ему

определенного углового ускорения. Вспомним, что при рассмотрении поступательного движения мерой инертности тела выступает масса тела.

Введение понятия момента инерции позволяет (4.16) записать таким образом:  $l_z = I_z \omega_z$ . Сопоставив это выражение с определением импульса материальной точки, можно также рассмотреть аналогию понятий: импульс – момент импульса, масса – момент инерции, скорость – угловая скорость.

Поскольку твердое тело представляет собой совокупность материальных точек, то при его вращении вокруг какой-либо оси для каждой точки тела можно записать:

$$l_{zi} = dm_i r_{\perp i}^2 \omega_z,$$

где  $dm_i$  – масса материальной точки, на которые разбивается твердое тело. Здесь учтено, что при вращении твердого тела угловые скорости всех его точек одинаковы. Тогда, просуммировав (проинтегрировав) эти выражения по всему телу, получим

$$L_z = \int_{\text{по массе тела}} dL_z = \left( \int_{(M)} r_{\perp}^2 dm \right) \omega_z = I_z \omega_z,$$

где  $r_{\perp}$  – расстояние от элемента массы  $dm$  до оси вращения. Отсюда следует, что **момент инерции твердого тела** – это сумма моментов инерции отдельных материальных точек, его составляющих, вычисляемая по формуле

$$I_z = \int_{(M)} r_{\perp}^2 dm. \quad (4.20)$$

Таким образом, момент инерции обладает свойством аддитивности: момент инерции системы точек равен сумме моментов инерции каждой точки в отдельности. Кроме того, из (4.20) видно, что значение момента инерции для системы точек (и твердого тела в том числе) зависит от выбора оси вращения системы, т.е. от ее места расположения и ориентации в пространстве.

Для примера определим моменты инерции однородного длинного тонкого цилиндра при его вращении относительно разных осей. Рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси вращения, проходящие через центр масс цилиндра массой  $M$  радиусом  $R$  и высотой  $L$  (рис. 4.7), причем  $L \gg R$ .

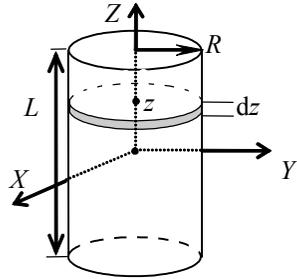


Рис. 4.7

При повороте цилиндра вокруг осей  $X$  и  $Y$  моменты инерции получатся одинаковыми, поскольку такие вращательные движения ничем не отличаются друг от друга. Для того, чтобы воспользоваться формулой (4.17), разобьем цилиндр на точечные элементарные массы  $dm$  – одинаковые тонкие диски, параллельные основаниям цилиндра. Толщина дисков составит  $dz$ , а удаление диска от оси вращения  $z$ . Обозначив плотность цилиндра через  $\rho$ , определим массу такого тонкого диска:  $dm = \rho\pi R^2 dz$ . При подобном разбиении  $r_{\perp} = z$ . Тогда

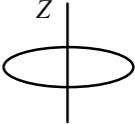
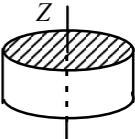
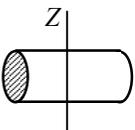
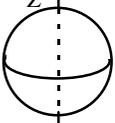
$$I_x = I_y = \int z^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z^2 \rho\pi R^2 dz = \rho\pi R^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} z^2 dz = \frac{1}{12} \rho\pi R^2 L^3.$$

Поскольку масса цилиндра  $M = \rho\pi R^2 L$ , то  $I_x = I_y = \frac{1}{12} ML^2$ .

Как видно, радиус цилиндра при его вращении вокруг этих осей не влияет на величину момента инерции, поэтому данная формула справедлива и для определения момента инерции тонкого стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню.

Запишем в виде таблицы выражения, полученные для расчета моментов инерции различных тел, обладающих осью симметрии (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Тело	Расположение оси вращения $Z$	Параметры тела	Момент инерции
Кольцо		Масса $M$ , радиус $R$	$I_z = MR^2$
Диск, цилиндр		Масса $M$ , радиус $R$	$I_z = \frac{1}{2}MR^2$
Стержень		Масса $M$ , длина $L$	$I_z = \frac{1}{12}ML^2$
Шар		Масса $M$ , радиус $R$	$I_z = \frac{2}{5}MR^2$

Поскольку расположение оси вращения относительно тела может быть в общем случае произвольным, то моментов инерции у твердого тела может быть бесконечно много (в то время как масса – только одна). Нельзя ли воспользоваться полученными результатами и связать момент инерции тела относительно произвольной оси с моментом инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс? Ответ на этот вопрос дает **теорема Гюйгенса – Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями.**

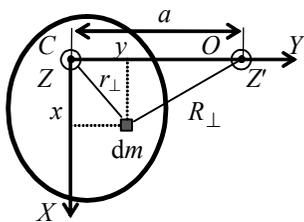


Рис. 4.8

Рассмотрим твердое тело, способное вращаться вокруг оси  $Z$ , проходящей через точку  $C$  – центр масс тела (рис. 4.8). Допустим, что известен  $I_{zC}$  – момент инерции тела относительно этой оси. Если мы хотим определить  $I_{z'}$  – момент инерции тела при его вращении вокруг оси  $Z'$ , проходящей через точку  $O$  параллельно оси  $Z$  на расстоянии  $a$  от нее, то с целью его определения разобьем тело на элементарные точечные массы  $dm$ . Положение такой элементарной массы в изображенной на рис. 4.8 системе координат задается координатами  $x$  и  $y$ . Тогда, в соответствии с (4.20),

$$\begin{aligned}
 I_{z'} &= \int_M R_{\perp}^2 dm = \int_M [x^2 + (a - y)^2] dm = \\
 &= \int_M [x^2 + y^2] dm + \int_M a^2 dm - 2 \int_M ay dm.
 \end{aligned}$$

Вспомнив определение центра масс системы материальных точек (2.12), нетрудно увидеть, что последнее слагаемое полученного выражения связано с координатой центра масс  $y_C$ , которая в нашем случае равна нулю. А значит, последнее слагаемое обращается в нуль. Тогда

$$I_{z'} = \int_M r_{\perp}^2 dm + a^2 \int_M dm - 2a \int_M y dm = I_{zC} + a^2 M.$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера:  $I_{z'} = I_{zC} + Ma^2$  – доказана.

**Рассмотрим задачу о вращении тела.** Пусть на массивный блок, выполненный в виде диска радиусом  $R$  и массой  $M$  и закрепленный на оси, намотана нерастяжимая невесомая нить, к концу которой привязан груз массой  $m$  (рис. 4.9). Как определить ускорение груза при его движении вниз?

Расставим силы, действующие на тела этой системы. На груз действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила натяжения нити  $\vec{T}$ . На блок действуют сила тяжести  $M\vec{g}$ , сила реакции  $\vec{N}$  и сила натя-

жения нити  $\vec{T}$ . Уравнение второго закона Ньютона для поступательного движения груза записывается в виде:  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ . Блок не совершает поступательного движения, а вращается вокруг оси.

Укажем на рис. 4.9, что направление оси  $Z$  – это направление вдоль оси диска «на нас». Тогда из всех сил, действующих на блок момент относительно этой оси создает только сила  $\vec{T}$ :  $M_T = TR$ . Поскольку другие силы проходят через ось вращения, то их плечи равны нулю. Заметим также, что вектор момента силы натяжения направлен «на нас» (предлагаем доказать это вам самостоятельно, используя определение векторного произведения). Кроме того, при ускоренном вращении блока в направлении против часовой стрелки, вектор его углового ускорения  $\vec{\epsilon}$  также направлен «на нас». Таким образом, проекции векторов  $\vec{M}_T$  и  $\vec{\epsilon}$  на направление выбранной оси  $Z$  положительны.

Основное уравнение динамики вращения для блока запишется следующим образом:  $M_{Tz} = I_z \epsilon_z$ . Чтобы учесть связь линейного ускорения движения груза и углового ускорения вращения блока, воспользуемся соотношением (4.5):  $\vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$ . В результате таких рассуждений получаем систему уравнений в векторном и скалярном виде:

$$\begin{cases} m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}, \\ M_{Tz} = I_z \epsilon_z, \\ \vec{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \vec{r}, \end{cases} \quad \begin{cases} ma = mg - T, \\ TR = \frac{1}{2} MR^2 \epsilon, \\ a = \epsilon R. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем  $T = \frac{1}{2} MR\epsilon$ , а с учетом третьего уравнения системы  $T = \frac{1}{2} Ma$ . Подставляя это

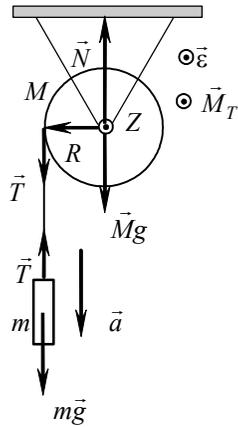


Рис. 4.9

выражение в первое уравнение системы, находим

$ma = mg - \frac{1}{2}Ma$ . Из этого уравнения находим ускорение груза:

$$a = \frac{2m}{2m + M}g.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Как связаны кинематические характеристики вращательного движения твердого тела со скоростями и ускорениями точек этого тела?

2. Как связаны между собой момент импульса системы тел относительно полюса и момент относительно того же полюса всех сил, действующих на систему?

3. При каких условиях момент импульса системы тел относительно оси не меняется?

4. От чего зависит момент инерции твердого тела, и какую роль он играет при вращении тела?

5. Сколько моментов инерции может быть у твердого тела? Почему?

6. Определите момент инерции тонкой сферической оболочки массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно оси симметрии.

7. Определите момент инерции диска массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно его диаметра.

## 5. РАБОТА ПО ВРАЩЕНИЮ ТЕЛА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим вращение тела вокруг оси, проходящей через центр масс, и определим кинетическую энергию тела. Поскольку центр масс при таком движении тела не совершает поступательного движения, то кинетическая энергия вращения относительно центра масс, может быть определена как:

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \int_M v^2 dm = \frac{1}{2} \int_M \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \int_M (\vec{v} \vec{v}) dm,$$

где  $\vec{v}$  – линейная скорость материальной точки  $dm$  при ее вращении вокруг центра масс. Если вращение совершается по окружности радиуса  $r$  с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , то, согласно (4.3)  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Тогда

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \int_M (\vec{v}, [\vec{\omega}, \vec{r}]) dm.$$

Используя свойство смешанного произведения векторов, получаем

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, [\vec{r}, \vec{v}]) dm = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, [\vec{r}, dm\vec{v}]) = \frac{1}{2} \int_M (\vec{\omega}, d\vec{L}).$$

Поскольку при вращении тела угловые скорости всех его материальных точек одинаковы, то

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \int_M d\vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} = \frac{1}{2} \omega_z L_z.$$

Так как  $L_z = I_z \omega_z$ , то

$$W_{\text{к}}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (5.1)$$

Таким образом, кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр масс, равна половине произведения момента инерции тела относительно этой оси на квадрат угловой скорости вращения вокруг этой оси.

Попробуем получить этот результат иначе, исходя из теоремы об изменении кинетической энергии. Разобьем тело на элементарные массы, каждая из которых при вращении имеет скорость  $\vec{v}_i$  и совершает за время  $dt$  перемещение  $d\vec{l}_i$ . Тогда элементарная работа равнодействующей силы по перемещению  $i$ -й точки будет  $\delta A_i = (\vec{R}_i, d\vec{l}_i) = (\vec{R}_i, \vec{v}_i dt)$ . Поскольку равнодействующая всех сил определяется векторной суммой внешних и всех внутренних сил, действующих на  $i$ -ю точку, то

$$\delta A_i = ((\vec{F}_i + \sum_k \vec{f}_{ik}), \vec{v}_i dt) = (\vec{F}_i, \vec{v}_i dt) + (\sum_k \vec{f}_{ik}, \vec{v}_i dt).$$

Поскольку  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ , то  $\delta A_i = (\vec{F}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i] dt) +$   
 $+(\sum_k \vec{f}_{ik}, [\vec{\omega}, \vec{r}_i] dt)$ , или

$$\delta A_i = (\vec{\omega}, [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt) + \left( \vec{\omega}, \left[ \vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt \right), \quad (5.2)$$

что следует из свойства смешанного произведения векторов.

Просуммируем последнее выражение по всем точкам тела. Вычислим сумму всех первых слагаемых (5.2):

$$\sum_i (\vec{\omega}, [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt) = \vec{\omega} \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] dt = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внеш}} dt.$$

Сумму всех вторых слагаемых (5.2) можно вычислить так:

$$\sum_i \left( \vec{\omega}, \left[ \vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt \right) = \vec{\omega} \sum_i \left[ \vec{r}_i, \sum_k \vec{f}_{ik} \right] dt = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внутр}} dt = 0,$$

поскольку суммарный момент внутренних сил системы материальных точек равен нулю. Тогда

$$\delta A = \vec{\omega} \vec{M}_{\text{внеш}} dt = \vec{M}_{\text{внеш}} \vec{\omega} dt = \vec{M}_{\text{внеш}} d\vec{\varphi},$$

где  $d\vec{\varphi}$  – угловое перемещение тела за время  $dt$ .

Элементарная работа по вращению тела вокруг оси  $Z$ :

$$\delta A = M_{\text{внеш}} d\varphi = I_z \varepsilon_z \omega dt = I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I_z \omega d\omega.$$

Проинтегрировав полученное выражение, можно найти полную работу

$$A = \int_1^2 dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I_z \omega d\omega = I_z \left( \frac{\omega_2^2}{2} - \frac{\omega_1^2}{2} \right).$$

По теореме об изменении кинетической энергии  $A = \Delta W_k = W_{k2} - W_{k1}$ , поэтому кинетическая энергия вращательного движения

$$W_k = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2. \quad (5.3)$$

Рассмотрим кинематику и динамику частного случая плоского движения, а именно качение. **Плоским** называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в параллельных плоскостях. Примером плоского движения явля-

ется качение симметричного тела (цилиндра, шара, диска) по плоскости. Пусть качение происходит без проскальзывания. В этом случае скорость точек катящегося тела, соприкасающихся с плоскостью, равна нулю ( $\vec{v}_A = 0$ ). Как уже говорилось, любое движение твердого тела можно представить как совокупность двух движений: поступательного и вращательного. Например, качение цилиндра (рис. 5.1, *a*) можно представить как сумму поступательного движения его со скоростью, равной скорости центра масс  $C$  (рис. 5.1, *б*), и одновременного вращения относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через центр масс (рис. 5.1, *в*).

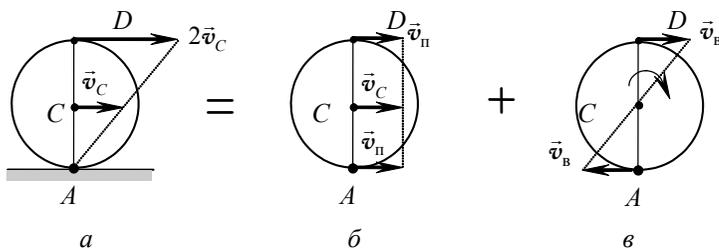


Рис. 5.1

Скорость любой точки катящегося цилиндра можно представить в виде  $\vec{v} = \vec{v}_\pi + \vec{v}_B$ . Здесь  $\vec{v}_\pi$  – скорость поступательного движения, которая одинакова для любой точки и равна скорости центра масс  $\vec{v}_C$ , а  $\vec{v}_B$  – скорость вращательного движения относительно оси  $Z$ , направленной на рис. 5.1, *в* «от нас» и проходящей через точку  $C$ . Так как  $\vec{v}_A = 0$ , а векторы  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_\pi$  в точке  $A$  противоположны, то модули этих векторов одинаковы:  $v_B = v_\pi$ . В точке  $D$  векторы  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}_\pi$  сонаправлены, поэтому  $v_D = 2v_\pi$ .

Найдем кинетическую энергию катящегося цилиндра. Для этого разобьем цилиндр на множество элементарных масс и найдем кинетическую энергию каждой элементарной массы. Поскольку скорость любой  $i$ -й элементарной массы  $\vec{v}_i = \vec{v}_{\pi i} + \vec{v}_{B i}$ , то

$$W_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{\pi i} + \vec{v}_{B i})^2 = \frac{1}{2} m_i (v_{\pi i}^2 + v_{B i}^2 + 2\vec{v}_{\pi i} \cdot \vec{v}_{B i}).$$

Для определения кинетической энергии катящегося цилиндра необходимо сложить кинетические энергии всех элементарных масс, поэтому

$$W_k = \sum_i W_{ki} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{\Pi i}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{B i}^2 + \sum_i m_i \vec{v}_{\Pi i} \vec{v}_{B i}. \quad (5.4)$$

Поскольку скорость поступательного движения всех точек одинакова и равна скорости центра масс, то

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{\Pi i}^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{\Pi}^2 = v_{\Pi}^2 \sum_i \frac{1}{2} m_i = \frac{1}{2} m v_{\Pi}^2.$$

Согласно (5.3), второе слагаемое (5.4) вычислим так:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{B i}^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

где  $I_z$  – момент инерции цилиндра относительно оси вращения  $Z$ .

Наконец, третье слагаемое (4.23) преобразуется к виду

$$\sum_i m_i \vec{v}_{\Pi i} \vec{v}_{B i} = \sum_i m_i v_{\Pi} v_{B i} \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{v}_{\Pi i}$  и  $\vec{v}_{B i}$ .

Для любой элементарной массы  $m_i$  всегда найдется симметрично расположенная масса  $m_k$ , такая, что  $\cos \beta = -\cos \alpha$  (рис. 5.2). Следовательно, при суммировании третье слагаемое (5.4) обращается в нуль. Таким образом,

$$W_k = \frac{1}{2} m v_{\Pi}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (5.5)$$

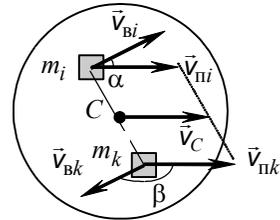


Рис. 5.2

т.е. кинетическая энергия катящегося тела складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и кинетической энергии вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс. Можно показать, что данное утверждение справедливо не только для качения, но и для любого плоского движения.

Определим, как изменяется кинетическая энергия тела при переходе из одной системы координат в другую. Поскольку ранее уже были показаны особые свойства центра масс, то свяжем одну из систем отсчета с центром масс  $C$  (рис. 5.3) и рассмотрим кинетическую энергию материальной точки массой  $dm$  в системе от-

счета  $(X, Y, Z)$ . Скорость точки в этой системе отсчета определена как  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки. Положение центра масс в этой системе определяется радиусом-вектором  $\vec{r}_C$ , а положение точки относительно центра масс – радиусом-вектором  $\vec{r}_1$ . Поскольку  $\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}_1$ , то  $\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_1$ , где  $\vec{v}_C$  – скорость центра масс в системе  $(X, Y, Z)$ , а  $\vec{v}_1$  – скорость материальной точки относительно центра масс. Тогда кинетическая энергия точки в системе  $(X, Y, Z)$  вычислится следующим образом:

$$dW_k = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} (\vec{v}_C + \vec{v}_1)^2 dm.$$

Определим кинетическую энергию тела массой  $M$ , состоящего из совокупности материальных точек:

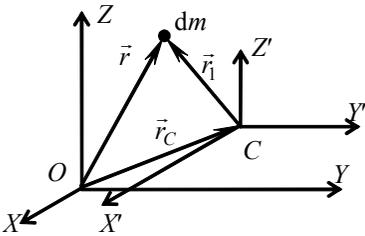


Рис. 5.3

$$\begin{aligned} W_k &= \int_M \frac{1}{2} (\vec{v}_C + \vec{v}_1)^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M (\vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_C \vec{v}_1 + \vec{v}_C^2) dm. \end{aligned}$$

Вспомним, что, в произвольной системе координат скорость центра масс равна  $\vec{v}_{C1} = \frac{1}{M} \int_M \vec{v}_1 dm$ . Тогда

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_M 2\vec{v}_C \vec{v}_1 dm + \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_C^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M \vec{v}_1^2 dm + \vec{v}_C \int_M \vec{v}_1 dm + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_M v_1^2 dm + \vec{v}_C M \vec{v}_{C1} + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm, \end{aligned}$$

где  $\vec{v}_{C1}$  – скорость центра масс относительно центра масс, очевидно равная нулю. Поэтому

$$W_k = \frac{1}{2} \int_M v_1^2 dm + \frac{1}{2} \int_M v_C^2 dm = W_{\text{котн}} + W_{\text{кцм}}. \quad (5.6)$$

Кинетическая энергия системы материальных точек есть сумма кинетической энергии ее движения относительно центра масс и кинетической энергии, которой обладала бы она, двигаясь поступательно со скоростью центра масс. Это выражение получило название **теоремы Ф. Кенига**.

Учитывая последнее утверждение, в случае сложного движения, полная механическая энергия будет описываться выражением:

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{к отн}} + W_{\text{к цм}} + W_{\text{п}}. \quad (5.7)$$

Поэтому, применяя закон сохранения механической энергии (или теорему об изменении механической энергии) к сложному движению, необходимо использовать именно это выражение.

Любое плоское движение твердого тела описывается двумя векторными уравнениями (2.2) и (4.14), которые объединим в систему

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = \sum_i \vec{F}_i, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{F_i}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Система векторных уравнений (5.8) в проекциях на оси трехмерной системы координат эквивалентна шести скалярным уравнениям, поэтому говорят, что твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Рассмотрим скатывание цилиндра массой  $m$  и радиусом  $r$  без проскальзывания с наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом (рис. 5.4). На такой цилиндр действуют силы: тяжести  $m\vec{g}$ , нормальной реакции опоры  $\vec{N}$ , трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Под действием этих сил центр масс цилиндра движется вниз по наклонной плоскости с ускорением  $\vec{a}_C$ , а сам цилиндр вращается вокруг оси  $Z$ , проходящей через центр масс с угловым ускорением  $\vec{\epsilon}$ . Направления векторов  $\vec{a}_C$ ,  $\vec{\epsilon}$  и оси  $Z$  указаны на рис. 5.4. Вращение цилиндра обеспечивается дей-

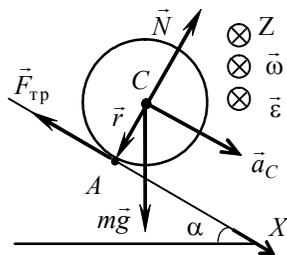


Рис. 5.4

ствлением трения. Вращение цилиндра обеспечивается дей-

ствием момента силы  $\vec{F}_{\text{тр}}$  относительно оси  $Z$ , так как моменты сил  $m\vec{g}$  и  $\vec{N}$  относительно этой оси равны нулю (силы проходят через центр масс). Уравнения системы (5.8) выглядят так:

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}, \\ \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_{F_{\text{тр}}C}. \end{cases}$$

Эти уравнения записываются в проекциях на оси  $X$  и  $Z$  следующим образом:

$$\begin{cases} ma_C = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \\ I_z \varepsilon_z = F_{\text{тр}} r. \end{cases}$$

Воспользовавшись связью линейного и углового ускорений (4.5), имеем:  $a_C = \varepsilon r$ . Момент инерции цилиндра относительно оси  $Z$   $I_z = \frac{1}{2}mr^2$ . Совместно решая составленные уравнения, можно определить ускорение центра масс цилиндра при его скатывании:  $a = 2g \sin \alpha / 3$ .

**Рассмотрим решение задачи.** Цилиндр скатывается без начальной скорости с наклонной плоскости высотой  $h$ . Найти скорость центра масс цилиндра внизу наклонной плоскости. Качение происходит без проскальзывания.

Поскольку качение происходит без проскальзывания, то работа непотенциальных сил равна нулю (в том числе работа силы трения покоя), а значит можно воспользоваться законом сохранения механической энергии.

Пусть потенциальная энергия цилиндра в конечном положении  $W_{\text{п2}} = 0$ .

Тогда механическая энергия в начальном и конечном состояниях будут определяться выражениями:

$$W_{\text{мех1}} = mgh, \quad W_{\text{мех2}} = W_{\text{квр}} + W_{\text{кпост}} = \frac{1}{2}I_z\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2.$$

Учитывая, что момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс  $I_z = \frac{1}{2}mr^2$ , а также, что при качении без проскальзывания  $v_C = \omega r$ , приравнивая начальную и конечную механические энергии, получаем

$$v_C = \sqrt{4gh/3}.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Чему равна работа сил при повороте тела на угол  $\varphi$ ?
2. Чему равна кинетическая энергия катящегося без проскальзывания обруча массой  $m$  и радиусом  $r$  со скоростью центра масс  $v$ ?
3. Что понимают под качением без проскальзывания?
4. Какое движение называется плоским?
5. Чему равна работа силы трения при качении без проскальзывания? Почему?
6. Определите высоту, на которую закатится по наклонной плоскости шар, если начальная скорость его центра масс  $v$  и он катится без проскальзывания.

## 6. СОБСТВЕННЫЕ СВОБОДНЫЕ И ЗАТУХАЮЩИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Колебаниями** называются процессы (движения или изменения состояния), в той или иной степени повторяющиеся во времени. В зависимости от природы колебательного процесса и «механизма» его возбуждения различают: **механические колебания** (колебания маятников, струн, частей машин, мостов и других сооружений, давления воздуха при распространении в нем звука и т.п.); **электромагнитные колебания** (колебания переменного электрического тока в цепи, колебания векторов напряженности электрического и магнитного поля); **электромеханические колебания** (колебания мембраны телефона) и пр. Система, совершающая колебания, называется **колебательной системой**.

**Свободными (собственными)** колебаниями называются колебания, происходящие в отсутствие переменных внешних воздействий на колебательную систему и возникающие вследствие начального отклонения системы от положения устойчивого равновесия. **Вынужденными колебаниями** называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Колебания называются **периодическими**, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени  $T$ , удовлетворяющий этому условию, называется **периодом колебаний**.

**Частотой** периодических колебаний называется величина  $\nu = \frac{1}{T}$ , равная числу колебаний, совершающихся за единицу времени. Циклической (круговой) частотой колебаний называется величина  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ , равная числу полных колебаний, совершающихся за  $2\pi$  единиц времени.

Пусть отклонение колебательной системы от положения равновесия характеризует величина  $s$ . Периодические колебания величины  $s(t)$  называются **гармоническими колебаниями**, если  $s(t)$  меняется по гармоническому закону

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.1)$$

где  $A$  – **амплитуда** колебаний (максимальное значение колеблющейся величины).

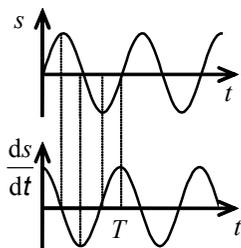


Рис. 6.1

Значение  $s$  в произвольный момент времени определяется значением **фазы** колебаний  $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$ ;  $\varphi_0$  – начальная фаза, т.е. значение  $\Phi(t)$  в момент времени  $t = 0$ .

Из (6.1) видно, что первая и вторая производные  $s(t)$  по времени также совершают гармонические колебания той же частоты:

$$\frac{ds}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi), \end{aligned} \quad (6.2)$$

причем амплитуды  $\frac{ds}{dt}$  и  $\frac{d^2s}{dt^2}$  соответственно равны  $A\omega$  и  $A\omega^2$ .

Видно, что  $\frac{ds}{dt}$  опережает  $s$  по времени на  $\frac{T}{4}$ , а по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ ;

$\frac{d^2s}{dt^2}$  опережает  $s(t)$  по времени на  $\frac{T}{2}$ , а по фазе на  $\pi$ . Графики  $s(t)$

и  $\frac{ds}{dt}$  при  $\varphi_0 = 0$  приведены на рис. 6.1. Из (6.2) следует, что гар-

монически колеблющаяся величина  $s$  удовлетворяет дифференциальному уравнению 2

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0, \quad (6.3)$$

которое называется **дифференциальным уравнением гармонических колебаний**.

Гармонические колебания параметра  $s(t)$ , которые описываются уравнением  $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , можно изобразить графически с помощью вращающегося на плоскости вектора (рис. 6.2).

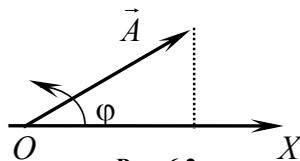


Рис. 6.2

Для этого из начала координат на плоскости проводят вектор  $\vec{A}$ , модуль которого равен амплитуде колебаний. Вектор  $\vec{A}$  составляет с осью  $OX$  угол  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , равный фазе колебаний в данный момент времени  $t$ . С течением времени угол увеличивается так, что вектор вращается вокруг центра координат с угловой скоростью, равной циклической частоте гармонических колебаний. Проекция вектора на ось  $OX$  совершает гармонические колебания по закону  $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Графическое изображение гармонических

колебаний с помощью вращающегося вектора амплитуды называется **методом векторных диаграмм**. Им широко пользуются, например, при сложении одинаково направленных гармонических колебаний.

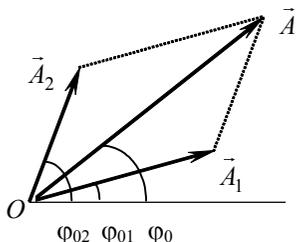


Рис. 6.3

Рассмотрим сложение двух колебаний, одно из которых совершается по закону  $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$ , а другое по закону  $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$ . В результате сложения этих колебаний получается тоже гармоническое колебание вида  $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Это нетрудно доказать с помощью метода векторных диаграмм (рис. 6.3). Если каждому из данных колебаний поставить в соответствие вращающийся вектор, то результирующее колебание определится вращением суммы векторов. Из рисунка 6.3 видно, что амплитуда результирующего колебания находится по теореме косинусов следующим образом:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \quad (6.4)$$

Начальную фазу результирующего колебания можно определить из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Сумма двух векторов, вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями, будет вращаться с той же угловой скоростью. Таким образом, мы доказали, что в результате сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты, происходящих в одном направлении, получается гармоническое колебание той же частоты, причем его амплитуда удовлетворяет условию  $A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2$ .

Получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний из уравнений, описывающих колебательный процесс. Рассмотрим колебания **пружинного маятника** – груза массой  $m$ , подвешенного на идеальной невесомой пружине жесткостью  $k$  (рис. 6.4).

На такой груз действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила упругости растянутой пружины  $\vec{F}_{\text{упр}}$ . В положении равновесия модули этих сил одинаковы:  $mg = F_{\text{упр}}$ .

Если обозначить через  $\Delta l$  статическое растяжение пружины от недеформированного состояния, то, согласно закону Гука, в положении равновесия  $F_{\text{упр}} = k\Delta l = mg$ . При выведении груза из положения равновесия модуль силы упругости изменяется с

учетом деформации пружины. Растянем пружину вниз на  $x$ , тогда  $F_{\text{упр}} = k(\Delta l + x)$ . Если пренебречь действием сопротивления воздуха, то при отпускании груза он начнет совершать гармонические колебания. Докажем это. Уравнение второго закона Ньютона в проекции вертикальную ось для движущегося груза можно записать следующим образом:

$$ma = mg - F_{\text{упр}} = mg - k(\Delta l + x) = mg - k\Delta l - kx = -kx.$$

Поскольку  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , то из этого уравнения получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (6.5)$$

Если рассматривать смещение груза от положения равновесия в качестве параметра колебаний, то уравнение (6.5) совпадает с дифференциальным уравнением (6.3), т.е. является уравнением собственных колебаний пружинного маятника. Частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.6)$$

В отсутствие трения пружинный маятник колеблется по гармоническому закону с периодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

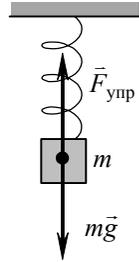


Рис. 6.4

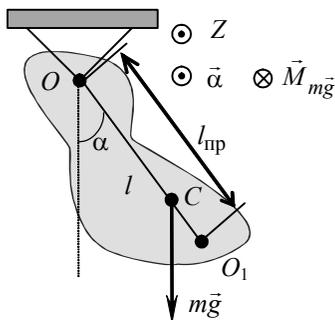


Рис. 6.5

Рассмотрим теперь **физический маятник** – твердое тело, которое совершает колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной оси, не проходящей через центр тяжести тела и называемой осью качания маятника (рис. 6.5). Центр тяжести маятника совпадает с его центром масс  $C$ . Точка  $O$  пересечения оси качания маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр тяжести маятника, называется **точкой подвеса маятника**.

Если пренебречь силами трения в подвесе маятника и силой трения о воздух, то момент относительно оси качания создает только сила тяжести  $m\vec{g}$ . При отклонении маятника на угол  $\alpha$  от положения равновесия момент силы численно равен  $mgl \sin \alpha$ , где  $l$  – расстояние между центром масс и точкой подвеса. Этот момент возвращает маятник в положение равновесия, поэтому его направление противоположно угловому перемещению. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения для физического маятника имеет вид:

$$I_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha,$$

где  $I_z$  – момент инерции маятника относительно оси качания.

Рассматривая малые колебания тела, при которых  $\sin \alpha \approx \alpha$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I_z} \alpha = 0, \quad (6.7)$$

т.е. угол  $\alpha$  удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний (6.3). Следовательно, в отсутствие трения малые колебания физического маятника являются гармоническими, причем в уравнении колебаний в качестве параметра колебаний выступает угол отклонения маятника от положения равновесия.

Частота собственных колебаний физического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}, \quad (6.8)$$

период колебаний  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}$ .

Материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, называется **математическим маятником**. Математический маятник – частный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре масс, так что  $I_z = ml^2$ , поэтому для математического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6.9)$$

Если сопоставить (6.8) и (6.9), то видно, что математический маятник с длиной нити подвеса  $l_{\text{пр}} = \frac{I_z}{ml}$  имеет тот же период колебаний, что и физический маятник массы  $m$ , моментом инерции  $I_z$  и расстоянием между точкой подвеса и центром масс  $l$ . Длина математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и данный физический маятник, называется **приведенной длиной физического маятника**. Точка  $O_1$ , лежащая на прямой  $OC$  на расстоянии  $l_{\text{пр}}$  от точки подвеса маятника (рис. 6.5), называется **центром качаний маятника**. Центр качаний и точка подвеса обладают свойством взаимности: если маятник подвесить так, чтобы его ось качаний проходила через точку  $O_1$ , то точка  $O$  будет совпадать с новым центром качаний маятника, т.е. приведенная длина и период колебаний маятника останутся прежними.

Рассмотрим механические колебания пружинного маятника, совершающего свободные гармонические колебания, описываемые уравнением  $x(t) = A \cos(\omega t)$ . Полная механическая энергия такого маятника в произвольный момент времени является суммой потенциальной энергии сил упругой деформации пружины  $W_{\text{п}}$  и кинетической энергии груза  $W_{\text{к}}$ .

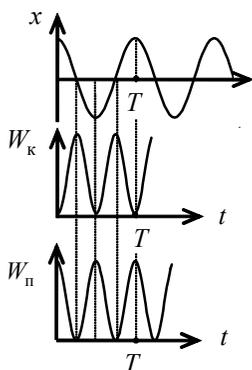


Рис. 6.6

Выразим **кинетическую энергию** груза на пружине:

$$\begin{aligned}
 W_k &= \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \\
 &= \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t).
 \end{aligned}$$

Найдем **потенциальную энергию** упругодеформированной пружины:

$$W_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t).$$

Графики зависимостей потенциальной и кинетической энергии гармонических колебаний от времени показаны на рис. 6.6. Следует отметить, что частота колебаний энергии  $\omega^* = 2\omega$ , а ее максимальное значение пропорционально квадрату амплитуды смещения материальной точки. Полная механическая энергия в случае свободных колебаний не изменяется:

$$W_{\text{мех}} = W_k + W_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \text{const},$$

поскольку в системе отсутствуют диссипативные силы.

Рассмотрим пружинный маятник, на который действует сила сопротивления, линейно зависящая от скорости  $F_{\text{тр}} = -\mu v = -\mu \frac{dx}{dt}$ . Векторное уравнение второго закона Ньютона в этом случае примет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{уп}} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Проецируя это уравнение на вертикальную ось

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x) - \mu \frac{dx}{dt},$$

получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0,$$

где  $\frac{\mu}{m} = 2\beta$  ( $\beta$  – **коэффициент затухания**);  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  ( $\omega_0$  – собственная частота свободных гармонических колебаний).

Дифференциальное уравнение **свободных затухающих колебаний линейной** системы в общем случае имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Если затухание невелико ( $\beta < \omega_0$ ), решением этого однородного линейного дифференциального уравнения является функция

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

т.е. затухающие колебания не являются периодическими, однако величина  $x(t)$  обращается в нуль, а также достигает максимальных и минимальных значений через равные промежутки времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad (6.10)$$

где  $T$  – период затухающих колебаний;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний.

Величина  $x(t) = A_0 e^{-\beta t}$  называется **амплитудой затухающих колебаний**;  $A_0$  – начальная амплитуда. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени тем быстрее, чем больше коэффициент затухания  $\beta$ .

Если сравнить амплитуды колебаний системы в моменты времени  $t$  и  $t + \tau$ , то можно получить, что

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = e^{\beta\tau}.$$

Если за промежуток времени  $\tau$  амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, то  $\beta = 1/\tau$ , т.е. **коэффициент затухания** – величина, обратная промежутку времени  $\tau$ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Также для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний вводится понятие **логарифмического декремента**  $\delta$ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Если за время  $NT$  система совершит  $N$  колебаний, и их амплитуда уменьшится в  $e$  раз, то  $\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$ . Таким образом, логарифмический декремент – безразмерная величина, обратная числу колебаний  $N$ , в течение которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

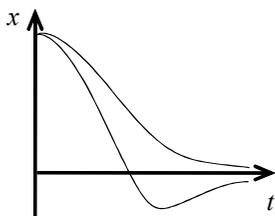


Рис. 6.7

Из выражения (6.10) следует, что при  $\omega_0^2 \leq \beta^2$  колебания в системе не возникают. В этом случае наблюдается **аperiодический процесс** (рис. 6.7), в результате которого вся запасенная в системе механическая энергия расходуется на работу против сил сопротивления. В зависимости от начальных условий аperiодический процесс может выглядеть по-разному (рис. 6.7).

**Рассмотрим пример решения задачи.** Пружинный маятник совершает гармонические колебания с собственной частотой  $\omega$ . Амплитуда колебаний равна  $A$ . Определите максимальную скорость груза.

Гармонические колебания описываются уравнением  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , если найти первую производную по времени  $\frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ , то, исходя из определения скорости, это

уравнение будет описывать закон изменения скорости при гармонических колебаниях. Множитель  $A\omega$  представляет собой амплитуду колебаний скорости, а значит максимальное значение скорости будет равно  $v_{\max} = A\omega$ .

## Контрольные вопросы и задания

1. От чего зависят амплитуда и начальная фаза гармонических колебаний?
2. Что определяет логарифмический декремент затухания?
3. Чему равны:
  - а) сила, действующая на пружинный маятник, совершающий гармонические колебания, при прохождении им положения равновесия;
  - б) скорость пружинного маятника в тот момент, когда его амплитуда максимальна?
4. Как влияет коэффициент затухания на условный период затухающих колебаний системы?
5. С каким сдвигом фаз меняются по времени кинетическая и потенциальная энергии математического маятника?

## 7. ВЫНУЖДЕННЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

**Вынужденными колебаниями** называются колебания, возникающие в какой-либо системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

**Вынуждающей силой** называется переменная внешняя сила, приложенная к системе и вызывающая ее вынужденные механические колебания. Пусть вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону  $F = F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Тогда дифференциальное **уравнение вынужденных колебаний** запишем следующим образом:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (7.1)$$

Общее решение этого неоднородного уравнения имеет вид

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\omega t). \quad (7.2)$$

В этом выражении первое слагаемое играет роль только на начальной стадии установления процесса колебаний. В дальнейшем этой составляющей решения можно пренебречь. Второе слагаемое (7.2) описывает установившиеся вынужденные колебания.

Подставим  $x(t) = A \cos(\omega t)$  в уравнение (7.1). Для этого найдем производные  $x(t)$  по времени:  $\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t) =$

$$= A\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \text{ и } \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t) = A\omega^2 \cos(\omega t + \pi).$$

Тогда получим

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \pi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 A \cos(\omega t) = f_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ . Используя метод векторных диаграмм, представим

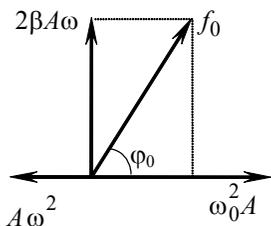


Рис. 7.1

левую часть последнего уравнения в виде суммы трех векторов (рис. 7.1), модули которых указаны на рисунке. Результат сложения этих трех векторов – вектор, модуль которого равен  $f_0$ . Из рисунка 7.1 следует, что сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и вынуждающей силой

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Используя теорему Пифагора, найдем амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (7.3)$$

Из (7.3) следует, что при  $\omega = 0$  амплитуда колебаний принимает значение  $A = \frac{f_0}{\omega_0^2}$ , и в системе происходит **статическое смещение** из положения равновесия под действием постоянной силы  $F_0$  (рис. 7.2).

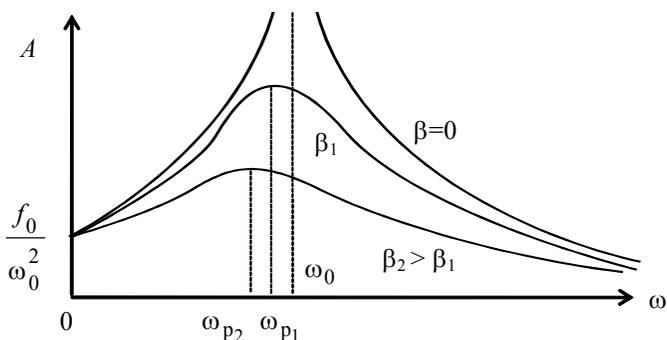


Рис. 7.2

При неограниченном возрастании частоты внешнего воздействия ( $\omega \rightarrow \infty$ ) амплитуда колебаний стремится к нулю,  $\operatorname{tg} \varphi_0 \rightarrow 0$  и  $\varphi_0 \rightarrow -\pi$ .

Дифференцируя выражение (7.3) по переменной  $\omega$ , и приравнявая полученную производную к нулю, можно определить такую частоту внешнего воздействия  $\omega = \omega_p$ , при которой амплитуда колебаний достигает максимума:  $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . **Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенной частоте внешнего воздействия называется резонансом.** График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы при различных коэффициентах затухания системы приведен на рис. 7.2. Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания. Чем меньше  $\beta$ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании ( $2\beta^2 > \omega_0^2$ ) выражение для резонансной частоты становится мнимым, при этих условиях резонанс не наблюдается – с увеличением частоты амплитуду вынужденных колебаний монотонно убывает. Из формулы (7.3) следует, что амплитуда при резонансе

$$A_{\max} = A(\omega_p) = \frac{F_0}{2m\beta\omega}.$$

Разделив амплитуду при резонансе на статическое смещение, получим величину, которая носит название добротность

$$Q = \frac{F_0 m \omega_0^2}{2m\beta \omega_0 F_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta}.$$

Добротность показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение системы из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуду вынуждающей силы.

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различных сооружений. Собственная частота колебаний этих устройств не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий, иначе может произойти разрушение конструкции. Вместе с тем явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике и т.д.

### Контрольные вопросы и задания

1. Когда в колебательной системе возникают вынужденные колебания?
2. Как резонансная частота зависит от коэффициента затухания?
3. Чему равна частота установившихся вынужденных колебаний?
4. Как зависит амплитуда вынужденных колебаний от коэффициента затухания?
5. На сколько отстают по фазе вынужденные колебания от вынуждающей силы при частоте равной собственной частоте колебательной системы?
6. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и объясните физический смысл его слагаемых.

## 8. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Принцип относительности Галилея утверждает эквивалентность всех инерциальных систем отсчета (ИСО) лишь для механических явлений. Поэтому этот принцип не может быть основой всей физической науки, так как выделяет механические явления как особые и, таким образом, не отражает материального единства различных физических явлений. Физическая теория, которая рассматривает пространственно-временные закономерности для любых физических процессов, называется **теорией относительности**. Она была создана А. Эйнштейном и в основном завершена к 1915 г. В основе этой теории лежит фундаментальный физический закон, согласно которому все законы физики (а не только законы механики) имеют одинаковую форму записи во всех ИСО. Теория относительности делится на две части: общую теорию относительности, изучающую неинерциальные системы отсчета и поля тяготения, и частную теорию относительности, изучающую инерциальные системы отсчета в отсутствии полей тяготения. В современной литературе частную теорию относительности называют специальной теорией относительности (СТО) или релятивистской механикой. Основные выводы именно этой теории мы рассмотрим в нашем курсе.

Наши понятия о пространстве и времени сформировались из повседневного опыта, в котором мы имели дело с макротелами при не слишком больших скоростях. Явления же, рассматриваемые СТО, протекают в лабораторных экспериментах, и у нас нет навыка и опыта в их описании.

### Инварианты преобразований Галилея

Объединив уравнения (1.13) и (1.15) в систему, можно получить преобразования Галилея при переходе от одной ИСО к другой:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t', \\ \mathbf{t} = \mathbf{t}', \\ \vec{a} = \vec{a}', \end{cases} \quad (8.1)$$

где  $\vec{v}$  – скорость одной ИСО относительно другой.

Зададимся вопросом: одинаково ли выполняются законы механики в этих ИСО? Для Галилея было очевидно, что  $m = m'$  (масса тела не меняется при переходе от одной ИСО к другой). Проверим справедливость основного закона механики, т.е. второго закона Ньютона. Пусть на тело в одной ИСО действует сила  $\vec{F}$ , а в другой – сила  $\vec{F}'$ . Все силы в механике делятся на потенциальные (т.е. функции относительного положения тел) и непотенциальные (они зависят от скорости движения тел относительно друг друга). Исходя из первого уравнения системы (8.1), можно записать:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}'_1 + \vec{v}t, \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}'_2 + \vec{v}t,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}', \quad (8.2)$$

т.е. относительные расстояния между точками в разных ИСО одинаковы, если они измеряются в один момент времени. Это означает, что потенциальные силы, действующие на тело в различных ИСО, будут одинаковыми. Продифференцировав (8.2) по времени, получим  $\vec{v} = \vec{v}'$ , т.е. непотенциальные силы, действующие на тело в различных ИСО, также будут одинаковыми. Поэтому для любых сил выполняется равенство  $\vec{F} = \vec{F}'$ . Именно поэтому в различных ИСО второй закон Ньютона имеет одинаковый вид (одинаковую форму записи):

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad m'\vec{a}' = \vec{F}'.$$

Закон сохранения импульса также сохраняет свой вид при переходе от одной ИСО к другой.

Рассмотрим инварианты преобразований Галилея.

### 1. Длина отрезка

В классической физике пространство обладает так называемой евклидовой метрикой. Это означает, что расстояние между двумя точками с координатами  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  определяется по теореме Пифагора:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (8.3)$$

Пусть две ИСО движутся друг относительно друга вдоль оси  $OX$ . Тогда преобразования Галилея (8.1) имеют вид:

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases}$$

Отсюда следует, что длина отрезка между данными точками во второй ИСО будет определяться по формуле

$$l' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2} = l.$$

Таким образом, длина отрезка, измеренная в неподвижной ИСО, равна длине того же отрезка, измеренной в движущейся ИСО, если измерения проводились в один момент времени.

## 2. Временной интервал

Поскольку в классической физике время не меняется при переходе от одной ИСО к другой, то временной интервал между двумя событиями  $\Delta t = t_1 - t_2$ , измеренный в неподвижной ИСО, в точности равен интервалу между этими событиями в движущейся ИСО:

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = t_1 - t_2 = \Delta t.$$

## 3. Изменение импульса и работа

Поскольку радиус-вектор материальной точки, а, следовательно, и ее скорость зависят от выбора начальных условий в различных ИСО, то они не являются инвариантами. Значит, импульс тела и его энергия не являются инвариантами. Рассмотрим изменение импульса и изменение энергии.

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$d\vec{p} = \vec{F}dt = \vec{F}'dt' = d\vec{p}',$$

а это означает, что изменение импульса инвариантно.

Работа по перемещению тела равна изменению его кинетической энергии:

$$dA = (\vec{F}d\vec{r}) = d\left(\frac{mV^2}{2}\right). \quad (8.4)$$

Записав преобразования Галилея в виде  $d\vec{r} = d\vec{r}' + d\vec{R}$ ,  
 $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}$ , получим, что

$$(\vec{F}d\vec{r}) = (\vec{F}d\vec{r}') + (\vec{F}d\vec{R}). \quad (8.5)$$

Воспользовавшись формулой (1.14), вычислим

$$\begin{aligned} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) &= d\left(\frac{m}{2}(\vec{V}' + \vec{v})^2\right) = \frac{m}{2}d(\vec{V}'^2 + 2\vec{V}'\vec{v} + \vec{v}^2) = \\ &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + d(m\vec{V}'\vec{v}) + d\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) = \\ &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (md\vec{V}'\vec{v}) + (m\vec{V}'d\vec{v}) + \frac{m}{2}2\vec{v}d\vec{v}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\vec{v} = \text{const}$ , то  $d\vec{v} = 0$ , а поэтому

$$\begin{aligned} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (md\vec{V}'\vec{v}) = d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (m\vec{a}'d\vec{t}\vec{v}) = \\ &= d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (\vec{F}'d\vec{R}). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Тогда, подставляя (8.5) и (8.6) в (8.4), получаем

$$(\vec{F}d\vec{r}') + (\vec{F}d\vec{R}) = d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right) + (\vec{F}'d\vec{R}),$$

откуда следует, что  $(\vec{F}d\vec{r}') = d\left(\frac{m}{2}\vec{V}'^2\right)$ , т.е. работа инвариантна.

Данный вывод показывает справедливость одинаковой записи законов сохранения импульса и энергии в различных ИСО.

### Постулаты Эйнштейна

В 1860–1865 гг. английский ученый Д. Максвелл создал теорию электромагнитного поля и предсказал существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (волн), которое распространяется со скоростью света. Это дало ему возможность предположить, что свет представляет собой один из видов электромагнитного излучения. В то время считалось, что электромагнитное излучение распространяется в особой невесомой среде (эфире), которая пронизывает все тела. Считалось, что с этим эфиром можно связать систему координат и получить особую

(абсолютную) систему отсчета, в которой по предположению справедливы уравнения Максвелла для электромагнитных волн. Однако оказалось, что принцип относительности Галилея несовместим с уравнениями Максвелла (эти уравнения не были инвариантными относительно преобразований Галилея). Кроме того, в 1880 г. американские физики Майкельсон и Морли поставили эксперимент, который опровергал гипотезу неподвижного эфира и доказал, что эфир не может быть принят в качестве абсолютной системы отсчета. Они экспериментально доказали, что скорость света не зависит от скорости источника или приемника излучения. Это также противоречило преобразованиям Галилея.

Указанные противоречия удалось разрешить великому немецкому физiku Альберту Эйнштейну (1879–1955). Больше всего его беспокоила несовместимость уравнений Максвелла с классической физикой. Эйнштейн видоизменил определения массы, энергии, импульса, свойства пространства и времени. При построении своей теории он исходил из двух постулатов.

1. **Принцип относительности Эйнштейна** – все физические законы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, а поэтому они должны быть сформулированы в виде, инвариантном относительно преобразований координат, отражающих переход от одной ИСО к другой.

2. **Принцип постоянства скорости света** – существует предельная скорость распространения взаимодействий, величина которой во всех ИСО одинакова и равна скорости электромагнитной волны в вакууме и не зависит ни от направления ее распространения, ни от движения источника и приемника.

Ясно, что второй постулат не согласуется с преобразованиями Галилея. Пусть система  $(X', Y', Z')$  движется со скоростью  $\vec{v}$  относительно системы  $(X, Y, Z)$  вдоль оси  $OY$  (рис. 8.1). Пусть источник света  $M$ , находящийся в системе  $(X', Y', Z')$  посылает световой сигнал со скоростью  $\vec{c}$  относительно системы  $(X', Y', Z')$ . Тогда,

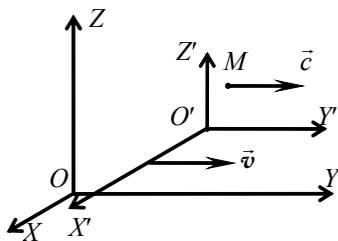


Рис. 8.1

согласно преобразованиям Галилея, скорость света относительно системы  $(X, Y, Z)$  должна быть равна  $\vec{v} + \vec{c}$ , что согласуется со «здравым смыслом». Заслуга Эйнштейна как раз и состоит в том, что он первый пришел к выводу об изменяемости свойств пространства и времени и о зависимости этих свойств от движения тел, с которыми связываются ИСО. Таким образом, мы вынуждены отказаться от преобразований Галилея и использовать другие преобразования, относительно которых скорость света оставалась бы инвариантной величиной.

### Преобразования Лоренца

Получим новые преобразования координат, исходя из следующих предположений. Поскольку любая новая теория, которая имеет более широкую область применения, чем старая теория, должна включать последнюю как предельный **случай (принцип соответствия)**, то получаемые преобразования должны отличаться от галилеевских на некоторый коэффициент. Кроме того, учтем возможное изменение свойств времени в разных ИСО, т.е.  $t' \neq t$ . Поскольку прямые и обратные преобразования Галилея имели вид

$$x = x' + vt', \quad x' = x - vt,$$

то будем искать новые прямые и обратные преобразования в виде

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad x' = \gamma(x - vt).$$

Коэффициент  $\gamma$  в этих уравнениях одинаков в силу равноправия и эквивалентности прямых и обратных преобразований (ИСО равноправны). Дополним последние выражения уравнениями движения света в двух ИСО, учтя постоянство скорости света:  $x = ct, x' = ct'$ . Мы получили систему четырех уравнений. Решая ее, можно найти

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

а поэтому

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{(x' + vt')}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & x' &= \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\
 t &= \frac{t' + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & t' &= \frac{t - x \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{8.7}$$

Эти выражения были впервые получены в 1892 г. голландским физиком Х.А. Лоренцем (1853–1928). Уравнения Максвелла инвариантны относительно данных преобразований, но впервые физическую интерпретацию математических результатов Лоренца дал Эйнштейн.

## Следствия преобразований Лоренца

### 1. Относительность одновременности событий

Пусть в системе  $(X, Y, Z)$  в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$  одновременно ( $t_1 = t_2$ ) произошли два события (допустим, зажглись две лампочки). Зажгутся ли они одновременно в системе  $(X', Y', Z')$ ? Для ответа на вопрос найдем разность  $t'_2 - t'_1$ :

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - x_2 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{t_1 - x_1 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{(x_1 - x_2) \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0.$$

Таким образом, два события, одновременные в одной ИСО, могут быть не одновременными в другой ИСО. В связи с этим возникает вопрос: не может ли случиться так, что в одной из ИСО следствие предшествует причине? Можно доказать, что при условии, что никакое материальное воздействие не может передаваться со скоростью большей, чем скорость света в вакууме, следствие никогда не может предшествовать причине.

## 2. Длительность события в разных ИСО

Пусть в системе  $(X', Y', Z')$  в точке с координатой  $x'$  произошло событие длительностью  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ , где  $t'_1$  и  $t'_2$  – начало и конец события по часам, покоящимся в системе  $(X', Y', Z')$ . Наблюдатель в системе  $(X, Y, Z)$  по своим часам отметит начало и конец этого события в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , которые равны

$$t_1 = \frac{t'_1 + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + x' \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Длительность события в системе  $(X, Y, Z)$  составит

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Время, которое измеряется по часам, связанным с движущимся телом, называется **собственным временем**. В нашем случае это интервал  $\Delta t'$ . Поскольку  $\gamma > 1$ , то  $\Delta t > \Delta t'$ , т.е. в движущейся ИСО время идет медленнее.

Эффект замедления времени в движущейся системе отсчета хорошо согласуется с опытными наблюдениями над элементарными частицами ( $\pi$ -мезонами), которые движутся в космических лучах со скоростями, близкими к скорости света.

## 3. Длина отрезка в разных ИСО

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси  $OX'$  системы  $(X', Y', Z')$  и неподвижный относительно этой системы координат. **Собственной длиной стержня** называется величина  $l_0 = x'_2 - x'_1$ , т.е. длина, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится. Длина его в системе  $(X, Y, Z)$  будет  $l = x_2 - x_1$ , причем измерения координат  $x_1$  и  $x_2$  проводятся в один и тот же момент времени по часам системы  $(X, Y, Z)$ . Поскольку эти два события – измерения координат  $x_1$  и  $x_2$ , одновременные в системе  $(X, Y, Z)$ , – будут неодновременными в си-

стеме  $(X', Y', Z')$ , то удобнее воспользоваться обратными преобразованиями Лоренца (второе уравнение в выражении (8.7)). Тогда

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - vt_2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{(x_1 - vt_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Поэтому длина стержня в системе отсчета, относительно которой он движется, составит

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Наблюдатель в системе  $(X, Y, Z)$  находит, что длина движущегося стержня в  $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$  раз меньше его собственной длины.

#### 4. Закон сложения скоростей

Пусть материальная точка движется в системе  $(X', Y', Z')$ . Поскольку ее координата вдоль оси  $OX'$  в данной системе определяется соотношением

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (8.8)$$

то ее скорость относительно данной системы координат

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}. \quad (8.9)$$

Из (7.8) находим

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{(u - v)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (8.10)$$

где  $u$  – скорость точки относительно системы  $(X, Y, Z)$ .

Из последнего выражения в (8.7) определим

$$\frac{d t'}{d t} = \frac{1 - u \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (8.11)$$

Подставив (8.10) и (8.11) в (8.9), получим

$$u' = \frac{u - v}{1 - \left(\frac{uv}{c^2}\right)}. \quad (8.12)$$

Из этого выражения следует, что

$$u = \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{u'v}{c^2}\right)}. \quad (8.13)$$

Напомним, что в классической физике выражениям (8.12) и (8.13) соответствовали  $u' = u - v$  и  $u = u' + v$  (см. (1.13)).

Применим релятивистский закон сложения скоростей к движению света в разных ИСО. Пусть свет распространяется в системе  $(X, Y, Z)$ :  $u = c$ . Тогда

$$u' = \frac{c - v}{1 - \left(\frac{cv}{c^2}\right)} = \frac{c - v}{c^2 - cv} c^2 = c.$$

Таким образом, в любой инерциальной системе отсчета скорость света постоянна и равна  $c$ , что и требуется вторым постулатом Эйнштейна.

Пусть в системе  $(X', Y', Z')$  материальная точка движется со скоростью  $u' < c$ , а сама система движется относительно  $(X, Y, Z)$  со скоростью  $v < c$ . Если, к примеру  $u' = 0,9c$ , и  $v = 0,9c$ , то классический закон сложения скоростей даст нам, что скорость точки относительно системы  $(X, Y, Z)$  составит  $u = u' + v = 1,8c$ . Теория относительности дает другой результат:

$$c - u = c - \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{u'v}{c^2}\right)} = \frac{c^2}{c} - \frac{u' + v}{1 + \left(\frac{u'v}{c^2}\right)} = \frac{(c - v)(c - u')}{c \left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)} > 0,$$

откуда следует, что  $u < c$ , т.е. в любой инерциальной системе отсчета скорость тела не может превысить  $c$ .

## 5. Пространственно-временной интервал

Поскольку пространство и время в СТО являются взаимосвязанными, то время выступает в преобразованиях Лоренца как равноправная четвертая координата. Можно представить существование четырехмерного пространства-времени, в котором оси  $x, y, z, ct$  взаимно перпендикулярны. Заметим, что координата по оси времени берется с множителем  $c$ , чтобы все координаты имели одинаковую размерность. Геометрическому расстоянию между двумя точками в обычном трехмерном пространстве, которое определяется по теореме Пифагора (8.3), в СТО соответствует **пространственно-временной интервал** между событиями:

$$S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}.$$

Можно показать, что интервал инвариантен относительно преобразований Лоренца.

### Релятивистская динамика

Поскольку выражение  $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$  инвариантно относительно преобразований Лоренца, то его можно представить как квадрат модуля (длину) некоторого вектора

$$\vec{\rho} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + ict\vec{e}_4,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ . Таким образом, рассмотрим четырехмерное пространство координат, в котором сохраняется длина этого вектора, а преобразования Лоренца осуществляют лишь его поворот.

Выберем такой случай движения двух ИСО, при котором  $y = y'$ ,  $z = z'$ , что позволит упростить математические выкладки. В этом случае ограничимся рассмотрением двумерного вектора

$\vec{p} = x\vec{e}_1 + ict\vec{e}_4$ . Основной закон классической динамики записывается в виде  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , где  $\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$ . Найдем выражение для релятивистского импульса.

Поскольку при нахождении преобразований Лоренца в преобразования Галилея вводился множитель  $\gamma$ , то введем этот множитель сейчас в выражение для классического импульса:

$$\vec{p} = m_0\gamma\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Вычислим силу:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_0\gamma\frac{dx}{dt}\vec{e}_1\right) + \frac{d}{dt}(m_0\gamma ic\vec{e}_4) = f_1\vec{e}_1 + f_4\vec{e}_4. \quad (8.14)$$

Импульс определяется по следующей формуле:

$$\vec{p} = m_0\gamma\frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + m_0\gamma ic\vec{e}_4 = m_0\gamma v\vec{e}_1 + m_0\gamma ic\vec{e}_4. \quad (8.15)$$

Выясним смысл слагаемых выражения (7.14). Обратим внимание, что при  $\gamma = 1$  ( $v \ll c$ ) первое слагаемое дает выражение второго закона Ньютона (если  $m_0 = m$ ). Квадрат модуля импульса тела остается постоянным:

$$p^2 = (m_0\gamma v)^2 + (m_0\gamma ic)^2 = (m_0\gamma)^2(v^2 - c^2) = \frac{m_0^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}(v^2 - c^2) = -m_0^2c^2.$$

Поэтому производная по времени от квадрата импульса равна нулю:  $\frac{dp^2}{dt} = \frac{d(\vec{p}\vec{p})}{dt} = 2\vec{p}\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ . С учетом (8.14) получаем

$$\vec{p}\frac{d\vec{p}}{dt} = m_0\gamma v f_1 + m_0\gamma ic f_4 = 0.$$

Тогда  $f_4 = -\frac{vf_1}{ic} = i\frac{v}{c}f_1$ . Видно, что при  $v \ll c$  величина  $f_4 \rightarrow 0$ , т.е.  $\vec{f}_4$  — исключительно релятивистский компонент силы. Его модуль

$$f_4 = \frac{d}{dt}(m_0\gamma ic) = i\frac{v}{c}f_1,$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2) = f_1 v.$$

Таким образом, аналогом второго закона Ньютона в релятивистской динамике выступает система уравнений

$$\begin{cases} f_1 = \frac{d}{dt}(m_0\gamma v), \\ f_1 v = \frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2). \end{cases} \quad (8.16)$$

Выражение

$$m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (8.17)$$

называется **релятивистской массой** тела. Отметим, что при скорости движения тела  $v=0$  его масса  $m = m_0$  (**масса покоя**). При любой скорости движения  $v>0$  масса тела больше массы покоя. При  $v=c$  масса тела неограниченно растет, что означает отсутствие массы покоя у таких материальных объектов (фотонов).

### Связь массы и энергии

Рассмотрим второе уравнение системы (8.16):

$$f_1 \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0\gamma c^2), \text{ откуда следует, что } f_1 dx = d(m_0\gamma c^2).$$

Левая часть последнего равенства представляет собой элементарную работу по перемещению тела, поэтому правая часть должна быть равна полному дифференциалу энергии тела:

$$W = m_0\gamma c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} c^2 = mc^2. \quad (8.18)$$

Данное выражение определяет **полную энергию** тела в релятивистской механике. Рассмотрим, что дает это выражение при классическом характере движения тела ( $v \ll c$ ), для чего воспользуемся пределом  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$ :

$$W = m_0 c^2 \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Первое слагаемое полученного выражения  $W_0 = m_0 c^2$  носит название **энергии покоя тела**. Второе слагаемое – его кинетическая энергия. Таким образом, кинетическая энергия тела – это разность полной энергии тела и его энергии покоя.

Выражение (8.18) устанавливает взаимосвязь между массой и энергией. Хорошо известно, что в природе происходит непрерывное превращение энергии из одной формы в другую. Как показывает опыт, форма существования массы тоже меняется. Например, при столкновении электрона и позитрона (которые обладают массами покоя), они могут аннигилировать, в результате чего образуются два гамма-кванта (порции электромагнитного излучения), не обладающих массами покоя. Однако гамма-квант обладает инертной массой, которая проявляется при столкновении с препятствием (например, давление света). При различных взаимопревращениях форм энергии и массы ни энергия, ни масса не исчезают и не возникают вновь, они только переходят из одной формы в другую так, что соблюдается выражение (8.18). Так, если два одинаковых шара из абсолютно неупругого материала движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, то в результате удара они останавливаются. При этом исчезает кинетическая энергия макроскопического движения и увеличивается масса покоя этой системы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что нового внесла СТО в наши представления о свойствах пространства и времени?
2. Как зависят от скорости материальной точки ее релятивистский импульс и кинетическая энергия?

3. Объясните смысл закона взаимосвязи массы и энергии.
4. Какие вам известны величины, сохраняющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой?
5. Соблюдается ли закон сохранения импульса в СТО?
6. Определите скорость частицы, если её кинетическая энергия равна ее энергии покоя.
7. Определите массу и скорость электрона, полная энергия которого равна 10 МэВ.

## 9. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ МАКРОСИСТЕМ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим системы, состоящие из большого числа частиц (молекул и атомов), называемые **макросистемами**. Примером подобной системы является газ. Физические величины, характеризующие состояние систем, называются **параметрами состояния**.

Примерами параметров являются давление, объем, концентрация, температура и др. **Давлением** называется физическая величина  $p = \frac{dF_n}{dS}$ , где  $dF_n$  – модуль силы, действующей на малый участок поверхности тела площадью  $dS$  перпендикулярно этой поверхности.

Поведение макросистем изучается **термодинамическим и молекулярно-статистическим методами**. Раздел физики, в котором свойства макроскопических систем изучаются с помощью термодинамического метода, называется **термодинамикой**. В основе термодинамики лежат фундаментальные законы (т.н. начала термодинамики), полученные из обобщения опытных фактов. В основе молекулярно-статистического метода лежит представление об атомно-молекулярном строении вещества, свойствах молекул и атомов и взаимодействия между ними. Математическая основа этого метода – теория вероятности.

**Масса и размеры молекул.** Относительной атомной массой элемента  $A_r$  называется отношение массы атома этого элемента к  $1/12$  массы изотопа углерода  $^{12}_6C$ . Относительной молекулярной массой вещества  $M_r$  называется отношение массы молекулы этого вещества к  $1/12$  массы изотопа углерода  $^{12}_6C$ . Относительные атомная и молекулярная массы являются безразмерными величинами. Единица массы, равная  $1/12$  массы изотопа углерода  $^{12}_6C$ , называется **атомной единицей массы** (а.е.м.). Если ее обозначить как  $m_{\text{ед}}$ , то масса атома может быть вычислена как  $A_r m_{\text{ед}}$ , а масса молекулы как  $M_r m_{\text{ед}}$ .

Количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов, молекул, ионов и т.д.), равное числу атомов в  $0,012$  кг углерода  $^{12}C$ , называется **молем**. В 1 моле любого вещества содержится одно и то же число молекул. Опытным путем было установлено, что это число, называемое **числом Авогадро**  $N_A$ , составляет  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$ . Если обозначить массу одной молекулы как  $m_0$ , то масса произвольного количества вещества, содержащего  $\nu$  молей, равна  $m = m_0 N_A \nu = \mu \nu$ . Величина  $\mu = m_0 N_A$  называется **молярной массой** вещества. Она равна массе всех молекул 1 моля вещества, или отношению массы вещества к содержащемуся в нем количеству вещества. Для углерода  $^{12}C$  молярная масса  $\mu = 0,012$  кг/моль, а масса атома равна  $12m_{\text{ед}}$ . Следовательно,  $0,012 = N_A 12m_{\text{ед}}$ , откуда  $m_{\text{ед}} = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг. Масса любого атома равна  $1,66 \cdot 10^{-27} \cdot A_r$  кг, а масса любой молекулы составляет  $1,66 \cdot 10^{-27} \cdot M_r$  кг. Поскольку  $N_A m_{\text{ед}} = 0,001$  кг/моль, то масса моля, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе.

В совокупном поведении большого числа частиц, образующих макросистему проявляются особые статистические закономерности. Раздел теоретической физики, в котором с помощью статистического метода изучаются физические свойства макроскопических систем, называется **статистической физикой**.

**Термодинамической системой** называется любая выделенная макроскопическая система. Тела, не включенные в состав выделенной системы, называются внешними телами или **внешней средой**. Термодинамические системы, не обменивающиеся ни энергией, ни веществом с внешними телами, называются **изолированными**.

**Равновесным состоянием термодинамической системы** называется состояние, в котором все параметры системы имеют определенные, одинаковые во всех частях системы значения, не меняющиеся со временем. В противном случае говорят о **неравновесном состоянии** системы. При неизменных внешних условиях термодинамическая система приходит в равновесное состояние. **Термодинамическим процессом** называется переход системы из одного состояния в другое. Процесс всегда связан с нарушением равновесного состояния. **Равновесным** называется такой термодинамический процесс, который проходит бесконечно медленно и состоит из последовательности равновесных состояний. Реальные процессы изменения состояния системы происходят с конечной скоростью и поэтому не могут быть равновесными. Реально близким к равновесному является процесс, протекающий настолько медленно, что отклонения значений параметров состояния от равновесных пренебрежимо малы. Такие процессы называются **квазистатическими**.

Понятие температуры является одним из ключевых в физике макросистем. Если при тепловом контакте тел, одно из них передает энергию другому посредством теплопередачи, то в таком случае первое тело имеет большую температуру, чем другое. В состоянии термодинамического равновесия тела имеют одинаковую температуру. Постоянство или изменение температуры тела можно определить по изменению величин, характеризующих его физические свойства. Практически все свойства тел – объем, электрическое сопротивление, излучательная способность и т.п. – зависят от температуры. Удобное для измерения свойство может быть использовано для количественного определения температуры. Наибольшее распространение получили приборы, измеряющие температуру:

- по изменению объема (термометры – ртутные, газовые, спиртовые и пр.);
- по изменению электрического сопротивления (термометры сопротивления, термисторы);
- термопары (провода из разнородного материала, спаянные друг с другом, так, что спаи находятся при разных температурах, при этом в цепи возникает термоЭДС, пропорциональная разности температур спаев);
- бесконтактные пирометры, тепловизоры, термометры (изменение излучательной способности тел).

Чтобы отсчитать температуру необходимы **температурные шкалы**. При построении опытных температурных шкал помогает природа – существуют хорошо повторяемые температуры (т.н. реперные точки) – например температуры фазовых переходов. Так, например, поступил А. Цельсий в 1742 г., выбрав в качестве измеряемого свойства объем тела. Приведя тело, выбранное для измерения температуры (термометрическое тело), в тепловое равновесие с тающим льдом, измерил объем тела  $V_0$  и приписал телу в этом случае температуру  $0^\circ$ . Затем привел это же тело в тепловое равновесие с кипящей при атмосферном давлении водой, измерил объем тела  $V_{100}$  и приписал телу в этом состоянии температуру  $100^\circ$ . Приняв, что объем тела изменяется с температурой по линейному закону, состоянию, в котором тело будет иметь объем  $V$ , следует приписать температуру

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \cdot 100^\circ.$$

Проградуированный по этой шкале (теперь называемой шкалой Цельсия) термометр можно использовать для измерения температуры произвольного тела, если приводить термометр в состояние теплового равновесия с телом, температуру которого необходимо измерить. Как исторический факт можно отметить, что первоначально А. Цельсий использовал перевернутую шкалу ( $100^\circ$  соответствовали температуре тающего льда). Понятно, что можно построить сколь угодно много опытных температурных шкал. Наибольшее распространение имеют также шкалы Фаренгейта и Реомюра.

Оказывается, может быть выбрана шкала, не зависящая от свойств термометрического тела. Эта шкала называется **термодинамической шкалой температур**. Введение термодинамической шкалы основано на использовании второго начала термодинамики. Температура  $T$ , отсчитанная по этой шкале, связана с температурой  $t$  по шкале Цельсия соотношением  $T = t + 273,15$ .

Единицу термодинамической (абсолютной) температуры называют кельвин (обозначается К). Температуру по шкале Цельсия измеряют в градусах Цельсия ( $^\circ\text{C}$ ). Значения кельвина и градуса Цельсия одинаковы. Температура, равная 0 К, называется

**абсолютным нулем**, ему соответствует  $t = -273,15^\circ\text{C}$ . До 2019 г. кельвин определялся как  $1/273,16$  части термодинамической температуры тройной точки воды. В настоящее время определяется через значение постоянной Больцмана  $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

В дальнейшем будет показано, что температура выражает среднюю кинетическую энергию молекул вещества. В этом заключается физический смысл температуры.

Как показывает опыт в состоянии термодинамического равновесия параметры состояния связаны между собой уравнением, называемым **уравнением состояния**:

$$f(p, V, T) = 0. \quad (9.1)$$

Конкретный вид функции  $f$  в термодинамике предполагается известным из опыта. Теоретический вывод уравнения состояния проводится методами статистической физики.

Простейшим объектом, для которого в термодинамике может быть рассмотрено уравнение состояния, является идеальный газ. **Идеальным** называется такой газ, молекулы которого имеют пренебрежимо малый собственный объем и не взаимодействуют друг с другом на расстоянии. При условиях, близких к **нормальным условиям**, т.е. при давлении  $p_0 = 101\,325$  Па и температуре  $T_0 = 273,15$  К, многие газы (водород, гелий, неон, азот, кислород, воздух и др.) можно с хорошим приближением считать идеальными. Как показывает опыт для них уравнение состояния (9.1) имеет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (9.2)$$

В форме записи (9.2) уравнение состояния идеального газа называется **уравнением Клапейрона–Менделеева**. Говорят, что газ, в точности подчиняющийся уравнению состояния Клапейрона – Менделеева, называется идеальным. В (9.2)  $R = 8,31$  Дж/(моль·К) называют **универсальной газовой постоянной**,  $\nu = \frac{m}{\mu}$  – отношение массы газа к молярной массе – число молей.

Уравнение (9.2), при использовании постоянной Больцмана  $k = \frac{R}{N_A}$  может быть записано в виде:

$$p = nkT, \quad (9.3)$$

где  $n$  – концентрация газа.

Примерами простейших термодинамических процессов, происходящих с неизменной массой идеального газа, могут служить следующие процессы:

а) **изотермический процесс**, при котором температура системы не меняется ( $T = \text{const}$ );

б) **изобарный процесс**, при котором давление в системе не меняется ( $p = \text{const}$ );

в) **изохорный процесс**, при котором объем системы не меняется ( $V = \text{const}$ ).

Эти процессы, были изучены экспериментально, уравнение Клапейрона–Менделеева обобщает следующие **законы идеального газа**.

**Закон Бойля–Мариотта**: если данная масса газа совершает изотермический процесс ( $T = \text{const}$ ), то произведение давления газа на его объем не изменяется:

$$pV = \text{const}.$$

**Закон Гей-Люссака**: если данная масса газа совершает изобарный процесс ( $p = \text{const}$ ), то объем газа изменяется пропорционально его температуре:

$$V = \text{const} \cdot T.$$

**Закон Шарля**: если данная масса газа совершает изохорный процесс ( $V = \text{const}$ ), то давление газа изменяется пропорционально его температуре:

$$p = \text{const} \cdot T.$$

Изохорный, изобарный и изотермический процессы графически изображаются кривыми (соответственно изохорами, изобарами и изотермами) в различных системах координат:  $(p, V)$ ;  $(p, T)$ ;  $(V, T)$ . На рисунке 9.1 изображены изотермы данной массы газа в координатах  $(p, V)$ , изобары данной массы газа в координатах  $(V, T)$ , изохоры данной массы газа в координатах  $(p, T)$ .

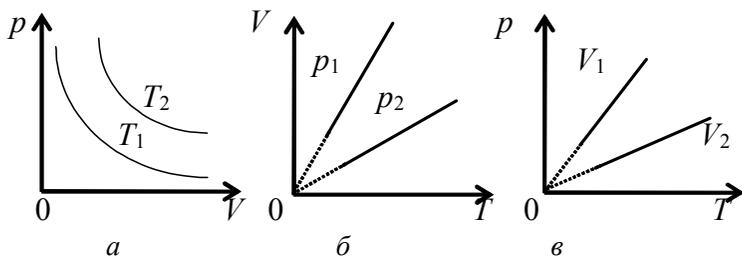


Рис. 9.1

График любого изопроцесса разбивает координатную плоскость на две части:

1) во всех состояниях, которые на диаграмме  $(p, V)$  изображаются точками, лежащими выше изотермы  $T_1$  (рис. 9.1, а), температура газа больше, чем  $T_1$ , т.е.  $T_2 > T_1$ ;

2) во всех состояниях, которые на диаграмме  $(V, T)$  изображаются точками, лежащими ниже изобары  $p_1$  (рис. 9.1, б), давление газа больше, чем  $p_1$ , т.е.  $p_2 > p_1$ ;

3) во всех состояниях, которые на диаграмме  $(p, T)$  изображаются точками, лежащими ниже изохоры  $V_1$  (рис. 9.1, в), объем газа больше, чем  $V_1$ , т.е.  $V_2 > V_1$ .

При рассмотрении смеси  $N$  идеальных газов, находящихся в одном сосуде, уравнение состояния (9.2) можно записать в виде:

$$pV = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots + \frac{m_N}{\mu_N} \right) RT = \sum_{i=1}^N \left( \frac{m}{\mu} \right)_i RT.$$

Вместе с тем смесь идеальных газов можно представить таким идеальным газом, для которого будет справедливо соотношение  $pV = \frac{m_{\text{см}}}{\mu_{\text{см}}} RT$ . Учтем, что масса смеси  $m_{\text{см}} = \sum_{i=1}^N m_i$ , тогда получим

$$\mu_{\text{см}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{\sum_{i=1}^N \left( \frac{m}{\mu} \right)_i}. \quad (9.4)$$

Выражение (9.4) определяет **эффективную молярную массу смеси идеальных газов** – молярную массу такого идеального газа, который, имея массу, равную массе смеси газов, в объеме, равном объему смеси, создает давление, равное давлению смеси при температуре, равной температуре смеси.

### Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим движение молекул идеального газа в сосуде и определим давление молекул на стенки сосуда. Считаем, что газ находится в равновесном состоянии и взаимодействие молекул со стенкой происходит по законам абсолютно упругого удара.

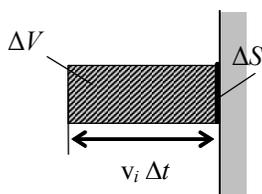


Рис. 9.2

Оценим число ударов молекул о стенки сосуда в единицу времени. Движение молекул является хаотичным, все направления движения равновероятны, скорость молекул меняется в пределах от нуля до некоторой максимальной. Разобьем молекулы по группам скоростей, тогда в  $i$ -группе число молекул в единице объема  $\Delta n_i$ , а скорости лежат в диапазоне  $[v_i, v_i + \Delta v]$ . По направлению к стенке движется  $1/6$  часть молекул (число молекул, двигающихся вдоль каждой из трех координат, составляет  $1/3$  от общего числа молекул, вдоль условно положительного направления (т.е. по направлению к стенке) будет двигаться половина от этого числа молекул, т.е.  $1/6$  от общего числа молекул в сосуде). За время  $\Delta t$  до стенки долетят молекулы, находящиеся на расстоянии не далее  $v_i \Delta t$  (см. рис. 9.2), число соударений в единицу времени с единичной поверхностью  $\Delta S$  выражается через число молекул  $i$  группы  $N_i$  долетевших до стенки:

$$v_i = \frac{N_i}{\Delta S \Delta t} = \frac{1/6 \Delta n_i \Delta V}{\Delta S \Delta t} = \frac{1/6 \Delta n_i v_i \Delta t \Delta S}{\Delta S \Delta t} = \frac{\Delta n_i v_i}{6}. \quad (9.5)$$

Просуммируем по всем группам молекул:

$$v = \sum v_i = \frac{\sum \Delta n_i v_i}{6} = \frac{1}{6} \left( \frac{\sum \Delta n_i v_i}{n} \right) n = \frac{n \langle v \rangle}{6}, \quad (9.6)$$

где  $\langle v \rangle = \left( \frac{\sum \Delta n_i v_i}{n} \right)$  – средняя скорость молекул.

Оценим число соударений для воздуха при нормальных условиях. Считая  $n \sim 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ,  $\langle v \rangle \sim 10^3 \text{ м/с}$ , получим  $v \sim 10^{28} \text{ 1/(с·м}^2\text{)}$ .

Оценим давление газа на стенку. Давление газа на стенку есть совокупное действие многих молекул. Считаем, что при абсолютно упругом соударении со стенкой сосуда молекула, налетая на стенку нормально, имеет импульс  $\vec{p}_1 = m_0 \vec{v}$ , а после соударения  $\vec{p}_2 = -m_0 \vec{v}$  и изменяет свой импульс на величину  $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -m_0 \vec{v} - m_0 \vec{v} = -2m_0 \vec{v}$ , где модуль изменения импульса  $\Delta p = 2m_0 v$ . За время  $\Delta t$  до стенки долетит  $N_i$  молекул в  $i$ -й группе (см. 9.5)  $N_i = \frac{\Delta n_i v_i}{6} \Delta S \Delta t$ , которые передадут импульс

$\Delta p N_i = 2m_0 v_i \frac{\Delta n_i v_i}{6} \Delta S \Delta t = \frac{1}{3} m_0 v_i^2 \Delta n_i \Delta S \Delta t$ . Просуммируем приращение импульса по всем группам, помножим и поделим на концентрацию молекул:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \sum \Delta p N_i = \left( \sum \frac{1}{3} m_0 v_i^2 \Delta n_i \Delta S \Delta t \right) \frac{n}{n} = \\ &= \frac{1}{3} m_0 n \Delta S \Delta t \sum \left( \frac{\Delta n_i v_i^2}{n} \right) = \frac{1}{3} m_0 n \Delta S \Delta t \langle v^2 \rangle. \end{aligned}$$

Выразим давление, как импульс, передаваемый в единицу времени единичной площадке:

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle.$$

Полученное выражение можно представить в виде:

$$p = \frac{2}{3} n \langle W_k \rangle, \quad (9.7)$$

где  $\langle W_k \rangle = \frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle$  – среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекул газа.

Полученное уравнение (9.7) носит название **основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов**: давление газа определяется средней кинетической энергии поступательного движения молекул газа.

Надо заметить, что выражение (9.7) несмотря на значительные упрощения является точным. Коэффициент  $1/3$  получался как произведение  $2$  и  $1/6$ , тогда как точное решение задачи дает коэффициент  $1/3$  как произведение  $1/4$  (число ударов) и  $4/3$  (передаваемый импульс).

Сопоставляя уравнения (9.2) и (9.7) получаем, что **среднюю кинетическую энергию** поступательного движения молекул можно выразить как:

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (9.8)$$

Выражение (9.8) позволяет определить **физический смысл температуры**: температура есть мера средней кинетической энергии молекул.

Из (9.8) можно получить выражение для **средней квадратичной скорости**  $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$ , или с учетом связи  $k = R/N_A$ :

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (9.9)$$

**Число степеней свободы** тела (молекулы) называется минимальное число независимых переменных, однозначно определяющих положение тела (молекулы) в пространстве.

Для молекулы одноатомного газа, необходимы три переменных (координаты), чтобы однозначно определить положение молекулы в пространстве (молекула совершает поступательное движение, вращение молекулы не изменяет ее положение в пространстве). Тогда число степеней свободы молекулы одноатомного газа  $i=3$  (рис. 9.3 а). Если молекула двухатомная, то в модели жесткой «гантели» (отсутствуют колебания и перемещения атомов относительно друг друга) кроме **трех поступательных степеней свободы** молекула имеет и **две вращательные**, поворот относительно еще одной оси не изменяет положение в пространстве (рис. 9.3 б),  $i=5$ . Для трехатомной молекулы с жесткими связями  $i=6$  (3 поступательных и три вращательных степени свободы), рис. 9.3 в. Если в двух и более атомных молекулах связи не жесткие, то у молекул появляются **колебательные степени свободы**.

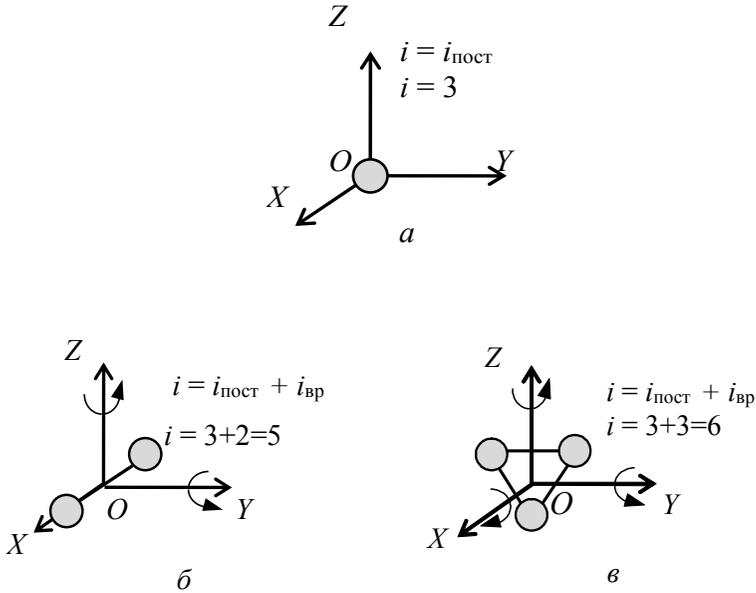


Рис. 9.3

С понятием степеней свободы связан один из важнейших законов молекулярно-кинетической теории – теорема о равнораспределении средней энергии молекул по степеням свободы. Больцман предположил, что энергия молекулы равномерно распределена по степеням ее свободы. Действительно из (9.8) при трех поступательных степенях свободы на **каждую степень свободы приходится в среднем энергия  $kT/2$** . Тогда выразить среднюю энергию молекулы можно как:

$$\langle W \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (9.10)$$

В формуле (9.10) число  $i$  совпадает с числом степеней свободы только для молекул с жесткими связями.

## Контрольные вопросы и задания

1. Приведите характеристики теплового движения молекул в различных агрегатных состояниях.
2. Чем отличается статистический метод исследования от термодинамического?
3. Какая форма уравнения состояния идеального газа наиболее удобна для определения концентрации частиц этого газа?
4. Можно ли в координатах  $(p, V)$ ;  $(p, T)$ ;  $(V, T)$  изобразить неравновесный процесс?
5. Чем определяются количество степеней свободы молекулы?
6. Сколько степеней свободы имеют молекулы гелия, азота, аргона, воздуха?
7. Чем определяется давление идеального газа согласно молекулярно-кинетической теории?
8. Сравните среднеквадратичные скорости молекул азота и кислорода при одной и той же температуре.

## 10. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

### Элементарные сведения из теории вероятностей

Макроскопические свойства систем, состоящих из очень большого числа частиц, изучаются статистическим методом. В подобных системах существуют некоторые средние значения физических величин, которые характеризуют всю совокупность частиц в целом (в газе это средние значения скоростей теплового движения молекул, их энергий и т.д.). Про такие величины говорят, что они имеют статистический характер и подчиняются определенным закономерностям, не свойственным отдельным частицам. Подобные закономерности называются статистическими или вероятностными. Статистический метод основан на использовании теории вероятностей и определенных моделей строения изучаемых систем. Познакомимся с основными понятиями теории вероятностей.

**Событием** (случаем) в теории вероятностей называют явление, о котором можно говорить, что оно либо произошло, либо нет. Можно различать события достоверные и невозможные, случайные и равновозможные и др. **Вероятностью данного события**  $P$  называется отношение числа  $n$  благоприятных исходов опытов (таких, в которых интересующее нас событие произошло) к полному числу опытов  $N$ , когда полное число опытов стремится к бесконечности:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}.$$

В теории вероятностей доказываются две теоремы, заключающейся в том, что если  $P_A$  – вероятность события  $A$ ,  $P_B$  – вероятность события  $B$ , то операции сложения и умножения вероятностей выполняются так:

1)  $P_{\text{или}B} = P_A + P_B$ , где  $P_{\text{или}B}$  – вероятность двух несовместимых событий  $A$  и  $B$ , заключающаяся в том, что произошло либо событие  $A$ , либо событие  $B$ ;

2)  $P_{AB} = P_A P_B$ , где  $P_{AB}$  – вероятность двух независимых событий  $A$  и  $B$ , состоящая в появлении совместно и события  $A$ , и события  $B$ .

В статистической физике важным является понятие среднего значения. Рассмотрим это понятие на следующем примере. Пусть выполнено  $N$  однотипных измерений величины  $a$ . В  $n_1$  случаях значение составило  $a_1$ , в  $n_2$  случаях  $a_2$ , и т.д., в  $n_m$  случаях  $a_m$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$ . **Среднее значение величины  $a$ :**

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_m n_m}{N}.$$

В пределе, при  $N \rightarrow \infty$ ,  $P_1 = n_1 / N$ ,  $P_2 = n_2 / N$ ,  $P_m = n_m / N$  и среднее значение равно:

$$\langle a \rangle = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_m P_m,$$

где  $P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1$ .

Полученное выражение справедливо для событий конечного числа, как поступать в случаях, если множество событий бесконечно и непрерывно? Необходимы функциональные зависимости, задающие распределение нужных величин во всей рассматриваемой области изменения параметров функций. Рассмотрим

макроскопическую систему. Говорят, что частицы системы образуют **статистический ансамбль**. Пусть каждый из элементов системы имеет определенное значение какого-либо физического параметра  $z$ . **Функцией распределения  $f(z)$**  элементов системы по параметру  $z$  называется отношение:

$$f(z) = \frac{dN}{N dz}, \quad (10.1)$$

где  $dN$  – число частиц, у которых физический параметр лежит в пределах от  $z$  до  $z + dz$ ;  $N$  – полное число частиц ансамбля.

Отношение  $dN/N$  по определению является вероятностью  $dP_z = \frac{dN}{N}$ , задающей возможность для частиц иметь значение параметра  $z$  в пределах  $[z \div z + d z]$ . С учетом (10.1)  $dP_z = f(z) dz$ . Вероятность имеет простую наглядную интерпретацию: на графике зависимости  $f(z)$ , пример которого приведен на рис. 10.1, она равна элементарной площади  $f(z) dz$ .

Для вероятности выполняется **условие нормировки**:  $\int_z dP_z = 1$  (также как и для конечного значения событий сумма всех вероятностей равна единице), тогда условие нормировки функции распределения запишется в виде:

$$\int_z f(z) dz = 1. \quad (10.2)$$

Зная функцию распределения, можно найти **среднее значение параметра  $z$**  по системе:

$$\langle z \rangle = \int_{z_1}^{z_2} z f(z) dz, \quad (10.3)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  – минимальное и максимальное значения параметра в системе.

**Среднее значение** произвольной функции  $\varphi(z)$  параметра  $z$ :

$$\langle \varphi(z) \rangle = \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) f(z) dz. \quad (10.4)$$

Рассмотрим поведение молекул идеального газа в замкнутом объеме. В квазистатическом состоянии тепловое движение молекул представляет собой беспорядочное (хаотическое) движение. Все направления скоростей молекул равновероятны, а модули скоростей не могут быть одинаковыми в силу столкновения молекул. Задача о распределении молекул газа по скоростям была поставлена и решена Д. Максвеллом в 1859 г.

Пусть газ состоит из большого числа  $N$  тождественных молекул, находящихся в состоянии хаотического теплового движения при определенной температуре. Силовые поля, действующие на газ, отсутствуют. Необходимо определить распределение молекул по скоростям движения.

Существует формальный способ, облегчающий решение задачи. Примем произвольную точку пространства за начало координат. Отложим от нее в произвольный момент времени векторы скоростей всех молекул газа, модули которых изменяются от некоторой минимальной скорости, до некоторой максимальной. Концы векторов скоростей («скоростные точки») образуют трехмерное пространство, называемое **пространством скоростей**. Введем в этом пространстве прямоугольные координаты  $v_x, v_y, v_z$ , проекции векторов скоростей на эти оси являются координатами скоростных точек. В силу равновероятности направлений движения молекул расположение точек относительно начало координат будет сферически симметричным. Все молекулы, значения модулей скоростей которых лежат в интервале  $v \div v+dv$ , в пространстве скоростей характеризуются набором векторов  $\vec{v}$ , у которых концы лежат внутри объема  $dV$ . Этот объем образует сферический слой  $dV$  (на рис. 10.2 сечение этого слоя показано штриховкой). Слой имеет радиус  $v$  и толщину  $dv$ . Относительное число точек  $dN/N$ , попавших внутрь выделенного объема  $dV$ , представляет собой для молекул вероятность иметь скорость в выделенном интервале:

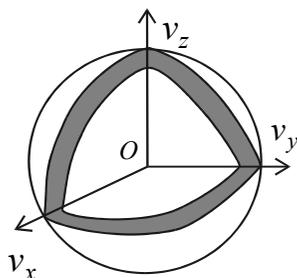


Рис. 10.2

$$dP_v = \frac{dN}{N} = f(v)dV = f(v)4\pi v^2 dv = F(v)dv,$$

где  $f(v)$  является объемной плотностью вероятности,  $F(v)$  функция распределения молекул по модулям скоростей. Вид функции  $F(v)$  и был впервые установлен Максвеллом. Сокращенно повторим вывод. Обозначим вероятность того, что выбранная молекула имеет значение модуля проекции скорости на направление  $OX$  в интервале  $v_x \div v_x + dv_x$  как  $dP_{v_x} = f(v_x)dv_x$ . Аналогично определяются вероятности и для направлений  $OY, OZ$   $dP_{v_y}, dP_{v_z}$ . Тогда вероятность  $dP_v$  можно выразить  $dP_v = dP_{v_x} dP_{v_y} dP_{v_z} = f(v_x)f(v_y)f(v_z)dv_x dv_y dv_z = f(v)dv_x dv_y dv_z$ , где:

$$f(v) = f(v_x)f(v_y)f(v_z). \quad (10.5)$$

Мы воспользовались теоремой об умножении вероятностей, считая, что события, заключающиеся в нахождении проекций скоростей в заданных интервалах, являются статистически независимыми. Это предположение строго доказывается исходя их хаотичности теплового движения. Понятно, что функции распределения по проекциям скоростей подобны, поиск функции  $f(v)$  сводится к отысканию функции распределения по проекции скорости, например  $\varphi(v_x)$ . Пользуясь формальными математическим подходом (прологарифмировать (10.5), затем найти частную производную по  $v_x$  и выполнить обратные операции) можно показать, что функция  $\varphi(v_x)$  подчиняется распределению Гаусса:

$$\varphi(v_x) = A \cdot e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}. \quad (10.6)$$

Для нахождения постоянных  $A$  и  $\alpha$  необходимы два уравнения. Одним является условие нормировки функции распределения вероятности (10.2), в качестве второго используют (9.4). Окончательно **функция распределения по проекции скорости**  $\varphi(v_x)$  имеет вид:

$$\varphi(v_x) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}. \quad (10.7)$$

Используя (10.5) выразим **функцию распределения по модулям скоростей**  $F(v) = 4\pi v^2 f(v)$  :

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2. \quad (10.8)$$

График функции  $F(v)$  представлен на рис. 10.3. Вид графика определяет произведение двух зависимостей от  $v$  – убывающей экспоненциальной и возрастающей квадратичной, функция имеет максимум. Поскольку  $dP_v = F(v)dv$ , то площадь под элементом графика  $F(v)$  будет определять вероятность обнаружения молекулы со скоростью, численное значение которой лежит в интервале  $v \div v+dv$  (на рис. 10.3 эта площадь заштрихована). С изменением температуры распределение плотности вероятности от скорости изменяет свой вид. На рисунке 10.4 показано, что с увеличением температуры максимум функции становится менее выраженным и переходит в область больших скоростей. Это означает, что увеличивается доля молекул, обладающих большими скоростями.

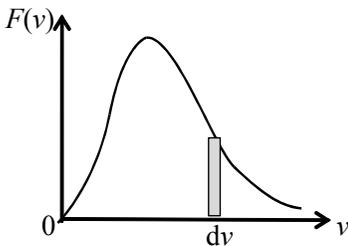


Рис. 10.3

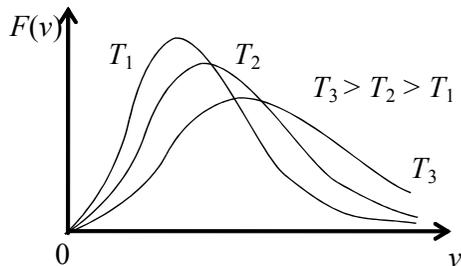


Рис. 10.4

Запишем **закон распределения молекул газа по модулям скоростей**, который определяет, какое число  $dN$  молекул газа из общего числа его молекул  $N$  в единице объема имеет при данной температуре скорости, заключенные в интервале от  $v$  до  $v+dv$ :

$$dN = N \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv. \quad (10.9)$$

С помощью такого распределения можно, например, рассчитать среднюю кинетическую энергию молекул. Воспользуемся определением (10.4). Кинетическая энергия молекулы – это функция ее скорости  $\varphi(z) = \frac{m_0 v^2}{2}$ , поэтому

$$\left\langle \frac{m_0 v^2}{2} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{m_0 v^2}{2} f(v) dv = \int_0^{\infty} \frac{m_0 v^2}{2} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 dv = \frac{3}{2} kT.$$

Проанализируем поведение функции распределения молекул по скоростям. Найдем, при какой скорости наблюдается максимальное значение функции  $F(v)$ . Такую скорость  $v_{\text{н.в.}}$  называют **наиболее вероятной скоростью молекул**. Для того, чтобы найти  $v_{\text{н.в}}$  продифференцируем выражение (10.8):

$$F'(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ 2v e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} + v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left( -\frac{2vm_0}{2kT} \right) \right].$$

Приравняв полученную производную к 0, найдем значение  $v_{\text{н.в.}}$ :

$$2v_{\text{н.в.}} - \frac{v_{\text{н.в.}}^3 m_0}{kT} = 0 \Rightarrow v_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (10.10)$$

**Средняя арифметическая скорость** молекул рассчитывается в соответствии с (10.3):

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^3 dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \quad (10.11)$$

**Среднеквадратичной скоростью молекул** называется скорость, равная квадратному корню из среднего значения квадрата скоростей молекул  $v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ . По определению (10.4) найдем:

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \int_0^{\infty} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^4 dv = \frac{3kT}{m_0}. \quad (10.12)$$

Тогда

$$v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (10.13)$$

При расчете в (10.11) и (10.12) использованы пределы не от минимальной до максимальной скорости молекул газа, а от нуля до бесконечности, такое упрощение позволяет просто рассчитать интегралы и не вносит ошибки в расчеты.

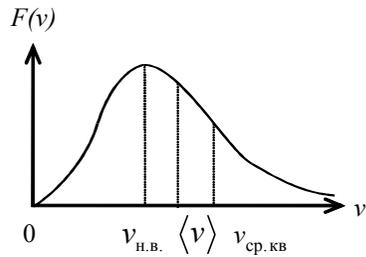


Рис. 10.5

Сравнивая между собой (10.10), (10.11), и (10.13), отметим, что  $v_{н.в.} < \langle v \rangle < v_{ср.кв.}$ . Эти скорости нанесены на график плотности вероятности на рис. 10.5.

Подводя итоги рассмотрению, важно отметить, что функция распределения плотности вероятности (10.9) позволяет найти не число молекул, скорости которых лежат в определенном интервале скоростей, а только долю от общего числа молекул. Распределение Максвелла можно представить и в виде распределения молекул по кинетической энергии поступательного движения, выполнив соответствующую замену в (10.9). Для примера использования полученных выражений рассмотрим азот при температуре  $T = 273$  К. Молярная масса азота  $\mu = 0,028$  кг/моль. При такой температуре наиболее вероятная скорость молекул, в соответствии с (10.10), составит:

$$v_{н.в.} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{0,028}} = 403 \text{ м/с.}$$

Подставим выражение для наиболее вероятной скорости (10.14) в функцию распределения (10.11):

$$F(v) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 = 4\pi \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} v_{н.в.}} \right)^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2;$$

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{н.в.}^3} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Используя последнее выражение, очень легко находить ответы на вопросы о распределении частиц по скоростям. Найдем

долю молекул азота, скорости которых принимают значения от 403 м/с до 413 м/с (ширина интервала скоростей составляет 10 м/с, а середина интервала – 408 м/с):

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{403}^{413} F(v) dv = \int_{403}^{413} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{\text{н.в.}}^3} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{\text{н}}^3} \int_{403}^{413} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv.$$

Для вычисления последнего интеграла учтем, что показатель экспоненты можно записать следующим образом:

$$\frac{m_0 v^2}{2kT} = \frac{v^2}{v_{\text{н.в.}}^2}.$$

Кроме того, воспользуемся теоремой о среднем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_{\text{н}}^3} \int_{403}^{413} v^2 e^{-\frac{v^2}{v_{\text{н.в.}}^2}} dv = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{403^3} \cdot 408^2 \cdot e^{-\frac{408^2}{403^2}} \cdot (413 - 403) = 0,02. \end{aligned}$$

Таким образом, только 2% от общего числа молекул имеют скорости, значения которых лежат в выбранном интервале. Если сместить интервал в другой участок скоростей, например, выбрать диапазон 1000÷1010 м/с (ширина интервала скоростей по-прежнему составляет 10 м/с, а середина интервала – 1005 м/с), то только 0,07% от общего числа молекул попадут в этот интервал скоростей.

Рассмотрим идеальный газ в однородном поле силы тяжести. Газ находится в состоянии термодинамического равновесия при некоторой температуре. Получим распределение молекул по потенциальным энергиям.

Рассмотрим равновесие некоторого объема газа, находящегося на высоте  $h$  от поверхности Земли, уровень которой выберем за условный ноль отсчета потенциальной энергии (рис. 10.6). Атмосферное давление на данном уровне обозначим как  $p_0$ . Пусть объем газа – это цилиндр высотой  $dh$ . На рисунке 10.6 указаны

давления, действующие на рассмотренный газовый цилиндр со стороны вышеш и нижележащих слоев атмосферы. Поскольку столбик газа находится в равновесии, то

$$(p + dp)S + dm g - pS = 0,$$

где  $S$  – площадь основания столбика;  $dm$  – его масса.

Выразив массу объема газа через его плотность как  $dm = \rho S dh$ , получим дифференциальное уравнение:

$$\rho S g dh + dp S = 0. \quad (10.14)$$

Плотность газа, в соответствии с уравнением состояния идеального газа, определяется как  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ , тогда уравнение (10.14) запишется в виде:

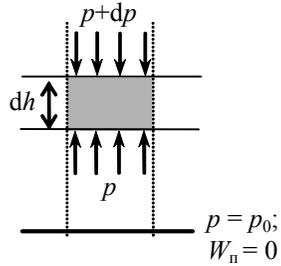
$$dp = -\frac{p\mu}{RT} g dh.$$

Знак “–” в этом уравнении показывает, что давление газа уменьшается с ростом высоты слоя от поверхности Земли. Разделим переменные в уравнении:  $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh$ , а потом проинтегрируем левую и правую части:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{\mu g}{RT} dh; \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g h}{RT}; \quad p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

Так как  $\frac{\mu}{R} = \frac{m_0}{k}$ , а  $m_0 g h = W_{\Pi}$ , то последнее выражение перепишем следующим образом:

$$p = p_0 e^{-\frac{W_{\Pi}}{kT}}. \quad (10.15)$$



Полученное соотношение (10.15) и есть барометрическая формула, которая определяет зависимость давления идеального газа от потенциальной энергии его молекул (от высоты), это распределение было получено Больцманом. Поскольку  $p = nkT$ , то (10.15) можно записать в виде

$$n = n_0 e^{-\frac{W_{\Pi}}{kT}}. \quad (10.16)$$

Уравнение (10.16) описывает распределение концентрации молекул в зависимости от их потенциальной энергии. Из него следует, что наибольшая концентрация молекул там, где  $W_{\Pi} = 0$ ,

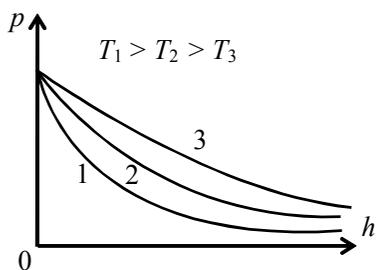


Рис. 10.7

т.е. вблизи поверхности Земли. График зависимости (10.15) представлен на рис. 10.7. Ж. Перрен в 1908 г. применил барометрическую формулу к распределению по высоте частиц эмульсии, что позволило ему экспериментально определить значение постоянной Больцмана.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какие предположения делаются при выводе закона распределения молекул по скоростям теплового движения?
2. Что происходит с максимальным значением функции распределения Максвелла при увеличении температуры?
3. Каков физический смысл площади под кривой распределения?
4. Может ли планета неограниченно долго удерживать изотермическую атмосферу?
5. Определите давление молекул идеального газа на стенки сосуда кубической форсы, если распределение молекул по проекциям скоростей описывается распределением Максвелла, а температура газа и концентрация молекул известны.

## 11. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Полная энергия термодинамической системы включает в себя кинетическую энергию механического движения системы как целого, потенциальную энергию системы во внешнем потенциальном поле и **внутреннюю энергию**  $U$  – энергию всех видов движения и взаимодействия частей системы, зависящую только от внутреннего строения системы.

В дальнейшем будем рассматривать термодинамические системы, которые макроскопически неподвижны и не находятся во внешних полях. Для таких систем полная и внутренняя энергия совпадают.

В термодинамике под внутренней энергией понимают лишь кинетическую энергию теплового движения молекул, потенциальную энергию взаимодействия атомов в молекуле, а также потенциальную энергию взаимодействия молекул между собой. Внутренняя энергия является однозначной **функцией состояния** термодинамической системы. Это означает, что значение внутренней энергии в каком-либо произвольно выбранном состоянии не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Иначе говоря, изменение внутренней энергии  $\Delta U_{12}$  при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода. В частности, если в результате какого-либо процесса система возвращается в исходное состояние, то изменение внутренней энергии равно нулю.

**Внутренняя энергия идеального газа.** В соответствии с определением идеального газа его внутренняя энергия будет представлять лишь кинетическую энергию движения молекул, поскольку потенциальная энергия взаимодействия молекул в идеальном газе отсутствует. Средняя кинетическая энергия молекулы газа определяется соотношением (9.6). Для  $\nu$  молей идеального газа кинетическая энергия его молекул:

$$W_k = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} N_A kT.$$

Это соотношение можно переписать для внутренней энергии как:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT. \quad (11.1)$$

Внутренняя энергия заданного числа молей идеального газа – однозначная функция его температуры. Она зависит только от состояния идеального газа и не зависит от того, каким образом газ пришел в данное состояние. Изменение внутренней энергии данной массы идеального газа в произвольном процессе

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T. \quad (11.2)$$

Обмен энергией между термодинамической системой и внешними телами может осуществляться двумя различными способами: совершением работы и теплообменом. **Работой**, совершаемой над системой, называется энергия, передаваемая термодинамической системе при силовом взаимодействии с ней. **Количеством теплоты (теплотой)** называется энергия, передаваемая термодинамической системе внешними телами путем теплообмена.

Теплообмен происходит между телами или частями одного и того же тела, нагретыми до различной температуры. Способы осуществления теплообмена – конвекция, теплопроводность и излучение.

**Работа газа.** При расширении или сжатии газа, заключенного в сосуд с подвижным невесомым поршнем площадью  $S$  можно определить работу, совершаемую внешними силами  $F$  по изменению объема газа. Если при действии внешних сил на поршень он совершает перемещение  $dx$ , то по определению элементарная работа внешних сил будет равна  $\delta A' = F dx$ , где  $F$  – проекция вектора равнодействующей внешних сил на перемещение поршня. В равновесном процессе при изменении объема газа в каждый момент силы давления газа уравновешивают внешние силы, а давление газа равно внешнему давлению. Тогда газ совершает элементарную работу  $\delta A = pS dx = p dV$ , где  $dV = Sdx$  – изменение объема газа. Окончательно **элементарная работа газа:**

$$\delta A = p dV. \quad (11.3)$$

Если изобразить процесс изменения объема газа на диаграмме  $(p, V)$ , то элементарная работа газа численно определяется площадью под бесконечно малым участком этого графика (рис. 11.1). Работа идеального газа в произвольном процессе будет численно равна площади под графиком этого процесса на диаграмме  $(p, V)$ :

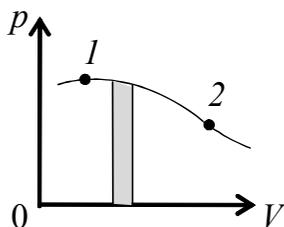


Рис. 11.1

$$A = \int_1^2 p dV. \quad (11.4)$$

Работа будет положительной, если газ увеличивает свой объем. Работа газа против внешних сил, когда газ уменьшает свой объем будет отрицательна. Работа идеального газа процессом перехода газа из одного состояния в другое.

В отличие от внутренней энергии системы, которая является однозначной функцией состояния этой системы, понятия теплоты и работы имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Они являются энергетическими характеристиками процесса. Работа и теплота не являются функциями состояния системы. Поэтому обозначение элементарной (бесконечно малой) работы, совершенной над системой, и элементарного (бесконечно малого) количества теплоты, переданного системе, соответственно  $\delta A$  и  $\delta Q$ . Бесконечно малое изменение внутренней энергии системы будем обозначать  $dU$ , поскольку бесконечно малое изменение функции состояния может быть определено как ее дифференциал.

**Первое начало термодинамики** является одним из основополагающих физических законов, полученным обобщением опытных фактов и устанавливает математическую связь между количеством теплоты, работой и приращением внутренней энергии термодинамической системы в произвольном процессе 1–2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}, \quad (11.4)$$

**количество теплоты, сообщенное системе, расходуется на приращение внутренней энергии этой системы и на совершенные системой работы над внешними телами.**

При сообщении системе бесконечно малого количества теплоты первое начало термодинамики записывается следующим образом:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (11.5)$$

Все физические величины, входящие в (11.5), могут быть как положительными, так и отрицательными. Если к системе подводится теплота, то  $\delta Q > 0$ , если теплота отводится, то  $\delta Q < 0$ . Общее количество теплоты, сообщаемое системе в процессе 1–2, равно алгебраической сумме количеств теплоты, сообщаемых системе на всех участках процесса:  $Q_{12} = \int_1^2 \delta Q$ . Если система совер-

шает работу над внешними телами, то считается, что  $\delta A > 0$ , если же над системой внешние силы совершают работу, то  $\delta A < 0$ . Работа, совершаемая системой в процессе 1–2, равна алгебраической сумме работ, совершаемых системой на всех участках процесса:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A.$$

Рассмотрим произвольный замкнутый процесс, совершаемый идеальным газом. **Циклом** называется процесс изменения состояния системы, в результате которого она возвращается в исходное состояние. На рисунке 11.2 изображен такой цикл – процесс 1-a-2-b-1.

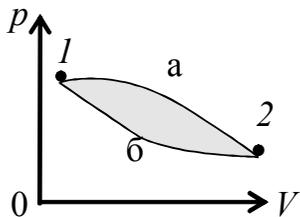


Рис. 11.2

Для отдельных процессов цикла можно записать выражение первого начала термодинамики следующим образом:

$$Q_{1a2} = A_{1a2} + \Delta U_{1a2}, \quad Q_{2b1} = A_{2b1} + \Delta U_{2b1}.$$

Если просуммировать почленно эти уравнения, то получим  $Q_{ц} = A_{ц}$ . Поскольку внутренняя энергия является функцией состояния, то ее суммарное изменение за цикл равно 0, все количество теплоты, полученное системой в циклическом процессе, идет на совершение работы.

Или можно сформулировать и обратное утверждение: для получения работы газа в цикле необходимо подведение теплоты к газу от внешней среды. При этом площадь цикла (заштрихованная на рис. 11.2) численно равна работе газа за цикл. Если цикл на

диаграмме  $(p, V)$  совершается по часовой стрелке, то работа газа за цикл положительна. Если цикл на диаграмме  $(p, V)$  совершается против часовой стрелки, то работа газа за цикл отрицательна и равна площади цикла, взятой со знаком “-”.

Применительно к циклам можно сформулировать первое начало термодинамики следующим образом: **невозможен циклический процесс, единственным результатом которого является совершение работы без получения энергии извне.** Механизм, реализующий такой процесс, исторически получил название **вечный двигатель первого рода.** Следовательно, первое начало термодинамики запрещает создание вечного двигателя первого рода.

### Контрольные вопросы и задания

1. Объясните физический смысл понятий работы термодинамической системы и работы над такой системой.
2. В чем заключается качественное различие между работой и теплообменом как формами передачи энергии?
3. Почему малое количество теплоты, сообщаемое термодинамической системе, не является полным дифференциалом?
4. Можно ли ввести функцию состояния «работа»?
5. Определите молярную теплоемкость идеального газа, расширяющегося по закону  $p^2V = \text{const}$ .
6. Определите теплоемкость одного моля одноатомного газа в некотором процессе, если в этом процессе он совершил работу  $A = (p_1V_1 - p_2V_2)$ .

## 12. ПОНЯТИЕ ТЕПЛОЕМКОСТИ. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Для определения количества теплоты, подведенного к идеальному газу в произвольном процессе можно воспользоваться первым началом термодинамики (11.4). Однако часто бывает удобно рассчитать необходимую величину непосредственно, не

прибегая к расчету работы и приращения внутренней энергии. С этой целью введем понятие теплоемкости. **Теплоемкость тела (системы)** численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу (системе), чтобы изменить его температуру на 1 К в данном процессе:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Из определения теплоемкости следует, что **теплоемкость**, как и количество теплоты **зависит от процесса**. Чтобы сравнивать между собой теплоемкости различных веществ, вводят понятие **удельной теплоемкости вещества**. Она численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить единице массы тела (системы), чтобы изменить ее температуру на 1 К:

$$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}.$$

Для газов удобно применять понятие **молярной теплоемкости**, которая определяется количеством теплоты, необходимым для изменения температуры 1 моля газа на 1 К:

$$c_m = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT}. \quad (12.1)$$

Рассчитаем молярные теплоемкости идеального газа в изопроцессах. Для этого подставим в (12.1) первое начало термодинамики (11.5):

$$c_m = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{(dU + \delta A)}{dT} = \frac{1}{\nu} \left( \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT} \right).$$

Для идеального газа  $dU = \frac{i}{2} \nu R dT$ , и молярная теплоемкость:

$$c_m = \frac{i}{2} R + \frac{1}{\nu} p \frac{dV}{dT}. \quad (12.2)$$

В **изохорном процессе** объем газа не изменяется,  $dV=0$ , из (12.2) получаем выражение для молярной теплоемкости идеального газа в изохорном процессе, которую обозначим  $C_V$ :

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (12.3)$$

Тогда внутренняя энергия идеального газа может быть также определена по формуле:

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T. \quad (12.4)$$

**В изобарном процессе** газ совершает работу и тогда выражение для молярной теплоемкости идеального газа (12.2) в изобарном процессе, которую обозначим  $C_p$  для одного моля приобретает вид:

$$C_p = \frac{i}{2} R + p \frac{dV_m}{dT}.$$

Вспользуемся уравнением Клапейрона– Менделеева для 1 моля газа (9.2), продифференцировав его выразим элементарную работу газа в изобарном процессе как  $p dV_m = R dT$ . Тогда:

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (12.5)$$

Нетрудно видеть, что (12.5) можно записать в виде:

$$C_p = C_V + R, \quad (12.6)$$

которое было впервые получено Р. Майером в 1842 г., а поэтому называется **уравнением Майера**.

**В изотермическом процессе** газ не изменяет свою температуру, поэтому  $dT = 0$ . Однако газ расширяется, следовательно, он совершает работу:  $\delta A \neq 0$ . Тогда молярная теплоемкость идеального газа в изотермическом процессе:

$$C_T = \frac{i}{2} R + p \frac{dV_m}{dT} = \pm \infty.$$

Кроме известных изопроцессов в термодинамике важную роль имеет адиабатический процесс. **Адиабатическим (или адиабатным) процессом называют процесс, который проходит без теплообмена с окружающей средой ( $Q=0$ )**. Тогда в этом процессе  $C_m = 0$ , первое начало термодинамики записывается в виде:  $0 = dU + \delta A$ , подставив соответствующие значения, получим:

$$0 = c_V \nu dT + p dV. \quad (12.7)$$

Из первого начала термодинамики, воспользовавшись уравнением Клапейрона-Менделеева (9.2) можно получить уравнение

адиабатного процесса. Для этого продифференцируем (9.2)  $p dV + V dp = \nu R dT$  и, выразив  $\nu dT$ , подставим в (12.7). В результате получим уравнение  $(p dV + V dp)C_V + R p dV = 0$ , которое перепишем в виде:  $(C_V + R) p dV + C_V V dp = 0$ . Далее разделим уравнение на  $pV$  и с учетом (12.6) получим дифференциальное уравнение  $\frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$ . Введя обозначение  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$  и выполнив интегрирование, получим  $\gamma \ln V + \ln p = \text{const}$  или  $\ln p V^\gamma = \text{const}$ . Откуда получается:

$$p V^\gamma = \text{const} . \quad (12.8)$$

Это **уравнение адиабатного процесса** впервые было получено французским математиком и механиком С. Пуассоном, называется **уравнением Пуассона**. Показатель степени в этом уравнении называется **показателем Пуассона для идеального газа (или показатель адиабаты)**. Нетрудно увидеть, что, согласно (12.3) и (12.5), следует:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} . \quad (12.9)$$

Из (12.9) следует что всегда  $\gamma > 1$  и в сравнении с изотермой график зависимости (12.8) будет идти круче изотермы в координатах  $(p, V)$ . Отметим, что в соответствии с (12.9) показатель адиабаты может принимать следующие значения:

– для одноатомного газа ( $i=3$ )  $\gamma = \frac{5}{3} \approx 1,67$ ;

– для двухатомного газа ( $i=5$ )  $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$ ;

– для трехатомного газа ( $i=6$ )  $\gamma = \frac{4}{3} \approx 1,33$ .

Во всех рассмотренных изопроцессах и адиабатном процессе молярные теплоемкости идеального газа постоянны и зависят только от внутреннего строения его молекул. **Процесс, в котором теплоемкость вещества не изменяется, называется политропным**. Получим уравнение такого процесса для идеального газа. Используем первое начало термодинамики в виде:

$C_m \nu dT = \frac{i}{2} \nu R dT + p dV$ , где  $\nu = \frac{m}{\mu}$ . Продифференцировав уравнение Клайперона–Менделеева (9.2), получим  $p dV + V dp = \nu R dT$ . Тогда

$$C_m \frac{pdV + Vdp}{R} = C_V \frac{pdV + Vdp}{R} + p dV,$$

$$pdV(C_m - C_V - R) = Vdp(C_V - C_m).$$

Воспользовавшись (12.6) и получим:

$$pdV(C_m - C_p) = Vdp(C_V - C_m).$$

Полученное дифференциальное уравнение можно решить методом разделения переменных:

$$\frac{dV}{V} \frac{C_m - C_p}{C_V - C_m} = \frac{dp}{p}.$$

Обозначим:

$$n = \frac{C_m - C_p}{C_m - C_V}, \quad (12.10)$$

тогда

$$n \ln V = -\ln p + \text{const}$$

или

$$pV^n = \text{const}. \quad (12.11)$$

Полученное соотношение (12.11) является уравнением политропного процесса, в котором теплоемкость газа остается постоянной величиной. Величина  $n$ , определяемая по (12.10), называется **показателем политропы** для данного газа. Если из (12.10) выразить молярную теплоемкость газа  $C_m$  в политропном процессе, то найдем:

$$C_m = C_V \frac{n - \frac{C_p}{C_V}}{n - 1} = C_V \frac{n - \gamma}{n - 1}. \quad (12.12)$$

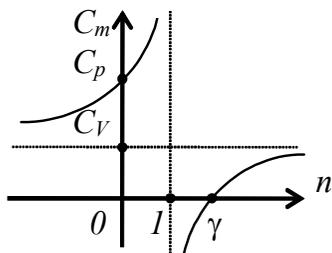


Рис. 12.1

График зависимости теплоемкости газа в политропном процессе от показателя политропы изображен на рис. 12.1. Нетрудно видеть, что при  $n=0$  из уравнения (12.11) следует  $pV^n = pV^0 = p = \text{const}$ , т.е. уравнение изобарного процесса. В этом случае, в соответствии с (12.12),  $C_m = C_p$ .

При  $n=1$  из уравнения (12.11) получаем  $pV^n = pV^1 = pV = \text{const}$ , т.е. уравнение изотермического процесса. В этом случае, в соответствии с (12.12),  $C_m \rightarrow \pm\infty$ . При  $n = \pm\infty$  из уравнения (12.11), извлекая корень  $n$ -й степени, можно получить  $\sqrt[n]{p}V = V = \text{const}$ , т.е. уравнение изохорного процесса. В этом случае, согласно (12.12),  $C_m = C_V$ . Следовательно, все изопроцессы идеального газа – частные случаи политропного процесса.

Полученные выражения для молярной теплоемкости газа в изопроцессах, например, в изохорном процессе (12.3) справедливы для идеального газа и дают хорошее согласие с экспериментальными значениями для многих газов при комнатной температуре. При расширении температурного диапазона наблюдаются систематические отклонения. Например, значения молярной теплоемкости азота при постоянном объеме при различных температурах приведены ниже.

$T, \text{K}$	80	150	250	400	600	1000	1500
$C_V, \text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$	20,31	21,03	20,87	20,95	21,79	24,39	26,52

Теоретическое же значение молярной теплоемкости азота при постоянном объеме, согласно (12.3), равно 20,8 Дж/(моль·К).

Отклонения обусловлены тем, что эффективный вклад в теплоемкость вносят только некоторые степени свободы. Происходит это из-за того, что молекулярно-кинетическая теория не учитывает квантовый характер движения молекул и атомов в молекулах. При низких температурах у молекулы возбуждаются только степени свободы поступательного движения. На враща-

тельные степени свободы приходится слишком малая энергия, ими пренебрегают. В этих условиях газ ведет себя как одноатомный. С ростом температуры начинают возбуждаться вращательные степени свободы, а затем – колебательные. Молекула перестает быть жесткой, расстояния между атомами в молекуле начинают меняться. Поскольку механическим колебаниям гармонического осциллятора присуща кинетическая и потенциальная энергия, то на колебательную степень свободы приходится энергия

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2} kT. \text{ Это и приводит к заниженным значениям теплоемкости идеального газа, получаемым согласно классической теорией теплоемкости, по сравнению с результатами эксперимента. Строгая количественная теория теплоемкости основывается на законах квантовой механики, где доказывается, что внутренняя энергия атомных систем может принимать дискретные значения.}$$

Выполним рассмотрение изопроцессов идеального газа с помощью первого начала термодинамики. Задачей является расчет работы, приращения внутренней энергии и количества теплоты.

**Изохорный процесс.** Поскольку в этом процессе  $V = \text{const}$ , то газ не совершает никакой работы над внешними телами:  $A_V = 0$ . В соответствии с первым началом термодинамики  $Q_V = \Delta U_V$ . Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, можно выразить изменение внутренней энергии идеального газа следующим образом:  $\Delta U_V = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p$ . Подводимое к газу количество теплоты можно рассчитать как:  $Q_V = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T$ .

**Изобарный процесс.** В данном процессе происходит изменение объема газа, поэтому он совершает работу над внешними силами. Поскольку  $p = \text{const}$  то, согласно (11.4),  $A_p = p \Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T$ . Из этого выражения следует физический смысл универсальной газовой постоянной: она численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при повышении его температуры на 1 К. Уравнение первого начала термодинамики

$$Q_V = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T.$$

версальной газовой постоянной: она численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при повышении его температуры на 1 К. Уравнение первого начала термодинамики

для изобарного процесса запишем следующим образом:  $\delta Q_p = dU_p + \delta A_p$ , или  $Q_p = \Delta U_p + A_p$ . Используя уравнение Клапейрона – Менделеева, выразим приращение внутренней энергии идеального газа следующим образом:  $\Delta U_p = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} p \Delta V$ .

Подводимое к газу количество теплоты определяется как

$$Q_p = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T.$$

**Изотермический процесс.** Поскольку в этом процессе  $T = \text{const}$ , то внутренняя энергия идеального газа не изменяется:  $\Delta U_T = 0$ . Уравнение первого начала термодинамики для такого процесса запишем в виде  $\delta Q_T = \delta A_T$ , или  $Q_T = A_T$ . Следовательно, при подведении к газу теплоты ( $Q_T > 0$ ), он расширяется, совершая положительную работу против внешних сил ( $A > 0$ ). Получим выражение для расчета работы газа в изотермическом процессе, проинтегрировав (11.4):

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Поскольку в данном процессе теплоемкость бесконечна, то для расчета подведенного к газу количества теплоты можно использовать лишь выражение первого начала термодинамики. Основной вывод при анализе превращения энергии в изотермическом процессе: получаемая от внешней среды теплота идет не на увеличение температуры газа, а возвращается обратно в среду в виде механической работы.

**Адиабатный процесс.** В таком процессе газ не получает теплоты из внешней среды:  $\delta Q_{\text{ад}} = 0$ , поэтому  $0 = dU_{\text{ад}} + \delta A_{\text{ад}}$ . Поэтому при расширении газа, когда он совершает положительную работу против внешних сил ( $A > 0$ ), изменение внутренней энергии газа отрицательно ( $\Delta U < 0$ ). Следовательно, температура газа уменьшается. Поэтому на диаграмме ( $p, V$ ) кривая адиабатического расширения газа (адиабата) будет располагаться ниже

кривой изотермического расширения (изотермы), проведенной из той же начальной точки (рис. 12.2). Таким образом, адиабата на диаграмме  $(p, V)$  проходит круче, чем изотерма. Расчет совершенной газом работы можно провести в соответствии с первым началом термодинамики:  $A_{\text{ад}} = -\Delta U_{\text{ад}}$ . Можно получить выражение для расчета

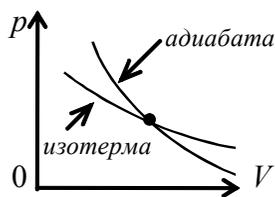


Рис. 12.2

работы в адиабатном процессе и с помощью определения работы (11.4). Для этого воспользуемся уравнением Пуассона  $pV^\gamma = p_1V_1^\gamma = \text{const}$ . Тогда

$$A_{\text{ад}} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} \, dV = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} \left[ V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma} \right].$$

Поскольку  $\gamma > 1$ , то последнее выражение удобно переписать в виде:

$$A_{\text{ад}} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma - 1} \left[ \frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Реальный адиабатный процесс должен происходить, с одной стороны, достаточно быстро, чтобы в системе не успел произойти теплообмен с окружающей средой, но, с другой стороны, достаточно медленно, чтобы процесс оставался равновесным.

### Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему молярная теплоемкость идеального газа в изобарном процессе всегда больше молярной теплоемкости в изохорном процессе.
2. От каких параметров зависит молярная теплоемкость идеального газа в изобарном процессе?
3. Объясните, почему теплоемкость идеального газа зависит от протекающего в газе процесса.
4. Сформулируйте первое начало термодинамики различными способами.
5. Что такое молярная теплоемкость газа?

### 13. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ. ЦИКЛ КАРНО

Первое начало не позволяет определить направление протекания процессов. Например, процесс самопроизвольной передачи теплоты от холодного тела к горячему не противоречит первому началу, если уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым телом. Однако опыты показывают, что такой процесс не происходит. Обобщение огромного экспериментального материала привело к необходимости расширения термодинамики. Было сформулировано второе начало термодинамики, позволившее превратить термодинамический метод исследования физических явлений в один из самых универсальных методов, применяемых в физике. Однако для того, чтобы можно было перейти к изучению второго закона термодинамики, необходимо рассмотреть предварительно целый ряд вопросов.

Введем понятие обратимого процесса. **Термодинамический процесс, называется обратимым, если он может быть проведен как в прямом, так и обратном направлениях через одни и те же состояния (но в обратной последовательности) так, что после осуществления прямого и обратного процесса в окружающей среде не возникает никаких остаточных изменений.** Процесс, который не удовлетворяет вышеуказанному условию, называется **необратимым процессом.**

Обратимый процесс является квазистатическим. Примерами обратимых процессов являются адиабатный и изотермический квазистатические процессы. Все реальные процессы протекают с конечной скоростью и сопровождаются трением и теплообменом. Следовательно, все реальные процессы, строго говоря, необратимы. Рассматривая в дальнейшем циклы, т.е. замкнутые процессы, происходящие с идеальным газом, будем считать цикл прямым, если на диаграмме ( $p, V$ ) он осуществляется в направлении по часовой стрелке, и обратным, если против часовой стрелки. Тогда работа газа в прямом цикле будет положительна, а в обратном – отрицательна.

Термодинамика рассматривает превращения энергии в системах в процессах их взаимодействия с окружающими телами. Один из видов таких превращений – превращение теплоты,

переданной системе, в работу. Для осуществления такого превращения созданы специальные устройства – **тепловые машины**. На рисунке 13.1 изображено принципиальное устройство произвольной тепловой машины.

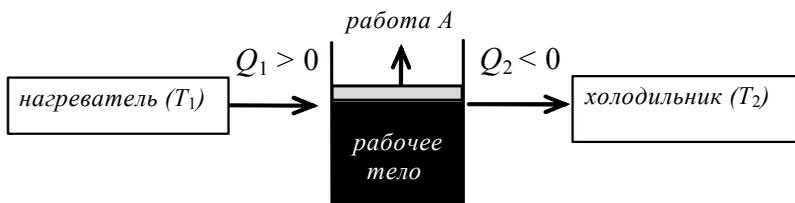


Рис. 13.1

Цель действия тепловой машины – получение работы  $A$ , которую над внешними телами будет совершать **рабочее тело**. Это может быть газ, находящийся в сосуде с подвижным поршнем, и т.п. Для совершения рабочим телом работы ему передается некоторое количество теплоты  $Q_1$  от устройства, называемого **нагревателем**. Для постоянного (циклического) совершения работы рабочим телом необходимо привести рабочее тело в исходное состояние, после чего оно вновь сможет получить количество теплоты  $Q_1$  от нагревателя. Возврат рабочего тела в исходное состояние (сжатие газа после его расширения) возможен при отведении от рабочего тела некоторого количества теплоты  $Q_2$  устройству, называемому **холодильником**. Очевидно, что температуры нагревателя  $T_1$  и холодильника  $T_2$  должны быть разными:  $T_1 > T_2$ . Мерой эффективности преобразования теплоты, подведенной к рабочему телу, в работу тепловой машины над внешними телами является **коэффициент полезного действия (КПД)** тепловой машины, который равен отношению работы, совершенной рабочим телом за один цикл, к количеству теплоты, полученному рабочим телом от нагревателя в этом цикле:

$$\eta = \frac{A_{ц}}{Q_1}. \quad (13.1)$$

Применяя первое начало термодинамики к циклу рабочего тела, можно записать:  $A_{ц} = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|$ . Тогда выражение (13.1) будет справедливо и в таком виде:

$$\eta = \frac{A_{ц}}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}. \quad (13.2)$$

Из последнего выражения следует, что КПД любой тепловой машины всегда меньше 100%, т.е. нельзя в циклическом процессе полностью превратить в работу всю теплоту, полученную рабочим телом от нагревателя. Если процессы теплообмена рабочего тела с нагревателем и холодильником сделать обратимыми, то КПД такой тепловой машины всегда будет выше, чем если бы эти процессы были необратимыми.

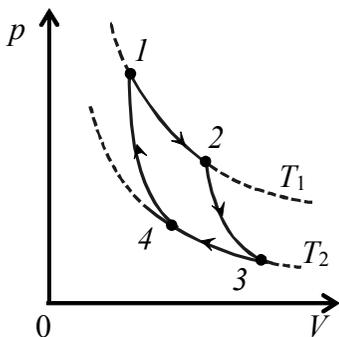


Рис. 13.2

В 1824 г. французский инженер Н.Л.С. Карно (1796–1832) в своей работе «Рассуждения о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу» предложил рассмотреть цикл тепловой машины, составленный только из обратимых процессов. У такой машины КПД должен быть больше, чем КПД любой другой машины, цикл которой состоит из необратимых процессов.

Если для подвода теплоты к рабочему телу необходимо совершить теплообмен с нагревателем, а теплообмен обратим только при равенстве температур рабочего тела и нагревателя, то осуществим тепловой контакт рабочего тела с нагревателем в изотермическом процессе. Это первый процесс цикла (на рис. 13.2 кривая 1–2 – изотерма), проходящий при температуре нагревателя  $T_1$ . Чтобы потом обратимо осуществить передачу теплоты холодильнику, т.е. изотермический процесс 3–4 при температуре холодильника  $T_2$ , необходимо перевести рабочее тело с одной изотермы на другую. Единственным обратимым процессом при этом может быть равновесный адиабатный процесс. На диаграмме ( $p, V$ ) он изображен кривой 2–3. Аналогичный процесс адиабатного

сжатия 4–1 понадобится для возвращения рабочего тела в исходное состояние. Получаемый цикл из четырех процессов носит название **цикла Карно**. Он является единственно возможным обратимым циклом рабочего тела при одном нагревателе и одном холодильнике в тепловой машине. **КПД цикла Карно будет максимальным среди КПД всех возможных циклов, которые рабочее тело может осуществить между нагревателем и холодильником с заданными температурами  $T_1$  и  $T_2$** . КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела и устройства машины, а является функцией только температуры нагревателя и холодильника. Данные утверждения составляют содержание **теоремы Карно**.

Рассчитаем КПД цикла Карно  $\eta_k$ . Согласно (13.2):

$$\eta_k = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}. \quad (13.3)$$

Поскольку теплота от нагревателя передается в изотермическом процессе 1–2, то:

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (13.4)$$

Аналогично, теплоту, передаваемую холодильнику в изотермическом процессе 3–4, определим по формуле:

$$Q_2 = A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (13.5)$$

Подставляя (13.4) и (13.5) в (13.3), получаем:

$$\eta_k = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (13.6)$$

Воспользуемся теперь уравнением Пуассона для связи параметров рабочего тела. Точки 2 и 3 лежат на одной адиабате, поэтому  $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$ . Кроме того, согласно уравнению состояния,

$\frac{p_2 V_2}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_2}$ . Из первого соотношения следует, что  $\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma$ ,

а из второго соотношения получим  $\frac{p_2}{p_3} = \frac{V_3}{V_2} \frac{T_1}{T_2}$ . Приравниваем правые части полученных выражений:

$$\frac{V_3}{V_2} \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma,$$

откуда следует, что:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \quad (13.7)$$

Аналогично для адиабаты 4–1 можно получить, что

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (13.8)$$

Поделим (13.7) на (13.8), тогда:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (13.9)$$

Подставив (13.9) в (13.6), найдем

$$\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (13.10)$$

В соответствии с **теоремой Карно**, эта формула определяет теоретический предел КПД всех возможных тепловых машин с нагревателем, имеющим температуру  $T_1$ , и холодильником, имеющим температуру  $T_2$ . Соответственно тепловая машина, работающая по циклу Карно, называется **идеальной тепловой машиной**.

### Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры процессов, которые приближенно можно считать обратимыми.

2. Будет ли обратимым круговым процессом испарение кипящей жидкости в закрытом сосуде с последующей конденсацией пара в жидкость?

3. Почему тепловую машину, работающую по циклу Карно, называют «идеальной»?

4. Каков физический смысл цикла Карно?

## 14. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ЭНТРОПИЯ

Первый закон термодинамики не позволяет установить направление протекания процессов. Он также не исключает возможности такого процесса, **единственным** результатом которого было бы превращение полученной теплоты нацело в работу. Первое начало допускает также построение циклически действующей тепловой машины, совершающей работу за счет охлаждения одного источника теплоты. Такой двигатель называется **вечным двигателем второго рода**.

Обобщение большого количества экспериментальных фактов привело к выводу о невозможности построения вечного двигателя второго рода и получило название **второго начала термодинамики**. Существует несколько эквивалентных друг другу формулировок второго начала термодинамики. Приведем две формулировки.

1. Р. Клаузиус (1850 г.) – невозможен циклический процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от тела, менее нагретого к телу, более нагретому.

2. У. Томсон (он же лорд Кельвин, 1851 г.) – невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение нацело в механическую работу всего полученного телом количества теплоты.

Сравнивая два способа расчета КПД цикла Карно, т.е. приравнивая соотношения (13.2) и (13.10) получим:

$$1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Откуда получаем, что  $\frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1}$ , или  $\frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_1}$ .

Назовем отношение количества теплоты, полученного системой в каком-либо процессе, к температуре этого процесса **приведенной теплотой**. В случае цикла Карно  $\frac{Q_1}{T_1}$  – приведенная теплота, полученная рабочим телом в процессе нагревания при

температуре  $T_1$ , а  $\frac{Q_2}{T_2}$  – приведенная теплота, полученная рабочим телом в процессе теплообмена при температуре  $T_2$  (поскольку  $Q_2 < 0$ , то это количество теплоты на самом деле передается от рабочего тела). Если переписать последнее соотношение в виде

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0, \quad (14.1)$$

то его можно сформулировать следующим образом: в равновесном обратимом цикле Карно суммарная приведенная теплота всех процессов равна 0.

Рассмотрим теперь произвольный обратимый цикл  $A-B-A$

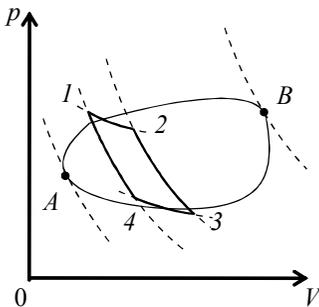


Рис. 14.1

(рис. 14.1). Разобьем этот цикл изотермами и адиабатами так, чтобы исходный цикл превратился в последовательность элементарных циклов Карно 1–2–3–4. Естественно, что чем ближе адиабаты 2–3 и 4–1 будут находиться друг к другу, тем точнее получится приближение последовательности циклов Карно к исходному циклу. Тогда можно сказать, что для осуществления

исходного цикла потребуется множество нагревателей и холодильников. Для каждого из элементарных циклов Карно будет справедливо соотношение (14.1) в виде:

$$\frac{\delta Q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\delta Q_{2i}}{T_{2i}} = 0.$$

Если же просуммировать все эти выражения по исходному циклу, то получим:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

В общем случае для произвольного замкнутого процесса можно получить  $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ . Данное утверждение носит название **неравенство Клаузиуса**, в котором знак равенства соответствует обратимым процессам, а неравенства – необратимым.

Математически  $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$  означает, что выражение  $\frac{\delta Q}{T}$  есть полный дифференциал некоторой функции  $S$ :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (14.2)$$

Такую функцию ввел и дал ей название **энтропия** (по-гречески «превращение») Р. Клаузиус в 1865 г. Энтропия – функция состояния термодинамической системы, дифференциал в обратимом процессе определяется соотношением (14.2). Для необратимого процесса энтропия вводится как:

$$dS > \frac{\delta Q}{T}. \quad (14.3)$$

Выведем расчетную формулу для изменения энтропии в обратимом процессе идеального газа. Подставим выражение (14.2) в первое начало термодинамики (11.5):  $TdS = dU + \delta A = dU + pdV$ , или:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V}, \quad (14.4)$$

после интегрирования (14.4) в некотором процессе 1–2:

$$\Delta S = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (14.5)$$

Ясно, что если процесс круговой (цикл), то состояния 1 и 2 совпадают, т.е.  $T_1 = T_2$  и  $V_1 = V_2$ , тогда  $\Delta S_{\text{ц}} = 0$ .

Рассмотрим основные свойства энтропии.

1. Энтропия – функция состояния термодинамической системы. Приращение энтропии  $\Delta S$  не зависит от процесса, а определяется только начальным и конечным состояниями системы.

2. Энтропия – величина аддитивная, энтропия макросистемы равна сумме энтропий ее отдельных частей.

3. С использованием энтропии существенно упрощаются термодинамические расчеты. Подставив определение энтропии (14.2) в первое начало термодинамики (11.5) **записывают основное уравнение термодинамики**:  $TdS = dU + \delta A$ .

4. Адиабатный процесс является изоэнтропным, протекающей при постоянной энтропии,  $\delta Q = 0$ ,  $dS = 0$ ,  $S = \text{const}$ .

5. В изотермическом процессе через энтропию легко выразить количество теплоты,  $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \frac{Q}{T}$ , или  $Q = T(S_2 - S_1)$ .

Если  $Q > 0$ , то  $S_2 > S_1$ . На диаграмме  $(T, S)$  изотермический процесс отобразится прямой линией, площадь под которой равна количеству теплоты. С учетом простоты цикла Карно в координатах  $(T, S)$ , представленного для примера на рис. 14.2, (1–2, 3–4 изотермические процессы при температурах  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, 2–3 и 4–1 адиабатные процессы) расчет КПД цикла Карно через энтропию элементарен:

$$\eta_{\text{к}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1(S_2 - S_1) + T_2(S_1 - S_2)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

6. С помощью понятия энтропия может быть сформулирована **теорема Нернста** (1906 г.), называемая **третьим началом термодинамики**: в непосредственной близости к абсолютному нулю температур все процессы в термодинамической системе протекают без изменения энтропии,  $T \rightarrow 0, dS \rightarrow 0$ .

7. Одно из важнейших свойств энтропии представляет собой еще одну формулировку второго начала термодинамики, это принцип возрастания энтропии изолированных систем: **энтропия изолированной системы не уменьшается**  $S_2 \geq S_1$ .

Реальные процессы, происходящие в природе, всегда необратимы. Значит, энтропия системы в этих процессах должна возрастать. Рост энтропии продолжается до тех пор, пока в системе не наступит состояние равновесия, после чего все процессы в системе прекращаются.

Распространение второго начала термодинамики, установленного для замкнутых систем, на всю Вселенную неправомерно. Такая экстраполяция может привести к выводу о неизбежности выравнивания температуры всех тел, к идее «тепловой смерти Вселенной» (ее выдвинул Р. Клаузиус). Согласно гипотезе Л. Больцмана, Вселенная все время пребывает в равновесном изотермическом состоянии, но в ее различных частях происходят отклонения от этого состояния. Оказалось, что вследствие тяготения однородное изотермическое распределение вещества во Вселенной не соответствует максимуму энтропии, потому что не является

наиболее вероятным. Поскольку Вселенная нестационарна, она расширяется и первоначально однородное вещество распадается под действием сил тяготения на галактики, звезды, планеты и т.д. Именно эти процессы и происходят с ростом энтропии, что полностью соответствует второму началу термодинамики. Эти процессы и позволяют избежать «тепловой смерти Вселенной».

До сих пор мы использовали термодинамический метод исследования и не интересовались внутренним строением изучаемых систем. Однако существует связь второго начала термодинамики с молекулярно-кинетической теорией строения вещества. Возвращаясь к вероятностному описанию процессов в термодинамических системах рассмотрим следующий пример. Имеется изолированный сосуд, поделим его мысленно на две половины. Если в сосуде одна молекула, то вероятность оказаться в одной половине  $P_1 = 1/2$ , если 2 молекулы, то  $P_2 = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ , продолжая для  $N$  молекул получим  $P_N = (1/2)^N$ , где  $1/2$  представляет собой отношение объемов половины сосуда к полному  $V/V_0$ . Прологарифмировав  $P_N = (V/V_0)^N$  получим:

$$\ln P_N = N \ln(V/V_0). \quad (14.6)$$

Используя (14.6) можно говорить о вероятности состояния термодинамической системы. Какие-то состояния являются более вероятными (например, равномерное распределение молекул газа по половинам сосуда), какие-то менее вероятными. Мы можем говорить о переходе системы из менее вероятных состояний в состояния более вероятные. Таким образом появляется по аналогии с энтропией направленность процессов. Л. Больцман доказал, что между энтропией системы и термодинамической вероятностью ее состояния существует связь:

$$S = k \ln P, \quad (14.7)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана. Эта формула позволяет дать **статистическое толкование второго закона термодинамики**, утверждающего, что энтропия изолированной системы не убывает: термодинамическая вероятность состояния изолированной системы во всех происходящих в ней процессах не может убывать.

Под  $P$  в формуле (14.7) понимают **термодинамическую вероятность состояния системы**. Она равна числу всевозможных микрораспределений частиц по координатам и скоростям, соот-

ветствующих данному термодинамическому состоянию (макросостоянию). Связь энтропии с вероятностью состояния системы в виде (14.7) можно проследить сравнив (14.6) с изменением энтропии в изотермическом процессе (14.5).

Таким образом, второй закон термодинамики является статистическим законом. Он выражает необходимые закономерности хаотического движения большого числа частиц, входящих в состав изолированной системы. Можно сказать, что энтропия мера упорядоченности (или наоборот хаоса) системы. В состоянии равновесия энтропия достигает максимума, так как это состояние наиболее вероятно. Система, предоставленная сама себе, движется в направлении равновесного состояния.

### **Контрольные вопросы и задания**

1. Приведите все известные вам формулировки второго начала термодинамики.

2. Дайте определение понятию энтропии. Как определяется изменение энтропии в обратимом процессе?

3. Энтропия термодинамической системы является функцией состояния. Как вы понимаете этот термин? Какие еще функции состояния вы знаете?

4. В каком термодинамическом процессе идеального газа энтропия остается неизменной? Почему?

5. Докажите, что для любой термодинамической системы изотерма и адиабата могут пересекаться не более, чем в одной точке.

## **15. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ГАЗАХ**

Ранее рассматривались равновесные состояния термодинамической системы. При нарушении равновесия возникают потоки вещества и энергии, при этом система стремится вернуться в равновесное состояние. Понятно, что подобные процессы необратимы. Поведение системы при этом можно описать, рассмотрев

потоки массы, импульса, энергии и т.п. Подобные явления, происходящие при нарушении равновесного состояния систем, называются **явлениями переноса**. Рассмотрим некоторые из них.

Молекулы газа, находясь в непрерывном тепловом хаотическом движении сталкиваются друг с другом. Под столкновениями молекул понимают достаточно сложный процесс взаимодействия между молекулами, в результате которого молекулы изменяют направление своего движения. Наличие сил взаимодействия (отталкивания и притяжения) между молекулами приводит к появлению потенциальной энергии их взаимодействия. Зависимость сил

взаимного притяжения и отталкивания молекул от расстояния между ними должна быть различной: на очень близких расстояниях преобладают силы отталкивания, а на более далеких – силы притяжения. На рисунке 15.1 показан примерный характер зависимостей  $F_{\text{пр}}(r)$  и  $F_{\text{от}}(r)$ . Так обозначены проекции сил притяжения  $\vec{F}_{\text{пр}}$  и отталкивания  $\vec{F}_{\text{от}}$  на направление

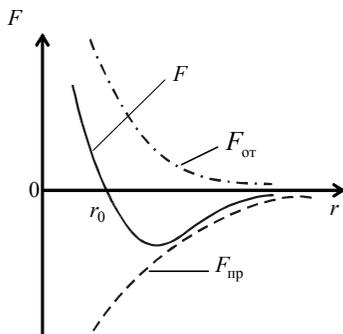


Рис. 15.1

вектора  $\vec{r}$ , проведенного в точку нахождения рассматриваемой молекулы из точки, где находится другая молекула, действующая на первую. Здесь же показана зависимость  $F(r)$ , где  $F(r) = F_{\text{пр}}(r) + F_{\text{от}}(r)$ .

Рассмотрим взаимодействие двух молекул. Процесс столкновения молекул можно рассмотреть с помощью зависимости потенциальной энергии от расстояния между центрами молекул (рис. 15.2). Наиболее часто используемый конкретный вид зависимости  $W_{\text{п}}(r)$  носит название потенциала Леннарда – Джонса и за-

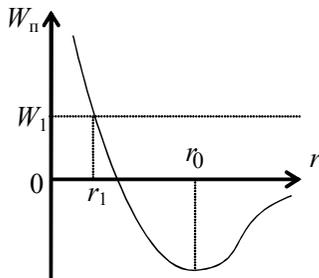


Рис. 15.2

писывается в следующем виде:  $W_{\text{п}}(r) = \frac{a_1}{r^{12}} - \frac{a_2}{r^6}$  где  $a_1$  и  $a_2$  – положительные постоянные коэффициенты, зависящие от вида газа.

Поместим начало отсчета в «центр» одной из молекул, рассмотрим сближение молекулы 2 из положения  $r = \infty$  с молекулой 1, неподвижно находящейся в положении  $r = 0$ . Молекула 2 движется с начальной кинетической энергией  $W_1$ . Поскольку силы взаимодействия молекул потенциальны, то, согласно **закону сохранения механической энергии**,  $W = \text{const}$ . Поскольку  $W_{\text{п}}(\infty) = 0$ , то кинетическая энергия молекулы 2 на большом удалении молекул друг от друга равна полной энергии:  $W_{\text{к}}(\infty) = W$ . По мере сближения молекул кинетическая энергия молекулы 2 увеличивается, а  $W_{\text{п}}(r)$  уменьшается. При расстоянии между молекулами  $r = r_0$  энергия кинетическая энергия достигает максимального значения. Далее молекула 2 попадает в зону преобладания действия сил отталкивания молекул. Следовательно, при дальнейшем сближении молекул ( $r < r_0$ ) кинетическая энергия молекулы 2 падает, а потенциальная энергия  $W_{\text{п}}(r)$  растет. В точке  $r = r_1$  полная энергия системы равна потенциальной:  $W = W_{\text{п}}(r_1)$ . В этом положении  $W_{\text{к}}(r_1) = 0$ . Именно это положение и соответствует наибольшему сближению молекул.

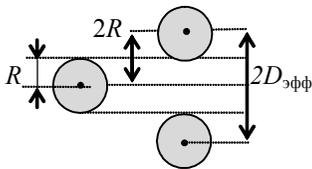


Рис. 15.3

Как оценить расстояние наибольшего сближения молекул? Назовем **эффективным диаметром молекулы**  $D_{\text{эфф}}$  минимальное расстояние между центрами молекул, на которое две молекулы сближаются при их столкновении. Площадь поперечного сечения «коридора» (рис. 15.3), в который должны попасть центры соседних молекул, чтобы столкнуться с данной, называется **эффективным сечением столкновения**:

$$\sigma = \pi D_{\text{эфф}}^2 = 4\pi R^2. \quad (15.1)$$

Очевидно, что  $D_{\text{эфф}}$  является функцией кинетической энергии, которой обладает молекула, т.е. определяется температурой газа. С увеличением температуры  $D_{\text{эфф}}$  уменьшается, как и сечение столкновения.

Рассчитаем число столкновений молекул за единицу времени. Пусть одна молекула в сосуде двигается со скоростью  $\langle v \rangle$ , а остальные неподвижны. Молекулы имеют диаметр  $D_{\text{эфф}}$  и между столкновениями движутся прямолинейно равномерно. Тогда исследуемая молекула за 1 с испытает соударения со всеми частицами, находящимися в цилиндре длиной  $\langle v \rangle \cdot 1 \text{ с}$  и основанием  $\sigma$  (см. рис. 15.3) объемом  $V$ . Число таких молекул, а значит и число столкновений будет равно

$$\langle z \rangle = nV = n\sigma \langle v \rangle.$$

Полученный результат с использованием простой модели является приближенным. Для получения точного решения задачи необходимо учесть относительное движение молекул. В статистической физике получается следующий результат для числа столкновений единицу времени:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}n\sigma \langle v \rangle. \quad (15.2)$$

Поскольку все столкновения произошли за 1 с, то промежутки времени между столкновениями равны

$$\tau = \frac{1}{\langle z \rangle}.$$

Назовем **средней длиной свободного пробега** молекулы расстояние, которое она пролетает между двумя последовательными соударениями:

$$\langle l \rangle = \langle v \rangle \tau = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}. \quad (15.3)$$

Оценим величину средней длины свободного пробега молекулы азота при температуре  $T = 300 \text{ К}$  и давлении  $p = 10^5 \text{ Па}$ .

Принимая во внимание, что  $R \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ , получаем, согласно (15.3)  $\langle l \rangle = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

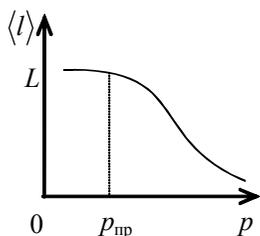


Рис. 15.4

Средняя длина свободного пробега зависит обратно пропорционально от концентрации молекул газа (15.3), а значит и давления газа. График зависимости средней длины свободного пробега  $\langle l \rangle$  от давления газа  $p$  при постоянной температуре изображен на рис. 15.4. При его построении учтено, что если давление газа снижается ниже давления предельно достижимого вакуума  $p_{пр}$ , то значение  $\langle l \rangle$  соответствует характерному размеру сосуда  $L$ , т.е. молекулы будут пролетать весь сосуд без соударения друг с другом.

В соответствии с (15.3) величина  $\langle l \rangle$  не должна зависеть от температуры газа  $T$ . Однако экспериментально подтверждено, что средняя длина свободного пробега слабо растет с увеличением температуры. Происходит это из-за того, что с ростом температуры уменьшается значение  $D_{эф}$ , и соответственно сечение столкновения  $\sigma$ .

## Диффузия

Рассмотрим неравновесное состояние системы молекул, вызванное нарушением равномерного распределения концентрации молекул по объему системы. При этом система может состоять как из молекул одного вещества (одинаковые молекулы), так и из молекул разных веществ (смесь разных молекул). Опыт показывает, что происходит выравнивание концентрации каждого компонента по всему объему системы. Неравновесный процесс, вызываемый молекулярным тепловым движением и приводящий к установлению равновесного распределения концентраций называется **диффузией**. Диффузия – один из процессов переноса. Поскольку в этом процессе рассматривается перемещение молекул по объему системы, то диффузия – это перенос массы. Диффундировать могут и молекулы примесей (компонентов смеси), и молекулы однокомпонентной системы (т.н. самодиффузия). Диффузия – необратимый процесс, один из источников диссипации (рассеяния) энергии в системе.

Выведем уравнение, позволяющее количественно описать процесс диффузии, на примере самодиффузии. Пусть в направлении оси  $OX$  установилось неравномерное распределение концентрации молекул (рис. 15.5). Выделим при  $x = x_0$  элемент поверхности  $S$ , слева от которого концентрация молекул  $n_1$ , а справа –  $n_2$ .

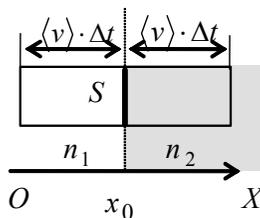


Рис. 15.5

Подсчитаем **поток частиц**, т.е. количество молекул, проходящее в единицу времени через этот элемент поверхности. Если средняя скорость движения молекул  $\langle \vec{v} \rangle$  направлена вдоль оси  $OX$ , то за время  $\Delta t$  все молекулы, находящиеся слева от этого сечения, из объема  $S \langle v \rangle \Delta t$  уйдут вправо. Число таких молекул  $n_1 S \langle v \rangle \Delta t$ . Аналогично из такого же объема, находящегося справа от сечения, за время  $\Delta t$  все молекулы уйдут влево. Число таких молекул  $n_2 S \langle v \rangle \Delta t$ . Назовем **плотностью потока молекул** их число, проходящее через единичное сечение, расположенное перпендикулярно вектору скорости, за единицу времени:

$$\Phi = \frac{N}{S \Delta t}. \quad (15.4)$$

Тогда поток частиц слева направо  $N_1 = n_1 \langle v \rangle S$ , а поток частиц справа налево  $N_2 = n_2 \langle v \rangle S$ . Поскольку эти потоки частиц идут в разных направлениях, то общий поток в положительном направлении оси  $OX$  будет определяться их разностью.

Необходимо учесть, что движение молекул вдоль выбранного направления можно рассматривать прямолинейным, если за время  $\Delta t$  скорость молекул не меняет своего направления. Это возможно, если молекулы пересекают сечение  $S$  без столкновений. Следовательно, мы должны учитывать движение только тех молекул, которые удалены от  $x_0$  на расстояние, не превышающее  $\langle l \rangle$ . Пусть при таком рассмотрении концентрация молекул изменяется

от  $n_{x_0-\langle l \rangle}$  до  $n_{x_0+\langle l \rangle}$ . Тогда суммарная плотность потока частиц через выбранное сечение будет:  $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \langle v \rangle (n_{x_0-\langle l \rangle} - n_{x_0+\langle l \rangle})$ .

Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\langle v \rangle (n_{x_0+\langle l \rangle} - n_{x_0-\langle l \rangle}) = -\langle v \rangle (n_{x_0+\langle l \rangle} - n_{x_0-\langle l \rangle}) \frac{2\langle l \rangle}{2\langle l \rangle} = \\ &= -2\langle l \rangle \langle v \rangle \frac{(n_{x_0+\langle l \rangle} - n_{x_0-\langle l \rangle})}{2\langle l \rangle} = -2\langle l \rangle \langle v \rangle \frac{dn}{dx}. \end{aligned}$$

В положительном направлении выбранной оси  $Ox$  при хаотичном тепловом движении перемещается только  $\frac{1}{6}$  часть всех молекул системы, поэтому окончательно:

$$\Phi = -\frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{dn}{dx}. \quad (15.5)$$

Первые три сомножителя полученного выражения определяют **коэффициент диффузии**:

$$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle. \quad (15.6)$$

Окончательно (15.5) можно записать следующим образом:

$$\Phi = -D \frac{dn}{dx}. \quad (15.7)$$

Уравнение (15.7) называется **законом диффузии (закон Фика)**, который был выведен А. Фиком в 1855 г.: **плотность диффузионного потока частиц пропорциональна градиенту концентрации частиц**. Знак “-” в (15.7) имеет физический смысл: при диффузии поток частиц направлен в сторону убывания их концентрации, т.е.  $\Phi > 0$  в таком направлении, когда  $\frac{dn}{dx} < 0$ . Из (15.7) следует выражение для диффузионного потока частиц:

$$N = -D \frac{dn}{dx} S. \quad (15.8)$$

Если умножить обе части (15.8) на массу одной молекулы  $m_0$ , то определим выражение для потока массы:

$$M = -D \frac{d\rho}{dx} S, \quad (15.9)$$

где  $\rho = m_0 n$  – плотность вещества.

Единица измерения коэффициента диффузии в СИ  $[D] = \text{м}^2 \text{с}^{-1}$ .

Проанализируем выражение коэффициента диффузии (15.6). С учетом (15.3) получим

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle = \frac{1}{3} \langle v \rangle \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}.$$

Из этого соотношения видно, что при увеличении давления коэффициент диффузии уменьшается, а с ростом температур увеличивается.

Необходимо различать хаотичное перемещение молекул по объему системы в результате теплового движения и направленное перемещение молекул в сторону уменьшения концентрации частиц в результате диффузии.

## Теплопроводность

Опыт показывает, что неравномерное распределение температуры в термодинамической системе приводит к ее выравниванию и установлению состояния теплового равновесия. Молекулярный перенос теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры, называется **теплопроводностью**. Рассматривая этот процесс, можно ввести понятие плотности теплового потока, аналогично плотности потока частиц (15.4):

$$q = \frac{Q}{S \Delta t}, \quad (15.10)$$

т.е. **плотностью теплового потока** назовем количество теплоты, проходящее через единичную поверхность за единицу времени.

Эмпирический закон теплопроводности носит название **закона Фурье**:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (15.11)$$

**плотность теплового потока при теплопроводности пропорциональна градиенту температуры в системе.** При этом перенос теплоты осуществляется в направлении снижения температуры.

Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  в (15.11) называется коэффициентом теплопроводности. Рассматривая процесс теплопроводности, как одно из явлений переноса (переносимое свойство – средняя кинетическая энергия молекул, поток энергии), по аналогии с диффузией можно получить выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle c_V \rho. \quad (15.12)$$

В системе СИ единицей измерения  $\lambda$  служит Вт/(м·К).

Рассмотрим зависимость  $\lambda$  от давления и температуры для идеального газа. Когда средняя длина свободного пробега много меньше размеров сосуда, из (15.12) следует, что от давления коэффициент теплопроводности не зависит (длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению, плотность прямо пропорциональна). С ростом температуры  $\lambda$  увеличивается, как и все коэффициент переноса.

Сравнение выражений (15.15) и (15.6) позволяет установить связь коэффициента диффузии и коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = D c_V \rho. \quad (15.13)$$

### **Вязкость жидкостей и газов**

Свойство жидкостей и газов, характеризующее сопротивление действию внешних сил, вызывающих их течение, называется **вязкостью (внутренним трением)**. Рассмотрим **ламинарное** течение жидкости (газа), т.е. такое, при котором жидкость(газ) перемещается слоями без перемешивания (lamina – полоска, пластина). Согласно гипотезе И. Ньютона, при таком течении при сдвиге соседних слоев среды относительно друг друга возникает сила противодействия этому сдвигу, которая пропорциональна скорости относительного смещения слоев. Жидкости, для которых эта

гипотеза оказывается верной, **называются ньютоновскими**. Таким образом, в ньютоновских жидкостях возникает сопротивление перемещению слоев относительно друг друга.

При перемещении всей жидкости в каком-то направлении каждая молекула жидкости участвует в двух движениях: хаотичном тепловом, средняя скорость которого  $\langle v \rangle$ , и направленном упорядоченном, скорость которого  $u$ . В силу теплового движения молекул будет происходить их перемещение из слоя в слой, при этом молекулы будут обмениваться своими импульсами. Таким образом, можно рассмотреть вязкость как перенос импульса.

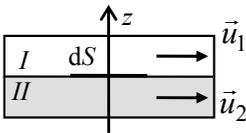


Рис. 15.6

Для количественного описания переноса импульса из одного слоя молекул в другой рассмотрим два соседних слоя бесконечно малой толщиной каждый (рис. 15.6). Скорости направленного движения молекул в этих слоях различны, их модули равны соответственно  $u_1$  и  $u_2$ . Через площадку  $dS$ , разделяющую слои, в обе стороны идет поток частиц, вызванный их тепловым движением со скоростью  $\langle v \rangle$ . Плотность этого потока в обе стороны одинакова:  $\Phi = \frac{1}{6} n \langle v \rangle$ . Соответственно, число частиц, переносимое через эту площадку за время  $dt$ , составляет

$dN = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS dt$ . Поэтому из слоя I «уносится» импульс  $dp' = dN m u_1$ , а «приносится» из слоя II импульс  $dp'' = dN m u_2$ .

Следовательно, общий баланс изменения импульса в слое составит

$$dp = dp'' - dp' = dN m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS dt m (u_2 - u_1).$$

**Плотность потока импульса** определим следующим образом:

$$K = \frac{dp}{dS dt} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m (u_2 - u_1). \quad (15.14)$$

Эта формула описывает плотность потока импульса молекул, переносимого из слоя со скоростью  $u_1$  в слой со скоростью  $u_2$ , если эти скорости не изменяются в результате столкновений мо-

лекулу при их движении вдоль оси  $z$ . Поскольку минимальное расстояние, на котором скорости молекул остаются неизменными, составляет  $\langle l \rangle$ , то преобразуем выражение (15.14):

$$K = -\frac{1}{6}n\langle v \rangle m(u_1 - u_2) \frac{2\langle l \rangle}{2\langle l \rangle} = -\frac{1}{3}n\langle l \rangle \langle v \rangle m \frac{du}{dz} = -\frac{1}{3}\rho \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{du}{dz}.$$

Обозначим произведение постоянных сомножителей в этом выражении через  $\eta$  и назовем его **коэффициентом внутреннего трения (динамической вязкостью)**:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho \langle l \rangle \langle v \rangle. \quad (15.15)$$

Тогда получим

$$K = -\eta \frac{du}{dz}, \quad (15.16)$$

**плотность потока импульса молекул, переносимого в каком-то направлении, прямо пропорциональна градиенту скорости частиц в этом направлении.**

Поскольку перенос импульса молекул из слоя в слой, т.е. изменение импульса молекул каждого выбранного слоя, согласно гипотезе Ньютона, связан с действием силы вязкого трения между слоями молекул, то можно определить величину этой силы. Вспомним выражение второго закона Ньютона, связывающее изменение импульса системы с действием внешних сил на систему  $dp = F dt$ , тогда плотность потока импульса молекул (15.14)

$$K = \frac{dp}{dS dt} = \frac{F}{dS}, \text{ и выражение для силы:}$$

$$F = \eta \frac{dv}{dz} dS, \quad (15.17)$$

где  $dS$  – величина поверхности, по которой действует сила  $F$ . Вектор направлен вдоль границы слоя, поэтому называется **тангенциальной** силой. Сила, отнесенная к площади действия, в механике называется **напряжением**. Уравнение (15.17) можно записать для тангенциального (касательного) напряжения  $\tau = F/dS$ :

$$\tau = \eta \frac{du}{dz}. \quad (15.18)$$

Полученные выражения (15.17) и (15.18) являются видами записи **закона Ньютона для внутреннего трения**.

В СИ единицей измерения  $\eta$  является паскаль-секунда:  $[\eta] = \text{Па}\cdot\text{с}$ .

Рассмотрим зависимость  $\eta$  от давления и температуры для идеального газа. Из (15.15) следует, что от давления коэффициент теплопроводности не зависит (длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению, плотность прямо пропорциональна). С ростом температуры  $\eta$  увеличивается.

### Связь коэффициентов переноса

Неравновесные процессы, рассмотренные нами как явления переноса, связаны с движением молекул. Перенос вещества, энергии и импульса в сплошной среде обусловлен столкновениями молекул друг с другом. Поэтому законы, описывающие явления переноса, аналогичны друг другу по математической форме записи. Коэффициенты в этих законах также оказываются связанными друг с другом, по найденным из опыта значениям коэффициента диффузии можно, например, определить остальные коэффициенты переноса.

Обобщим рассмотренные явления переноса следующим образом.

Явление	Что переносится	Закон	Коэффициент
Диффузия	Масса $dM = -D \frac{dn}{dx} dt dS$	$\Phi = -D \frac{dn}{dx}$	$D = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle$
Теплопроводность	Энергия $dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} dt dS$	$q = -\lambda \frac{dT}{dx}$	$\lambda = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \rho c_V = D \rho c_V$
Вязкость	Импульс $dp = -\eta \frac{dv}{dx} dt dS$	$K = -\eta \frac{dv}{dz}$	$\eta = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle \rho = D \rho = \frac{\lambda}{c_V}$

Формулы для коэффициентов переноса показывают, что коэффициенты внутреннего трения и теплопроводности не зависят от давления газа. Это было установлено Максвеллом и в свое время вызвало серьезные трудности в признании молекулярно-

кинетической теории газов и ее выводов. Формально все сводится к тому, что в выражениях (15.12) и (15.15) плотность  $\rho$  входит и в числитель, и в знаменатель, поскольку средняя длина свободного пробега  $\langle l \rangle$  обратно пропорциональна плотности. Поэтому коэффициенты переноса  $\eta$  и  $\lambda$  от плотности газа (и его давления) не зависят. Физически это объясняется тем, что для не слишком разреженных газов при неизменной температуре с ростом давления (а, следовательно, и плотности) в переносе импульса и энергии принимает участие все большее число молекул. Однако каждая из них за счет уменьшения средней длины свободного пробега переносит меньший импульс упорядоченного движения (при рассмотрении вязкости) или энергию (при рассмотрении теплопроводности). Поэтому в целом для всей массы газа перенос импульса и энергии не изменяется.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что такое средняя длина свободного пробега молекул?
2. Как изменится средняя длина свободного пробега молекул, если температуру газа увеличить в 4 раза при: а) постоянной концентрации молекул; б) постоянном давлении?
3. Применимо ли к разреженным газам уравнение состояния идеального газа?
4. Как объяснить независимость динамической вязкости газов от их плотности?
5. Определите вектор плотности потока молекул, если известны вектор градиента концентрации молекул газа и коэффициент диффузии.

## 16. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Свойства не сильно разреженных газов отличаются от свойств идеальных газов, подчиняющихся уравнению Клапейрона–Менделеева (9.2). Например, реальные газы могут быть переведены в жидкое состояния. Уравнение Клапейрона–Менделеева

не описывает подобные процессы. Экспериментальные исследования удельной теплоемкости, вязкости и других свойств газов показали, что эти свойства тоже значительно отличаются от соответствующих свойств идеальных газов. Отступления от законов идеальных газов связаны с тем, что между молекулами газа действуют силы, которые в теории идеальных газов не принимаются во внимание. Во всех реальных телах (твердых, жидких и газообразных) молекулы взаимодействуют друг с другом. Силы взаимодействия между молекулами в сильной степени зависят от расстояния между ними. Своеобразные свойства поверхностного слоя жидкостей, а также способность твердых тел сопротивляться растяжению свидетельствуют о том, что между молекулами вещества действуют силы взаимного притяжения. Малая сжимаемость сильно уплотненных газов, а также способность твердых тел и жидкостей сопротивляться сжатию указывают на то, что между молекулами действуют и силы взаимного отталкивания. Важно, что силы притяжения и отталкивания молекул действуют одновременно. Силы молекулярного притяжения часто называют **ван-дер-ваальсовыми силами** по имени нидерландского физика Я.Д. Ван-дер-Ваальса, который впервые начал учитывать межмолекулярное взаимодействие в газах.

### Уравнение Ван-дер-Ваальса

В первом приближении молекулы реального газа можно уподобить твердым шарикам диаметром  $d$ , между которыми действуют только силы взаимного притяжения. Такая модель газа, принятая Ван-дер-Ваальсом, позволила ему получить уравнение состояния реального газа более совершенное, чем уравнение Клапейрона – Менделеева.

Молекулы реального газа обладают конечными размерами и «собственным объемом», они не могут сблизиться на расстояние меньшее, чем эффективный диаметр молекулы. Учтем это, заменив в уравнении Клапейрона–Менделеева (9.2) полный объем сосуда, занимаемый молекул газа, с  $V_m$  на «свободный» объем  $V_m^* = V_m - b$ , где  $b$  – поправка Ван-дер-Ваальса. Значение  $b$  определяется собственным объемом молекулы, который равен

$v = \frac{1}{6} \pi d^3$ . Рассмотрим сферу радиусом  $d$ , центр которой совпадает с центром произвольной молекулы. Центры других молекул, соударяющихся с данной, не могут находиться внутри этой сферы, которая представляет собой «запрещенное пространство» объемом  $v_3 = \frac{4}{3} \pi d^3 = 8v$ . Поскольку при таком рассмотрении мы дважды учли каждую молекулу (один раз как ударяющуюся, другой раз как ударяемую), то в пересчете на одну молекулу запрещенный объем составляет  $\frac{1}{2} v_3 = 4v$ . Поправка Ван-дер-Ваальса представляет собой запрещенный объем, приходящийся на все  $N_A$  молекул в моле газа:  $b = 4vN_A$ .

Теперь учтем влияние сил взаимного притяжения молекул газа. Поскольку эти силы быстро убывают с ростом расстояния между молекулами, то можно считать, что каждая молекула взаимодействует только с теми, которые удалены от нее не далее некоторого расстояния  $R$ , называемого **радиусом молекулярного действия**. Соответственно, сфера радиусом  $R$  вокруг данной молекулы образует **сферу молекулярного действия**. Если рассмотреть молекулу вдали от стенок сосуда, то вся ее сфера молекулярного действия заполнена другими молекулами так, что результирующая сила притяжения для рассматриваемой молекулы равна нулю. У молекул, находящихся вблизи стенок сосуда, сферы молекулярного действия заполнены другими молекулами только частично. Можно показать, что для таких молекул результирующая сила притяжения направлена перпендикулярно стенке сосуда внутрь газа, причем она пропорциональна концентрации молекул газа:

$$F_k = a_k n, \quad (16.1)$$

где коэффициент  $a_k$  зависит от химической природы газа и расстояния от центра молекулы до стенки сосуда. Действие таких сил приводит к уменьшению давления реального газа на стенки сосуда по сравнению с давлением системы молекул идеального газа:

$$p = p_{\text{ид}} - p^*, \text{ или}$$

$$p_{\text{ид}} = p + p^* , \quad (16.2)$$

где  $p^*$  – давление, обусловленное действием сил взаимного притяжения молекул. Это давление можно определить по формуле

$$p^* = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^N F_k = \frac{1}{S} n \sum_{k=1}^N a_k ,$$

где  $N$  – общее число всех молекул пограничного слоя газа;  $S$  – площадь стенок сосуда.

Общее число молекул в пограничном слое  $N = SRn$ . Поскольку  $\sum_{k=1}^N a_k = N \langle a \rangle$ , где  $\langle a \rangle$  – среднее значение параметра  $a$ , то

$$p = \frac{n}{S} SRn \langle a \rangle = n^2 R \langle a \rangle = n^2 a' .$$

Выразим концентрацию молекул газ) в виде

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{\mu}{m_0} \frac{1}{V_m} ,$$

тогда

$$p^* = a' \frac{\mu^2}{m_0^2} \frac{1}{V_m^2} = \frac{a}{V_m^2} . \quad (16.3)$$

Коэффициент Ван-дер-Ваальса  $a$  зависит только от химической природы газа.

Подставим в уравнение Клапейрона – Менделеева объем  $V_m^* = V_m - b$  вместо  $V_m$  и давление  $p_{\text{ид}} = p + p^*$  вместо  $p$ . Тогда, с учетом (16.3), получим:

$$\left( p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT . \quad (16.4)$$

Это уравнение называется **уравнением Ван-дер-Ваальса** по имени ученого, впервые получившего его в 1873 г. Из (16.4) следует уравнение для произвольного числа  $\nu = \frac{m}{\mu}$  молей реального газа:

$$\left( p + \nu^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT. \quad (16.5)$$

Полученное уравнение (16.5) является приближенным для описания реального газа. Газ, в точности следующий этому уравнению называется ван-дер-ваальсовский газ. Существуют и другие уравнения, описывающие реальные газы. Анализ уравнения (16.5) представлен далее.

### Изотермы реального газа

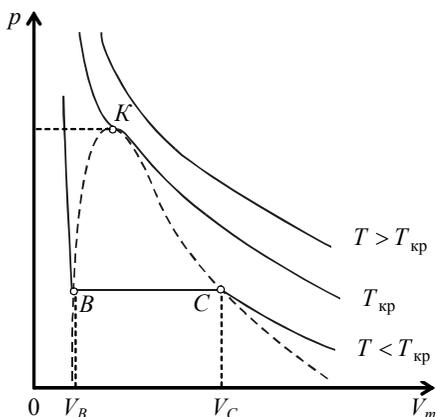


Рис. 16.1

Английский физик Т. Эндрус в 1861–1869 г. систематически экспериментально исследовал зависимость молярного объема углекислого газа от давления при изотермическом сжатии. Результаты этих опытов представлены на рис. 16.1. При температурах, меньших  $T_{кр}$ , на каждой изотерме имеется горизонтальный участок, на котором постоянна не только температура, но и давление, а молярный объем

может принимать любые значения в некотором интервале от  $V_B$  до  $V_C$ . Разность  $V_C - V_B$  возрастает с понижением температуры. При увеличении температуры эта разность стремится к нулю при приближении температуры к значению  $T_{кр}$ , которое называют

**критической температурой.** Точки  $B$  и  $C$  сливаются в одну точку  $K$  – **критическую точку** – на изотерме, соответствующей критической температуре (**критической изотерме**).

Эксперимент показал, что давление монотонно возрастает при уменьшении молярного объема на двух участках изотермы. При значениях молярного объема  $V_m > V_C$  углекислый газ находится в газообразном состоянии, а при  $V_m < V_B$  – в жидком. Малая сжимаемость жидкостей приводит к тому, что участок изотермы при малых значениях объема вещества представляет собой почти вертикальную прямую. На участке  $BC$  углекислый газ одновременно находится в двух агрегатных состояниях: жидком и газообразном. Точка  $C$  соответствует началу конденсации углекислого газа при изотермическом сжатии, а точка  $B$  – концу конденсации. Если процесс провести в обратном направлении, то в точке  $B$  жидкий углекислый газ начинает кипеть, а в точке  $C$  – заканчивается. Поэтому точка  $B$  на диаграмме соответствует состоянию кипящей жидкости, а точка  $C$  состоянию сухого насыщенного пара.

**Фазой** в термодинамике называют совокупность всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом, находящихся в одинаковом состоянии и ограниченных поверхностями раздела. Таким образом, влажный пар (участок  $BC$ ) представляет собой двухфазную систему, одна фаза которой – кипящая жидкость, а другая – сухой насыщенный пар.

Геометрическое место точек начала и окончания кипения на различных изотермах образует пограничную кривую, разделяющую диаграмму на области. На рисунке 16.1 эта кривая показана штриховой линией, а на рис. 16.2 – сплошной. Кривая  $bK$  (рис. 16.2) отделяет однофазную область  $I$

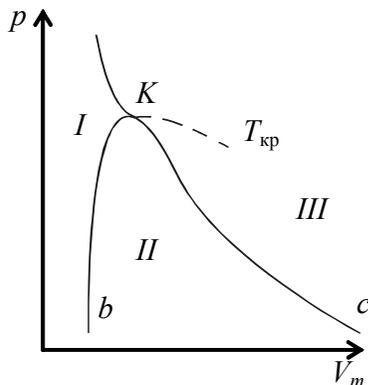


Рис. 16.2

жидкого состояния вещества от двухфазной области  $II$  его влажного пара. Кривая  $cK$  отделяет двухфазную область  $II$  от однофазной области  $III$  газообразного состояния вещества. При давлении

ях, больших критического (давления в точке  $K$ ), вещество находится либо в жидком, либо в газообразном состоянии. Границей между ними является **критическая изотерма**, т.е. изотерма при такой температуре, выше которой газ нельзя сжатием перевести в жидкое состояние.

Критическая точка – это особое состояние вещества. При приближении к нему исчезают различия между жидким и газообразным состояниями. В критическом состоянии обращаются в нуль разность молярных объемов кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, удельная теплота парообразования и поверхностное натяжение жидкости.

Проанализируем изотермы реального газа с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса (16.4). Это уравнение можно преобразовать так:

$$pV_m^3 - (pb + RT)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (16.6)$$

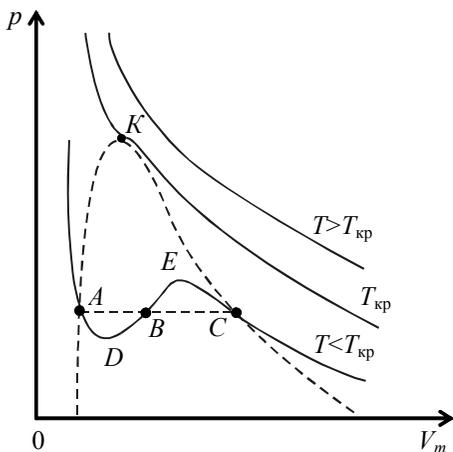


Рис. 16.3

Для конкретного газа это уравнение третьей степени относительно молярного объема может иметь либо один, либо три действительных корня. Изотермы для газа, подчиняющегося уравнению (16.6), показаны на рис. 16.3. При температурах ниже критической каждому значению давления соответствуют три точки изотермы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Волнообразные участки изотерм Ван-дер-Ваальса  $AD$ ,  $DE$ ,  $EC$  сильно отличаются от соответствующих горизонтальных участков экспериментальных изотерм Эндрюса. Опыты показывают, что участки  $AD$  и  $CE$  соответствуют **метастабильному состоянию вещества**.  $AD$  описывает поведение **перегретой жидкости** (жидкость не закипает в точке  $B$  при расширении). Аналогично, при медленном изотермическом сжатии газа можно получить **пере-**

**сыщенный пар**, соответствующий участку  $CE$ . Метастабильные состояния являются неустойчивыми, при внешних воздействиях вещество переходит на участок  $AC$ . Участок  $DE$  является термодинамически неустойчивым (одновременно возрастают и давление, и объем) и практически неосуществим.

Изотерма  $T = T_{кр}$  является критической, а точка перегиба этой изотермы – критической точкой. Значения критических параметров состояния  $p_{кр}$ ,  $T_{кр}$  и молярного объема  $V_{кр}$  для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, можно выразить следующим образом:

$$p_{кр} = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}, V_{кр} = 3b, T_{кр} = \frac{8}{27} \frac{a}{bR}. \quad (16.7)$$

### **Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля–Томсона**

Внутренняя энергия  $U$  реального газа равна сумме кинетической энергии  $U_k$  хаотического движения молекул и их взаимной потенциальной энергии  $U_{п}$ :

$$U = U_k + U_{п}. \quad (16.8)$$

Силы взаимного притяжения влияют на движение сравнительно небольшого числа молекул, находящихся вблизи стенок сосуда с газом. Поэтому можно считать, что  $U_k$  для моля реального газа совпадает с  $U_k$  для моля соответствующего идеального газа при той же температуре. Согласно (12.4) внутренняя энергия 1 моля идеального газа составляет  $U_{ид} = C_V T$ . Поскольку величина  $U_{п}$  обусловлена силами, зависящими от расстояния между молекулами, то значение  $U_{п}$  должно зависеть от среднего расстояния между молекулами. Это расстояние однозначно определяется молярным объемом  $V_m$ . Для каждого конкретного газа необходимо

рассчитывать значение  $U_{\text{п}}$ . Исключением является изохорный процесс, для которого  $U_{\text{п}} = \text{const}$ , а тогда  $dU_{\text{п}} = 0$ . Можно записать, что в изохорном процессе изменение внутренней энергии реального газа выражается так же, как для идеального газа:

$$dU = C_V dT.$$

Английские физики Д. Джоуль и У. Томсон экспериментально обнаружили, что при адиабатном расширении газа без совершения полезной работы температура газа изменяется. Процесс такого необратимого расширения называется **адиабатным дросселированием**, а явление изменения температуры в этом процессе – **эффектом Джоуля–Томсона**.

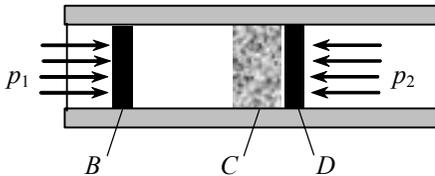


Рис. 16.4

Схема опытов Джоуля и Томсона приведена на рис. 16.4. В теплоизолированную трубу вставлена пористая пробка C (дроссель). С помощью подвижных поршней B и D давления газа слева и справа от пробки поддерживаются постоянными и равными соответственно  $p_1$  и  $p_2$  ( $p_1 > p_2$ ). Под действием перепада давления газ продавливается через пробку и при этом расширяется от давления  $p_1$  до давления  $p_2$ . При стационарном течении газа устанавливались постоянные температуры  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, для всех исследованных газов (за исключением водорода)  $T_1 > T_2$ , т.е. происходит охлаждение газа. Было установлено, что чем лучше газ следует уравнению Клапейрона-Менделеева, тем  $T_2$  ближе к  $T_1$ , для идеальных газов эффект отсутствует. Совершаемая газом работа расширения практически целиком расходуется на преодоление трения газа в пробке, а выделяющаяся при трении теплота  $Q_{\text{тр}}$  нагревает газ.

По первому началу термодинамики изменение внутренней энергии газа при прохождении через дроссель равно  $\Delta U = Q + A'$ . Сообщаемая газу теплота  $Q$  из-за отсутствия теплообмена между

газом и внешними телами равна  $Q_{\text{тр}}$ . Работа  $A'$ , совершаемая внешними силами над газом, равна сумме работ поршня  $B$  (работа  $A'_1$ ), поршня  $D$  (работа  $A'_2$ ) и работы сил трения  $A'_{\text{тр}}$ :  $A' = A'_1 + A'_2 + A'_{\text{тр}}$ . Поскольку работа газа против сил трения  $A_{\text{тр}} = -A'_{\text{тр}} = Q_{\text{тр}}$ , то

$$\Delta U = A'_1 + A'_2. \quad (16.9)$$

Пусть газ занимает объем  $V_1$  между поршнем  $B$  и дросселем при давлении  $p_1$ . Тогда работа по вытеснению газа из этого объема равна

$$A'_1 = \int_0^{V_1} p_1 dV = p_1 V_1.$$

Аналогично, если  $V_2$  – объем газа между дросселем и поршнем  $D$  при давлении  $p_2$ , то

$$A'_2 = - \int_0^{V_2} p_2 dV = -p_2 V_2.$$

Знак «минус» в последней формуле показывает, что поршень  $D$  противодействует перетеканию газа через дроссель. Подставляя последние соотношения в (16.9) и учитывая (16.8), получаем

$$\frac{m}{\mu} c_V \Delta T + \Delta U_n = p_1 V_1 - p_2 V_2 = -\Delta(pV).$$

Следовательно, при адиабатном дросселировании изменение температуры реального газа равно

$$\Delta T = - \frac{\mu}{m} \frac{\Delta U_n + \Delta(pV)}{c_V}. \quad (16.10)$$

Формула (16.10) выражает интегральный эффект Джоуля–Томсона для реального газа. В случае идеального газа  $U_{II} = 0$ , а поэтому

$$\Delta T = -\frac{\mu}{m} \frac{\Delta(pV)}{c_V} = -\frac{\Delta(RT)}{c_V} = -\frac{R}{c_V} \Delta T.$$

Это соотношение справедливо при  $\Delta T = 0$ , поэтому у идеальных газов эффект Джоуля–Томсона отсутствует.

### Контрольные вопросы и задачи

1. Чем отличается реальный газ от идеального?
2. Докажите, что поправка на объем газа в уравнении Ван-дер-Ваальса в 4 раза превосходит объем всех молекул в моле газа.
3. Что такое критическое состояние?
4. При каких условиях в эффекте Джоуля–Томсона наблюдается увеличение температуры реального газа, а при каких – уменьшение?
5. Сравните внутренние энергии реального и соответствующего идеального газов, находящихся в одинаковых объемах при одинаковых температурах.