

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

---

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

*Под редакцией Д.А. Иванова*

Москва  
Издательство МЭИ  
2021

УДК 53  
ББК 22.3  
К 937

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»  
в качестве учебного издания*

Рецензенты: О.С. Еркович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф.  
физики МГТУ им. Н.Э. Баумана;  
В.С. Булыгин, канд. техн. наук, проф. каф.  
общей физики МФТИ

**Авторы:** М.К. Губкин, А.В. Дедов, Д.А. Иванов,  
И.В. Иванова, В.В. Манухин, В.С. Спивак

К 937 Курс общей физики: учеб. пособие / М.К. Губкин, А.В. Дедов, Д.А. Иванов и др.; под ред. Д.А. Иванова. – М.: Издательство МЭИ, 2021. – 512 с.

ISBN 978-5-7046-2429-5

В пособии изложено развернутое и расширенное содержание лекций, которые читаются по курсу общей физики в НИУ «МЭИ».

Для аудиторных и самостоятельных занятий студентов младших курсов, а также для самостоятельных занятий студентов, обучающихся по дистанционной форме. Может быть полезно преподавателям при подготовке к проведению лекционных и практических занятий.

**УДК 53  
ББК 22.3**

ISBN 978-5-7046-2429-5

© Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7
Введение .....	8
Часть I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА .....	11
1. Кинематика поступательного движения материальной точки... ..	11
2. Динамика поступательного движения твердого тела.....	22
3. Работа и энергия в механике поступательного движения... ..	33
4. Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела .....	44
5. Работа по вращению тела и кинетическая энергия вращения... ..	57
6. Собственные свободные и затухающие механические колебания .....	65
7. Вынужденные механические колебания. Резонанс.....	75
8. Элементы специальной теории относительности.....	79
9. Основные понятия молекулярной физики макросистем. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.....	93
10. Элементы статистической физики.....	104
11. Первое начало термодинамики.....	115
12. Понятие теплоемкости. Применение первого начала тер- модинамики для идеального газа .....	119
13. Тепловые машины. Цикл Карно.....	128
14. Второе начало термодинамики. Энтропия.....	133
15. Явления переноса в газах .....	138
16. Реальные газы.....	150
Часть II. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.....	161
17. Электростатическое поле в вакууме. Напряженность поля.....	161
18. Работа сил электростатического поля. Разность потенци- алов. Потенциал.....	170
19. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме .....	176
20. Электрическое поле в диэлектриках.....	188
21. Проводники в электростатическом поле. Энергия элект- ростатического поля .....	203
22. Постоянный электрический ток.....	219
23. Магнитное поле постоянного тока. Магнитная индукция и способы ее расчета .....	232
24. Действие магнитного поля на движущийся заряд и про- водник с током .....	249
25. Электромагнитная индукция .....	263

26. Явления самоиндукции и взаимной индукции. Энергия магнитного поля .....	272
27. Магнитное поле в веществе. Напряженность магнитного поля.....	281
28. Диа-, пара- и ферромагнетики .....	289
29. Собственные свободные и затухающие электромагнитные колебания в контуре.....	302
30. Вынужденные электромагнитные колебания в контуре. Резонанс напряжений .....	311
31. Уравнения Максвелла .....	317
32. Электромагнитные волны и их свойства.....	330
<b>Часть III. ОПТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ.....</b>	<b>345</b>
33. Интерференция.....	345
34. Полосы равной толщины и полосы равного наклона.....	355
35. Дифракция Френеля.....	361
36. Дифракция Фраунгофера.....	374
37. Дифракционная решетка.....	382
38. Поляризация .....	393
39. Оптическая анизотропия.....	403
40. Интерференция поляризованного света .....	414
41. Дисперсия и поглощение света .....	422
42. Распространение сигналов в среде с дисперсией.....	433
43. Тепловое излучение.....	444
44. Квантовые свойства света.....	456
45. Волны де Бройля .....	465
46. Квантовая механика.....	476
47. Бозоны и фермионы .....	487
48. Ядерная физика .....	498
Физические константы.....	509
Список рекомендуемой литературы.....	510

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой второе издание «Курса общей физики», разработанного на кафедре общей физики и ядерного синтеза (ОФиЯС) Национального исследовательского университета «МЭИ». Изучаемый материал представлен в книге в виде 48 разделов, скомпонованных в соответствии с действующей программой курса общей физики для технических университетов и охватывающих все основные темы этой программы. Изложение теоретического материала дополнено множеством примеров, иллюстрирующих основные физические законы, соотношения и правила, используемые для описания физических явлений. Некоторые из этих примеров и задач входили в ранее изданные издательством МЭИ учебные пособия и задачки по отдельным разделам курса общей физики. Каждый раздел завершается списком контрольных вопросов, поиск ответов на которые поможет студенту глубже усвоить изучаемый материал.

Книга рассчитана в первую очередь на студентов 1–2 курсов и может быть широко использована для самостоятельной работы.

Предыдущее издание «Курса общей физики» вышло в свет в 2010 г. Настоящее издание существенно переработано и дополнено с учетом 40-летнего опыта преподавания физики на кафедре ОФиЯС. Названия изучаемых тем и разделов максимально соответствуют программе проведения лекционных и практических занятий по курсу. Существенно переработано содержание теоретического материала, уточнены формулировки законов, определения и обозначения физических величин. Приведены новые примеры решения задач.

Издание может оказаться полезным не только студентам энергетических вузов, но и других учебных заведений и технических университетов. Обсуждение содержания всех разделов сборника задач на методических семинарах кафедры помогло сформировать комплексный и логически непротиворечивый целостный подход к изложению курса общей физики на таком уровне подачи материала, который выделяет главные, фундаментальные основы физических явлений и законов, описывающих эти явления, и способствует наилучшему закреплению полученных знаний.

*Авторы*

## ВВЕДЕНИЕ

Физика – одна из основных фундаментальных наук, составляющих основу теоретической подготовки инженеров. Кроме того, физика играет роль базы, без которой невозможна успешная деятельность инженера в любой области современной техники. На протяжении последних трех столетий развитие техники неразрывно связано с физической наукой, которая научно обосновывала принципиально новые направления в технике. Фундаментальные законы, лежащие в основе физической науки, являются общими для описания всех наблюдаемых в природе и технике физических явлений.

С одной стороны, одна из важнейших задач курса общей физики состоит в формировании у студентов представлений о современной физической картине мира. С другой стороны, физика явилась научным фундаментом, на котором выросли такие новые области техники, как электро- и радиотехника, космическая техника и приборостроение, электронная и вычислительная техника, теплоэнергетика и ядерная энергетика. С третьей стороны, именно технические потребности общества создали предпосылки для развития отдельных областей физической науки: механики, термодинамики, оптики.

Важность и необходимость изучения курса общей физики в техническом университете можно определить следующим образом:

1) изучение курса важно для формирования представлений о явлениях и процессах, происходящих в природе, т.е. для выработки научного мировоззрения;

2) физика является базовой дисциплиной для большинства общеинженерных и специализирующих дисциплин;

3) развитие любой отрасли современного производства неразрывно переплетается с физикой, поэтому инженер любого профиля должен владеть физикой в такой степени, чтобы быть в состоянии активно и со знанием дела применять достижения научно-технического прогресса в своей деятельности.

Программа курса общей физики в технических университетах соответствует тем целям и задачам, которые возникли в современном инженерном образовании в связи с развитием совре-

менной техники. В результате изучения курса общей физики студент должен научиться постановке и выбору алгоритмов решения конкретных задач из различных физических областей, приобрести начальные навыки для самостоятельного овладения новыми методами и теориями, необходимыми в практической деятельности современного специалиста. Знания, умения и навыки, полученные при успешном освоении курса общей физики, являются основой и базой для последующего изучения теоретической механики, динамики и прочности машин, прикладной механики, электротехники и электроники, технической термодинамики, теории тепло- и массообмена, механики жидкости и газа. Безусловно, подготовка современного грамотного специалиста в области теплоэнергетики и теплотехники, обладающего необходимыми компетенциями в сфере своей профессиональной деятельности, невозможна без успешного освоения курса общей физики.

В современных условиях техническое образование должно рассматриваться не только и не столько как овладение необходимым объемом учебной информации, а как развитие у студентов в процессе обучения потребностей и способностей к самостоятельному получению новых общих и профессиональных знаний и умений при использовании многообразных источников информации.

Кафедра общей физики и ядерного синтеза Национального исследовательского университета «МЭИ» ведет преподавание курса общей физики более 40 лет. За это время на кафедре сложилась устойчивая научно-методическая система преподавания дисциплины и накоплен большой опыт организации лекционных, практических и лабораторных занятий. Для методического сопровождения учебного процесса на кафедре разработан и успешно используется учебно-методический комплекс по курсу общей физики для студентов, обучающихся по образовательным программам в области энергетики. Основу комплекса составляют учебные пособия, посвященные изучению теоретических основ дисциплины, выполнению лабораторного практикума и получению практических навыков по решению задач.

Предлагаемый «Курс общей физики» – составной элемент учебно-методического комплекса, во многом рассчитанный на самостоятельную работу. Цель пособия – помочь студенту в глу-

боком усвоении основных положений курса общей физики. Как показывает практика, большие трудности в правильном усвоении многих разделов курса общей физики возникают не из-за сложности в понимании дисциплины «физика» как таковой, а в следствие отсутствия навыков самостоятельного анализа изучаемых явлений, исходя из их комплексного рассмотрения.

Предлагаемая книга состоит из 48 разделов, посвященных рассмотрению физических законов, явлений и процессов, которые входят в программу изучения трех основных частей курса общей физики: «Механика. Молекулярная физика и термодинамика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и элементы квантовой физики».

В каждом разделе авторы стремились дать последовательное изложение основных положений теории, опираясь на которые обучающийся сможет научиться отвечать на вопросы, связанные с пониманием и объяснением явлений окружающего мира, и решать основные типы задач по физике. Примеры и задачи с решениями, приводимые одновременно с изложением теоретических основ, позволят обучающемуся обратить внимание на важнейшие аспекты этого материала, в том числе на факты и соотношения, которые при первом чтении понимаются недостаточно глубоко. Приводимые в каждом разделе контрольные вопросы необходимы для усвоения и понимания изученного материала. Основной своей задачей авторы считали такое изложение курса общей физики, которое вызывает минимальные трудности при самостоятельной работе студента.

## ЧАСТЬ II

### ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Взаимодействие между электрически заряженными частицами или телами, движущимися произвольным образом относительно инерциальной системы отсчета, осуществляется посредством **электромагнитного поля**, которое представляет собой совокупность двух взаимосвязанных полей: **электрического и магнитного**.

Особенность электрического поля состоит в том, что сила его воздействия на электрически заряженное тело (или частицу) не зависит от скорости движения тела. Поэтому электрическое поле удобно обнаруживать в пространстве по силовому действию на неподвижный электрический заряд. Особенность магнитного поля состоит в том, что сила его воздействия на движущиеся электрически заряженные тела (или частицы) пропорциональна скорости движения тела и направлена перпендикулярно этой скорости. **Электростатика** – раздел науки об электричестве, изучающий взаимодействие электрических зарядов, неподвижных относительно друг друга и систем координат. Электрическое поле, создаваемое заряженными телами, неподвижными относительно инерциальных систем отсчета, называется **электростатическим полем**.

#### 17. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ПОЛЯ

**Электрический заряд** – физическая величина, определяющая интенсивность электрических взаимодействий. Электрический заряд – фундаментальное свойство материи. Заряд – инвариантная величина, т.е. не зависит от скорости движения заряженного тела.

Экспериментально обнаружено существование двух типов электрических зарядов. **Положительно** заряженными называют

тела, которые действуют на другие заряженные предметы так же, как стекло, натертое кожей или шелком. **Отрицательно** заряженными называют тела, которые действуют на другие заряженные предметы так же, как эбонит или янтарь, натертые шерстью. Положительные и отрицательные заряды по-разному проявляют себя в парном взаимодействии: тела, обладающие зарядами одного типа, отталкиваются друг от друга, а тела, обладающие зарядами разных типов, притягиваются друг к другу.

Поскольку электрический заряд – это мера воздействия на тело других заряженных тел или электрических полей, то он всегда связан с определенным телом или частицей. Электрический заряд **дискретен**, т.е. существует минимальная величина электрического заряда (**элементарный заряд**), а электрический заряд любого тела может быть представлен как алгебраическая сумма целого числа элементарных зарядов. Элементарный положительный заряд – это заряд протона, элементарный отрицательный заряд – это заряд электрона (в дальнейшем будем обозначать их  $p$  и  $e$  соответственно).

Для количественного измерения электрических зарядов в СИ существует единица измерения, называемая кулон (обозначается Кл). 1 кулон – это электрический заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за 1 с при силе тока в проводнике, равной 1 А. Понятие силы тока и определение ее единицы мы введем позднее. Пока подчеркнем лишь то обстоятельство, что в СИ единица электрического заряда является не основной, а производной.

В результате точных электрических измерений было установлено, что  $e = -1,60219 \cdot 10^{-19}$  Кл,  $p = |e|$ . Приведем здесь же значение отношения заряда электрона к его массе:  $|e|/m = 1,7588 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. Относительная погрешность определения всех этих величин составляет  $\delta = 3 \cdot 10^{-6}$  %.

Система тел или частиц называется **электрически изолированной**, если между ней и внешними телами нет обмена электрическими зарядами (заряженными частицами). В такой системе могут образовываться новые электрически заряженные частицы, например, электроны при ионизации атомов и молекул. Однако

всегда при этом рождаются частицы, заряды которых противоположны по знаку и в сумме равны нулю. Для электрически изолированной системы тел справедлив фундаментальный закон физики – **закон сохранения электрического заряда**: алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.

Силы взаимодействия неподвижных электрических зарядов подчиняются основному закону электростатического взаимодействия, который был экспериментально установлен Г. Кавендишем в 1773 г. Впервые этот закон был опубликован в 1785 г. Ш. Кулоном, который исследовал взаимодействие заряженных маленьких шариков с помощью крутильных весов. Такие шарики в опыте Кулона можно было считать материальными точками. Назовем электрически заряженную материальную точку **точечным электрическим зарядом**.

**Закон Кулона** утверждает, что сила электростатического взаимодействия двух неподвижных точечных электрических зарядов, находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами и направлена вдоль соединяющей их прямой (рис. 17.1):

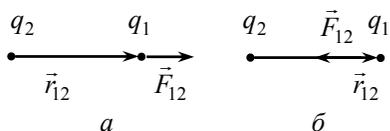


Рис. 17.1

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r}, \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r}, \quad (17.1)$$

где  $\vec{F}_{12}$  – сила, действующая на заряд  $q_1$  со стороны заряда  $q_2$ ;  $\vec{r}_{12}$  – радиус-вектор, соединяющий заряд  $q_2$  с зарядом  $q_1$ ;  $r = |\vec{r}_{12}|$ ;  $k$  – коэффициент пропорциональности;  $\vec{F}_{21}$  – сила, действующая на заряд  $q_2$  со стороны заряда  $q_1$ ;  $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$  – радиус-вектор, соединяющий заряд  $q_1$  с зарядом  $q_2$ . Из (17.1) следует, что  $\vec{F}_{12} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$  при  $q_1 q_2 > 0$  (рис. 17.1, а) – одноименно заряженные тела отталкиваются. При  $q_1 q_2 < 0$   $\vec{F}_{12} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$  (рис. 17.1, б) – разноименно заряженные тела притягиваются.

Коэффициент пропорциональности  $k$  в формуле (17.1) зависит от выбора системы единиц. В СИ принято, что

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н}\cdot\text{м}^2\cdot\text{Кл}^{-2}, \quad (17.2)$$

где  $\epsilon_0$  – коэффициент, определяемый из экспериментальных данных, называемый **электрической постоянной**:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2\cdot\text{Н}^{-1}\cdot\text{м}^{-2}. \quad (17.3)$$

Наличие электрического поля в какой-либо точке пространства можно зарегистрировать по силовому действию поля на помещенный в эту точку заряд. Назовем **пробным электрическим зарядом** положительный точечный заряд настолько малой величины, что его внесение в поле не вызывает изменения значений и перераспределения в пространстве зарядов, создающих исследуемое поле.

Количественной характеристикой силового действия электрического поля на заряженные частицы и тела служит векторная величина  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля. **Напряженность электрического поля** равна отношению силы, действующей со стороны поля на неподвижный пробный электрический заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к этому заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (17.4)$$

Электростатическое поле называется **однородным**, если во всех его точках векторы напряженности  $\vec{E}$  одинаковы, т.е. совпадают по модулю и направлению.

Сила, действующая со стороны электрического поля на помещенный в него произвольный точечный заряд, равна произведению заряда на напряженность поля в этой точке:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (17.5)$$

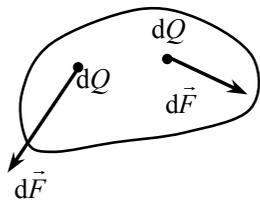


Рис. 17.2

В случае нахождения силы, действующей на заряженное тело конечных размеров, помещенное в произвольное электрическое поле, необходимо поступать следующим образом. Разобьем исследуемое заряженное тело на совокупность материальных точек, т.е. на точечные заряды  $dQ$  (рис. 17.2). Элементарная сила со стороны

поля, действующая на каждый точечный заряд определится как  $d\vec{F} = \vec{E}dQ$ , где  $\vec{E}$  – напряженность поля в точке расположения заряда  $dQ$ . Тогда общая сила, действующая на весь заряд  $Q$ , будет найдена путем суммирования элементарных сил:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int \vec{E}dQ, \quad (17.6)$$

где интегрирование проводится по всему объему тела.

Практическое вычисление интеграла (17.6) оказывается удобным, если электрический заряд распределен по всему заряженному телу непрерывно: вдоль некоторой линии, по поверхности или по объему. В этих случаях можно использовать понятия линейной, поверхностной и объемной плотностей заряда (рис. 17.3).

**Линейная плотность** электрического заряда  $\tau = \frac{dQ}{dl}$ , где  $dQ$  – заряд малого участка заряженной линии (пример: стержень, нить) длиной  $dl$  (рис. 17.3, а). Поэтому полный заряд тела можно найти как  $Q = \int_L \tau dl$ . Если заряд распределен по линии равномерно, то

полный заряд тела будет равен  $Q = \tau L$ . Размерность линейной плотности заряда в СИ:  $[\tau] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$ .

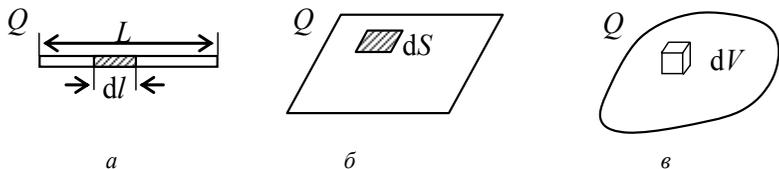


Рис. 17.3

**Поверхностная плотность** электрического заряда  $\sigma = \frac{dQ}{dS}$ , где  $dQ$  – заряд малого участка заряженной поверхности (пример: заряженная плоскость) площадью  $dS$  (рис. 17.3, б). Полный заряд тела можно рассчитать как  $Q = \int_S \sigma dS$ . При равномерно распределенном по поверхности заряде полный заряд тела будет равен

$Q = \sigma S$ . Размерность поверхностной плотности заряда в СИ:

$$[\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

**Объемная плотность** электрического заряда  $\rho = \frac{dQ}{dV}$ , где  $dQ$  – заряд малого элемента заряженного тела объемом  $dV$  (рис. 17.3, в). Полный заряд тела можно рассчитать как  $Q = \int_V \rho dV$ .

При равномерно распределенном по объему заряде полный заряд тела будет равен  $Q = \rho V$ . Размерность объемной плотности заряда в СИ:  $[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$ .

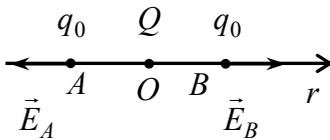


Рис. 17.4

В качестве примера определения напряженности электростатического поля заряженного тела по заданному распределению зарядов рассмотрим нахождение напряженности поля точечного заряда  $Q$  (рис. 17.4).

Модуль силы, действующей со стороны такого поля на помещенный в него пробный заряд  $q_0$ , определится, согласно (17.1), как  $F = k \frac{Qq_0}{r^2}$ , где  $r$  – расстояние от источника поля (заряда  $Q$ ) до исследуемой точки поля (заряда  $q_0$ ), отсчитываемое вдоль некоторой оси  $Or$ . Тогда

$$E = \frac{F}{q_0} = k \frac{Q}{r^2}. \quad (17.7)$$

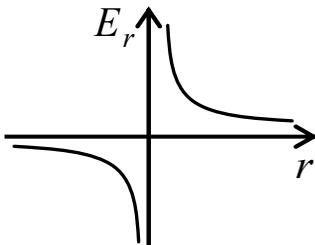


Рис. 17.5

На рисунке 17.4 показаны направления векторов напряженности поля в двух точках выбранной оси. На рис. 17.5 показан график зависимости проекции напряженности поля на выбранное направление оси от расстояния до точечного заряда при  $Q > 0$ .

Графическое изображение электростатического поля с помощью векторов напряженности  $\vec{E}$  в различных точках пространства очень неудобно. Более наглядным оказался метод изображения электростатических полей с помощью силовых линий, предложенный М. Фарадеем.

**Силовая линия** – воображаемая линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором напряженности поля в этой точке. Силовые линии электростатического поля изображают в соответствии с определенными правилами.

1. Силовая линия считается направленной так же, как вектор  $\vec{E}$  в рассматриваемой точке линии.

2. Густота (близость друг к другу) силовых линий в окрестности какой-либо точки пропорциональна  $|\vec{E}|$  в данной точке.

3. Силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

4. Силовые линии не соприкасаются и не пересекаются, т.к. в каждой точке поля вектор  $\vec{E}$  имеет только одно определенное направление. Данное правило справедливо во всех точках пространства, кроме тех, в которых расположены точечные заряды.

5. Силовые линии непрерывны в области пространства, в которой отсутствуют электрические заряды.

На рисунке 17.6 изображены силовые линии электростатического поля системы двух разноименных одинаковых по модулю электрических зарядов, называемой **электрическим диполем**.

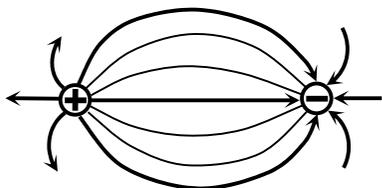


Рис. 17.6

При рассмотрении электростатического поля произвольной системы неподвижных точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_N$  было экспериментально показано, что результирующая сила  $\vec{F}$ , действующая на пробный заряд  $q$  в любой точке поля, равна геометрической сумме сил, действующих на заряд  $q$  со стороны каждого из зарядов  $q_i$ :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (17.8)$$

Из (17.8) легко получить, что

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (17.9)$$

Последнее соотношение выражает **принцип суперпозиции электрических полей (принцип независимости действия электрических полей)**: напряженность электрического поля, созданного системой зарядов в любой точке пространства, равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности.

Рассмотрим применение этого принципа для расчета напряженности поля системы дискретно и непрерывно распределенных зарядов.

**Пример 1.** Для электрического диполя (рис. 17.7, а) введем понятие вектора **электрического дипольного момента**:  $\vec{p} = q\vec{l}$ , определяемого произведением положительного заряда диполя на **плечо диполя**  $\vec{l}$ . Вектор  $\vec{l}$  направлен от отрицательного заряда диполя к положительному.

Для расчета модуля напряженности поля в любой точке  $A$  на оси диполя (рис. 17.7, б) выполним следующие действия:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-; E_A = E_+ - E_- = kq \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right).$$

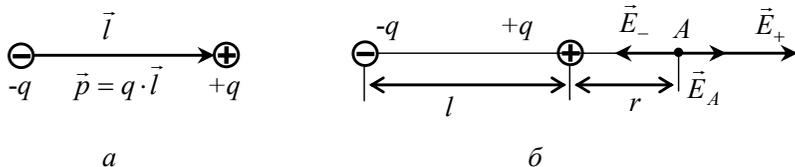


Рис. 17.7

При условии  $r \gg l$  последнее равенство приводится к виду

$$E_A = kq \frac{2l}{r^3} = 2k \frac{p}{r^3}.$$

Поскольку в рассматриваемом примере  $E_+ > E_-$ , то  $\vec{E}_A \uparrow \uparrow \vec{E}_+ \Rightarrow \vec{E}_A \uparrow \uparrow \vec{p}$ . Поэтому  $\vec{E}_A = 2k \frac{\vec{p}}{r^3}$ .

При расчете напряженности поля в точке на серединном перпендикуляре к оси диполя (рис. 17.8) геометрическое сложение векторов  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  при том же условии  $r \gg l$  дает другой результат:

$$E_D = |\vec{E}_+ + \vec{E}_-| = 2E_+ \sin \frac{\alpha}{2} \approx$$

$$\approx E_+ \alpha = E_+ \frac{l}{r} = k \frac{q}{r^2} \frac{l}{r} = k \frac{p}{r^3}.$$

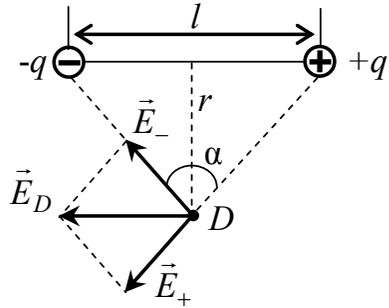


Рис. 17.8

**Пример 2.** Определим напряженность поля, созданного электрическим зарядом  $Q$ , непрерывно распределенным по однородному проволочному кольцу радиусом  $R$ , в точке  $A$  на оси кольца, удаленной на расстояние  $z$  от него (рис. 17.9).

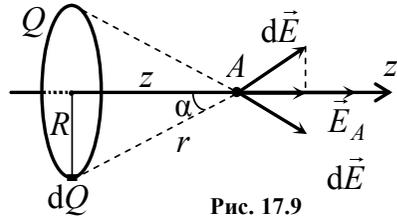


Рис. 17.9

Разобьем кольцо на элементы длиной  $dl$ . Тогда на каждом элементе кольца будет находиться элементарный заряд  $dQ = \tau dl = \frac{Q}{2\pi R} dl$ . Такой электрический заряд создает в точке  $A$  электрическое поле напряженностью  $d\vec{E}$ , причем

$$dE = k \frac{dQ}{r^2} = k \frac{dQ}{R^2 + z^2}.$$

Некоторые векторы  $d\vec{E}$ , определяемые различными элементами кольца, показаны на рисунке. Поскольку  $\vec{E}_A = \int d\vec{E}$ , то из условий симметрии очевидно, что,

$$E_A = \int dE \cos \alpha = \int dE \frac{z}{r} = \int dE \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Окончательно получим

$$E_A = \int k \frac{dQ}{R^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = k \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dQ = k \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте условия применимости закона Кулона для определения силы взаимодействия двух заряженных тел.
2. Сформулируйте определение напряженности электростатического поля.
3. Сформулируйте принцип суперпозиции электростатических полей.
4. Как определить силу, действующую на электрический заряд в электрическом поле?
5. Определите силу отталкивания двух одинаковых равномерно заряженных стержней, расположенный вдоль одной прямой, если длины стержней равны  $a$  и  $b$ , линейные плотности зарядов стержней равны  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , а ближайшие концы стержней находятся на расстоянии  $x$ .

## 18. РАБОТА СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ. ПОТЕНЦИАЛ

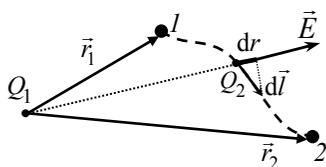


Рис. 18.1

Силы электростатического взаимодействия являются центральными, а, следовательно, консервативными. Таким образом, электростатическое поле является потенциальным. Определим работу

сил электростатического поля, созданного зарядом  $Q_1$ , по перемещению точечного заряда  $Q_2$  из точки 1 в точку 2 (рис. 18.1).

Элементарная работа сил потенциального поля по перемещению заряда на расстояние  $dl$ :  $dA = \vec{F} d\vec{l} = Q_2 E dl \cos(\hat{E}, \hat{d\vec{l}}) = Q_2 E dr$ . Тогда

$$A = Q_2 \int E dr = Q_2 \int_1^2 k \frac{Q_1}{r^2} dr = k Q_1 Q_2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (18.1)$$

Если заряды одноименны, то поле совершает положительную работу по их удалению друг от друга и отрицательную работу по их сближению.

Соотношение (18.1) показывает, что работа сил электростатического поля по перемещению заряда не зависит от формы траектории движения заряда, а определяется только положением начальной и конечной точек траектории. Итак, кулоновские силы консервативны, поэтому **циркуляция напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю:**

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы электростатическое поле было потенциальным. Тогда справедлива связь работы консервативной силы и изменения потенциальной энергии, т.е. работа сил электростатического поля равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dW_{\text{пот}} \Rightarrow A = W_1 - W_2. \quad (18.2)$$

Рассмотрим отношение работы поля по перемещению пробного заряда из одной точки пространства в другую к величине переносимого заряда:

$$\frac{A_{12}}{Q_2} = \frac{W_1 - W_2}{Q_2} = \int_1^2 E dr. \quad (18.3)$$

Поскольку полученное отношение не зависит от переносимого заряда и траектории его перемещения, то данная величина может быть принята в качестве характеристики электростатического поля. **Разностью потенциалов между двумя точками электростатического поля называется отношение работы сил поля по перемещению пробного электрического заряда из одной точки в другую к величине этого заряда:**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{Q_2} = \frac{W_1 - W_2}{Q_2}. \quad (18.4)$$

С учетом (18.3) и (18.4) получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E dr, \quad (18.5)$$

$$A_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) Q_2. \quad (18.6)$$

Введем теперь понятие **потенциала** точки электростатического поля. Из (18.4) следует, что  $\varphi_1 = \frac{W_1}{Q_2}$ ;  $\varphi_2 = \frac{W_2}{Q_2}$ .

**Потенциалом точки электростатического поля называется энергетическая характеристика поля, равная отношению потенциальной энергии пробного электрического заряда, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда.**

Ранее было отмечено, что потенциальная энергия – физическая величина, которая определена с точностью до некоторого произвольного значения. Следовательно, потенциал электрического поля также определен с точностью до произвольного значения, поэтому в любой точке пространства можно принять его значение, в частности, равным нулю. Если значение потенциальной энергии и соответственно потенциала в точке 2 принять равными нулю, то потенциал точки 1 согласно (18.5)

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}; \quad (\varphi_2 = 0). \quad (18.6)$$

Таким образом, **потенциал любой точки электростатического поля численно равен удельной работе (работе, отнесенной к величине заряда), совершаемой силами поля при перемещении пробного заряда из этой точки в ту точку, в которой потенциал поля условно принят равным нулю.** Выбор точки с нулевым потенциалом произволен и определяется удобством решения каждой конкретной задачи. Рассмотрим это на некоторых примерах.

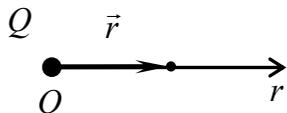


Рис. 18.2

**Пример.** Определим потенциал произвольной точки пространства, удаленной на расстояние  $r$  от точечного заряда  $Q$  (рис. 18.2).

Выберем точку, потенциал которой примем равным нулю. Пусть это будет точка, бесконечно удаленная от заряда  $Q$ . Поскольку работа по переносу пробного заряда из данной точки в бесконечность не зависит от формы траектории движения, то рассмотрим такое движение пробного заряда, при котором  $\vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{l}$  (т.е. вдоль прямой, совпадающей с осью  $Or$ ).

Тогда при условии  $\varphi(\infty) = 0$  получаем зависимость потенциала поля точечного заряда от расстояния

$$\varphi = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty k \frac{Q}{r^2} dr = k \frac{Q}{r}.$$

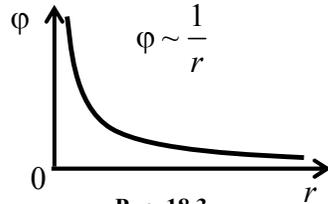


Рис. 18.3

График функции  $\varphi(r)$  показан на рис. 18.3.

**Пример.** Рассмотрим электростатическое поле, созданное системой точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Тогда потенциал произвольной точки пространства  $\varphi = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ , при этом  $\varphi_2 = 0$ . Вектор

напряженности поля  $\vec{E}$  в данной точке рассчитываем по принципу суперпозиции и находим искомый потенциал как алгебраическую сумму потенциалов:  $\varphi = \int_1^2 \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 (\varphi_2=0) \vec{E}_i d\vec{l} = \sum_{i=1}^n \varphi_i$ .

Сформулируем полученный вывод: **потенциал поля, созданного в данной точке системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности, т.е.**

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (18.7)$$

При рассмотрении поля, созданного непрерывно распределенным в пространстве зарядом, необходимо выполнить следующую последовательность действий:

- 1) выделить в объекте элемент заряда  $dQ$ , который в условиях данной задачи можно считать точечным;
- 2) выразить потенциал  $d\varphi$  поля этого заряда в рассматриваемой точке;
- 3) определить потенциал в заданной точке пространства:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad \text{или} \quad \varphi = \int_Q d\varphi.$$

Выясним физический смысл взаимосвязи напряженности (силовой характеристики электростатического поля) и потенциала (энергетической характеристики). Соотношение

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}; \quad (\varphi_2 = 0)$$

позволяет по заданной зависимости напряженности произвольной точки поля от ее координат найти зависимость потенциала этой точки от координат и, как следствие, рассчитать потенциал поля в любой точке. При этом потенциал произвольной точки поля определяется напряженностью поля на всем пути от этой точки до точки, где значение потенциала условно принято за нуль. Данное соотношение носит название **интегральной связи напряженности и потенциала электростатического поля**.

Из соотношения (18.5) следует, что  $\vec{E} d\vec{l} = -d\varphi$ . Левая часть равенства представляет собой скалярное произведение векторов  $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$  и  $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$ , поэтому

$$\vec{E} d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz .$$

Поскольку бесконечно малое приращение потенциала  $d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz$ , то для проекций вектора  $\vec{E}$  получаем:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right).$$

Таким образом,

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi . \quad (18.8)$$

Последнее равенство можно записать иначе — в операторной форме:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad (18.9)$$

где  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ ;  $\vec{\nabla}$  носит название оператора Гамильтона.

Выражения (18.8) или (18.9) определяют **дифференциальную связь напряженности и потенциала электростатического поля**. Они позволяют по известной зависимости потенциала от координат определить зависимость напряженности поля от координат и найти напряженность поля в любой точке.

Поскольку градиент скалярной функции – это вектор, направленный в сторону ее наибольшего возрастания, то из (18.9) следует, что вектор напряженности электрического поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала. Поэтому и силовые линии поля направлены в сторону убывания потенциала.

Если известны значения потенциала в различных точках пространства, то через точки с одинаковыми значениями потенциала можно провести поверхности, которые называются **эквипотенциальными**. Графически представляя электростатическое поле на плоском листе бумаги, будем изображать линии пересечения этих поверхностей с плоскостью листа в виде **эквипотенциальных линий** (эквипотенциалей). Докажем, что силовые линии перпендикулярны эквипотенциалам.

Разность потенциалов между двумя точками пространства

(рис. 18.4) согласно (18.5)  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ . Если эти точки принадлежат одной эквипотенциали, то  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , а вектор  $d\vec{l}$  направлен вдоль эквипотенциали.

Равенство скалярного произведения  $\vec{E} d\vec{l}$  нулю возможно лишь при

$(\vec{E}, d\vec{l}) = \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, соотношение (18.9) позволяет по заданному распределению потенциала поля в пространстве восстановить картину его силовых линий (рис. 18.5).

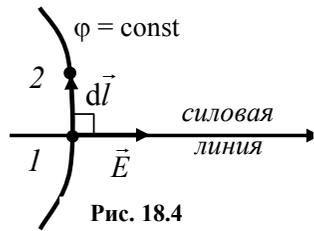


Рис. 18.4

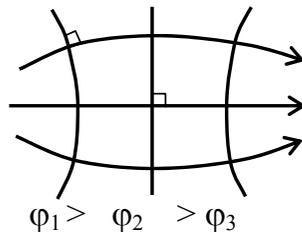


Рис. 18.5

## Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется работа, совершаемая силами электростатического поля по перемещению точечного электрического заряда?
2. Сформулируйте определения потенциала и разности потенциалов электростатического поля.
3. Как связаны между собой силовая и энергетическая характеристики электростатического поля?
4. Запишите выражения для дифференциальной связи между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Сформулируйте физический смысл записанного выражения.
5. Запишите выражения для интегральной связи между напряженностью и потенциалом электростатического поля. Сформулируйте физический смысл записанного выражения.

## 19. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

Ранее были введены две физические величины, характеризующие электрическое поле, – напряженность и потенциал. **Принцип суперпозиции** и соотношение (18.7) позволяют рассчитать эти величины для заданной системы зарядов в пространстве независимо друг от друга, а интегральная и дифференциальная связь между ними дают возможность определить одну из величин, зная другую. Однако практическое вычисление интегралов и может быть весьма затруднительным.

Рассмотрим иной метод определения напряженности электростатического поля – метод, основанный на использовании теоремы Остроградского–Гаусса. Она была выведена в 1828 г. русским математиком М.В. Остроградским для произвольного векторного поля. Немецкий физик и математик К.Ф. Гаусс в 1839 г. применил ее к расчету электростатических полей.

Для рассмотрения этой теоремы введем понятие потока вектора напряженности. Проведем в электрическом поле произвольную поверхность площадью  $S$  (рис. 19.1). Назовем **элементарным потоком вектора напряженности электростатического поля** через малый участок (элемент) поверхности  $dS$  величину

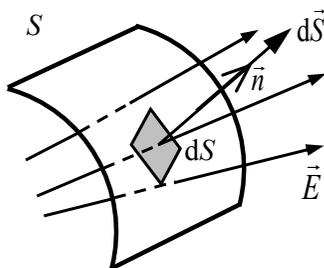


Рис. 19.1

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) = E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}), \quad (19.1)$$

где  $d\vec{S}$  – вектор площади элемента поверхности;  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности в месте расположения элемента  $dS$ . Справедливы соотношения:  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ;  $|d\vec{S}| = |\vec{n}| dS = dS$ . Малый элемент поверхности  $dS$  выбирается таких размеров, чтобы в его пределах можно было считать поле однородным, а кривизну поверхности можно было бы не учитывать.

Поток вектора напряженности электростатического поля через всю поверхность  $S$  находится как алгебраическая сумма потоков сквозь все малые участки этой поверхности:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (19.2)$$

При вычислениях по формуле (19.2) договоримся направлять все векторы  $\vec{n}$  в одну и ту же сторону по отношению к поверхности  $S$ . Например, в случае замкнутой поверхности  $S$  в дальнейшем будем считать векторы  $\vec{n}$  **внешними нормальными** к поверхности, т.е. направленными **из области, ограниченной этой поверхностью**.

Из (15.21) следует, что  $\Phi = 0$ , если во всех точках поверхности  $S$  силовые линии поля перпендикулярны векторам  $\vec{n}$ , т.е. «скользят» по поверхности. С другой стороны, поток максимален, если поверхность  $S$  расположена перпендикулярно силовым линиям в каждой точке пространства. Таким образом, **поток вектора напряженности через поверхность пропорционален числу силовых линий, пересекающих эту поверхность**.

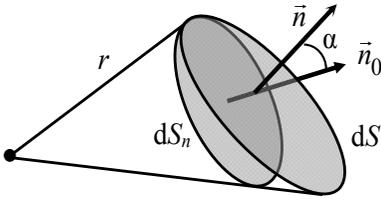


Рис. 19.2

Вспомним понятие **телесного угла**. Это часть пространства, ограниченная прямыми, проведенными из одной точки (вершины угла) ко всем точкам замкнутой кривой (рис. 19.2). Мерой телесного угла является

отношение площади элемента  $dS_n$ , вырезаемого телесным углом на сфере радиусом  $r$  с центром в вершине угла, к квадрату радиуса:

$$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2} = \frac{dS \cos\alpha}{r^2}.$$

Единицей телесного угла в СИ служит угол, опирающийся на сферу радиусом 1 м и вырезающий на ней элемент площадью 1 м<sup>2</sup>. Такой телесный угол равен 1 стерадиан (обозначается 1 ср). Поскольку площадь поверхности всей сферы равна  $4\pi r^2$ , то телесный угол, опирающийся на всю сферу, равен  $4\pi$  ср.

Рассмотрим точечный заряд  $Q$ , охваченный произвольной замкнутой поверхностью (рис. 19.3). Выделим на этой поверхности элемент площадью  $dS$ , «вырезанный» из нее телесным углом  $d\Omega$  с вершиной в заряде. Элементарный поток вектора напряженности поля точечного заряда через элемент  $dS$  согласно (19.1) в СИ запишем следующим образом:

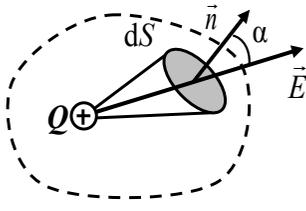


Рис. 19.3

$$d\Phi = E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega.$$

Полный поток вектора напряженности через замкнутую поверхность

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (19.3)$$

Кружок на значке интеграла означает, что интегрирование производится по замкнутой поверхности. Если произвольная замкнутая поверхность охватывает точечные заряды  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , то можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}_1 d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \\ \dots \\ \oint_S \vec{E}_n d\vec{S} = \frac{Q_n}{\epsilon_0}, \end{cases}$$

где  $\vec{E}_i$  – напряженность поля каждого из зарядов. Складывая уравнения приведенной выше системы, получаем:

$$\sum_{i=1}^n \oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i d\vec{S} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0}. \quad (19.4)$$

Итак, если электрические заряды находятся внутри замкнутой поверхности, то поток вектора напряженности через эту поверхность пропорционален алгебраической сумме этих зарядов.

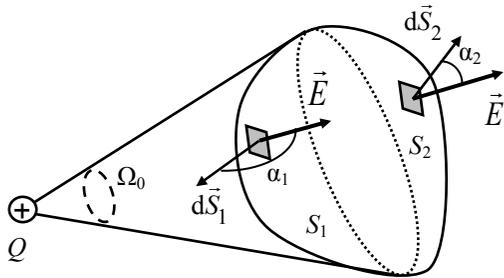


Рис. 19.4

Рассмотрим теперь точечный заряд  $Q > 0$ , расположенный вне произвольной замкнутой поверхности (рис. 19.4).

В этом случае касательная коническая поверхность с вершиной в точке расположения заряда разбивает поверхность  $S$  на две части:  $S_1$  и  $S_2$ . Полный поток напряженности через всю поверхность  $S$  равен алгебраической сумме потоков через эти части:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Для всех элементов поверхности  $S_1$  углы между векторами  $\vec{E}$  и внешними нормальными  $\vec{n}$  (при  $Q > 0$ ) – тупые; для всех элементов поверхности  $S_2$  – острые. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) < 0, \\ \Phi_2 &= \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_2} E dS \cos(\vec{E}, \vec{n}) > 0.\end{aligned}\quad (19.5)$$

Поскольку поверхности  $S_1$  и  $S_2$  видны из точки расположения заряда  $Q$  под одним и тем же телесным углом  $\Omega_0$ , то согласно (19.3)  $|\Phi_1| = |\Phi_2| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_0$ . Отсюда с учетом (19.5) получаем

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0. \quad (19.6)$$

Обобщим полученные выводы. **Поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность пропорционален алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью:**

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \text{ охв}}{\epsilon_0}. \quad (19.7)$$

Полученное утверждение называется **теоремой Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме**. Замкнутую поверхность  $S$ , фигурирующую в формулировке теоремы, часто называют **гауссовой поверхностью**. Отметим, что коэффициент пропорциональности между потоком напряженности и суммой зарядов, охваченных этой поверхностью, определен выбором системы единиц физических величин. В СИ этот коэффициент равен  $\frac{1}{\epsilon_0}$ . В других системах единиц он принимает другие значения.

Теорему Остроградского–Гаусса (19.7) удобно использовать для расчета напряженности электростатических полей, созданных

симметричными системами зарядов. В этих случаях можно так выбрать гауссову поверхность, что поток вектора напряженности поля через нее легко выражается с помощью искомого значения модуля напряженности. Решение задачи о нахождении напряженности электростатического поля в какой-либо точке пространства осуществляется в несколько этапов.

1. Исходя из симметрии распределения заданной системы зарядов в пространстве, построить силовые линии поля, т.е. определить направление вектора  $\vec{E}$  в любой точке пространства.

2. Выбрать «удобную» замкнутую гауссову поверхность, отвечающую следующим требованиям:

а) она должна проходить через исследуемую точку;

б) площадь поверхности должна быть известна;

в) модуль напряженности поля должен быть постоянен в точках всей поверхности или хотя бы ее части;

г) угол между  $\vec{E}$  и внешней нормалью к поверхности должен быть известен в любой точке поверхности (это обеспечивается выполнением п. 1).

3. Получить выражение для потока напряженности поля через выбранную поверхность. Если выполнено условие п.2в, то

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) dS + E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) dS + \dots + E_N \int_{S_N} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) dS,$$

где  $E_i$  – постоянный модуль напряженности поля во всех точках части поверхности  $S_i$ .

4. Определить алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью  $S$ .

5. Применить теорему, т.е. приравнять результаты, полученные в пп.3 и 4 с учетом коэффициента пропорциональности.

**Пример 1.** Определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд  $Q > 0$  равномерно распределен в пространстве в виде шара радиусом  $R$ .

Исходя из условий симметричного распределения заряда, изобразим силовые линии его электрического поля. Поскольку данное распределение заряда обладает сферической симметрией, силовые линии поля будут исходить из центра шара по радиальным направлениям (на рис. 19.5 показаны только 4 силовые линии).

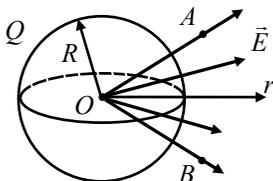


Рис. 19.5

Кроме того, исходя из симметрии системы, можно утверждать, что модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от центра шара, должен быть одинаковым. Это справедливо, например, для точек  $A$  и  $B$  (см. рис. 19.5), находящихся на одинаковом расстоянии от центра симметрии системы.

Следовательно, **направление и модуль вектора  $\vec{E}$**  будут зависеть **только от радиальной координаты** исследуемой точки пространства. Для задания такой координаты  $r$  выберем произвольную радиальную ось  $Or$ , выходящую из центра шара.

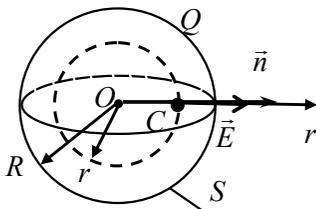


Рис. 19.6

2. Определим напряженность поля в произвольной точке  $C$ , находящейся внутри шара на расстоянии  $r$  от его центра. Для этого в качестве гауссовой поверхности **выберем сферическую поверхность** радиусом  $r$ , центр которой совпадает с центром заряженного шара. На рисунке 19.6

штриховой окружностью радиусом  $r$  показана линия пересечения этой поверхности с плоскостью чертежа.

Следствием симметрии системы является равенство модуля вектора напряженности поля во всех точках поверхности, и равенство угла между  $\vec{E}$  и внешней нормалью к поверхности во всех точках поверхности **нулю**.

3. Определим поток вектора  $\vec{E}$  через гауссову поверхность:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S \cos(\vec{E}, d\vec{S}) dS = E \oint_S dS = E4\pi r^2. \quad (19.8)$$

4. Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных поверхностью  $S$ . В данном случае электрический заряд, охваченный гауссовой поверхностью – это **часть** всего заряда. Определим эту **часть** заряда через объемную плотность заряда и объем, ограниченный гауссовой поверхностью:

$$Q_{\text{охв}} = \rho V_{\text{охв}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}. \quad (19.9)$$

5. Применим теорему Остроградского–Гаусса, приравняв (19.8) и (19.9) с учетом коэффициента  $\frac{1}{\epsilon_0}$ :  $E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qr^3}{R^3}$ .

Отсюда получим, что при  $r < R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}. \quad (19.10)$$

Применим эту процедуру для определения напряженности поля **вне** шарового скопления заряда. **Выберем** гауссову поверхность в виде сферы радиусом  $r > R$ , проходящей через произвольную точку  $D$ , находящуюся вне зарядов. На рисунке 19.7 штриховой окружностью радиусом  $r$  показана линия пересечения этой поверхности с плоскостью чертежа.

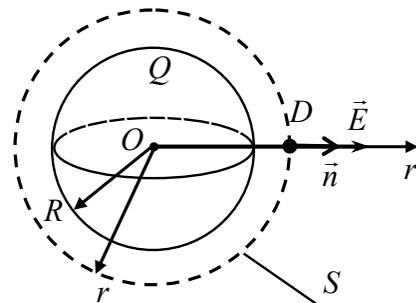


Рис. 19.7

Выражение для потока

вектора  $\vec{E}$  через гауссову поверхность сохранит прежний вид (19.8). **Заряд**, охваченный поверхностью, представляет собой

полный заряд шара:  $Q_{\text{охв}} = Q$ . Согласно теореме Остроградского–Гаусса получим, что при  $r > R$  имеет место соотношение

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q. \text{ Отсюда}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (19.11)$$

Окончательный вид зависимости модуля напряженности от координаты  $r$  можно представить так:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} & \text{при } r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases}$$

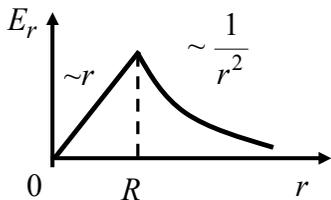


Рис. 19.8

При построении графической зависимости  $E(r)$  (рис. 19.8) обратим внимание на то, что выражения (19.10) и (19.11) дают одинаковые значения модуля напряженности поля при  $r = R$ :

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

**Пример 2.** Определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд равномерно распределен с поверхностной плотностью  $\sigma > 0$  по поверхности весьма длинного цилиндра с радиусом основания  $R$ .

1. Определим из условий симметрии и изобразим графически линии напряженности электрического поля. Поскольку данное распределение заряда обладает осевой симметрией, силовые линии поля (если поле существует) будут исходить из точек оси цилиндра по радиальным направлениям (на рис. 19.9 показаны 4 силовые линии электрического поля).

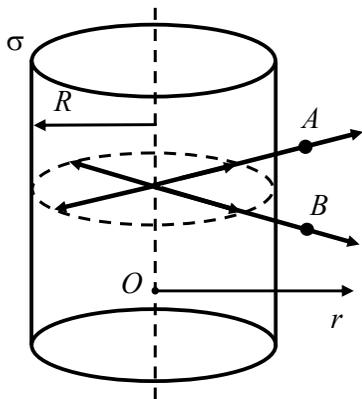


Рис. 19.9

Вследствие осевой симметрии системы, модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от оси системы, должен быть одинаковым: такие точки как, например, точки  $A$  и  $B$ , находятся на одинаковом расстоянии от оси симметрии системы.

Следовательно, **направление и модуль** вектора  $\vec{E}$  будут зависеть только от радиальной координаты исследуемой точки пространства. Для задания такой координаты  $r$  выберем произвольную радиальную ось  $Or$ , направленную перпендикулярно оси цилиндра.

2. Определим напряженность поля в произвольной точке  $C$ , находящейся вне цилиндра и имеющей координату  $r > R$ . Для этого выберем замкнутую поверхность  $S$  в виде поверхности цилиндра высотой  $H$  и радиусом  $r$ , ось которого совпадает с осью заряженного цилиндра (рис. 19.10).

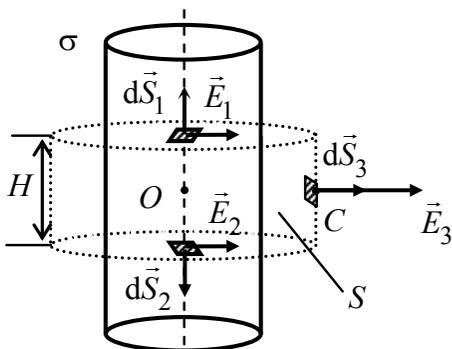


Рис. 19.10

Модуль напряженности поля **постоянен** во всех точках боковой поверхности цилиндра, вследствие симметрии системы. Угол между  $\vec{E}$  и внешней нормалью к поверхности во всех точках боковой поверхности цилиндра **равен нулю**, а во всех точках верхнего и нижнего оснований гауссова цилиндра равен  $\frac{\pi}{2}$ .

3. Определим поток вектора напряженности через замкнутую поверхность  $S$ :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_1) dS + E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_2) dS + E_3 \int_{S_3} \cos(\vec{E}, d\vec{S}_3) dS,$$

где  $S_1$  – площадь верхнего основания цилиндра;  $S_2$  – площадь нижнего основания цилиндра;  $S_3$  – площадь боковой поверхности цилиндра;  $d\vec{S}_1$ ,  $d\vec{S}_2$ ,  $d\vec{S}_3$  – векторы соответствующих элементарных площадок. Учитывая соображения, изложенные при осуществлении этапа 2, получаем:

$$E_1 \int_{S_1} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}_1) dS = E_2 \int_{S_2} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}_2) dS = 0;$$

$$E_3 \int_{S_3} \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}_3) dS = E_3 S_3.$$

Таким образом,

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_3 S_3 = E 2\pi r H. \quad (19.12)$$

**4. Определим алгебраическую сумму зарядов**, охваченных поверхностью гауссова цилиндра. В данном случае электрический заряд, попавший внутрь гауссовой поверхности, – это часть полного заряда цилиндра. Эту часть можно найти, умножив площадь боковой поверхности заряженного цилиндра, охваченного гауссовой поверхностью, на поверхностную плотность заряда:

$$Q_{\text{охв}} = \sigma 2\pi r H. \quad (19.13)$$

**5. Приравняв (19.12) и (19.13) с учетом коэффициента  $\vec{E}$** , имеем:  $\vec{E}$ . Отсюда следует, что  $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$ .

Повторим все действия для определения напряженности поля **внутри** заряженного цилиндра. В этом случае выберем гауссову

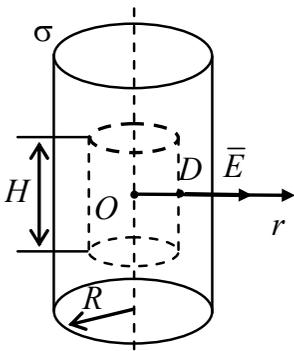


Рис. 19.11

поверхность в виде цилиндрической поверхности, боковая поверхность, которой проходит через произвольную точку  $D$ , находящуюся на расстоянии  $r < R$  (рис. 19.11).

Выражение для потока  $\vec{E}$  через гауссову поверхность сохранит прежний вид (19.12). Но в этом случае внутри гауссовой поверхности нет зарядов, поэтому  $E 2\pi r H = \frac{1}{\epsilon_0} 0$ , откуда следует

значение  $E = 0$ .

Окончательно зависимость модуля напряженности от радиальной координаты можно представить следующим образом:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}, & r \geq R. \end{cases}$$

График полученной зависимости изображен на рис. 19.12. Видно, что при значении координаты  $r = R$  график имеет разрыв. Отсюда, в частности, можно сделать вывод, что при переходе через поверхность, заряженную с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , модуль вектора напряженности электрического поля изменяется скачком на  $\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ .

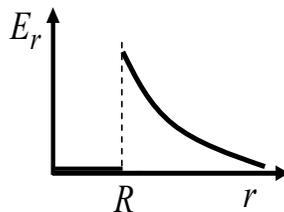


Рис. 19.12

### Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется поток напряженности электростатического поля в вакууме через замкнутую поверхность?
2. Напряженность каких электростатических полей удобно определять с помощью теоремы Остроградского–Гаусса?
3. Сформулируйте теорему Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме.
4. Объясните порядок применения теоремы Остроградского–Гаусса для определения напряженности электростатического поля.
5. Определите поток напряженности электростатического поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ , расположенным в центре куба: а) через полную поверхность куба; б) через одну из граней куба.

## 20. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

**Диэлектриками** называют вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток. В диэлектриках нет свободных носителей зарядов – заряженных частиц, которые под действием электрического поля могли бы прийти в упорядоченное движение и создать электрический ток проводимости. К диэлектрикам относятся все газы (если они не подверглись ионизации), некоторые жидкости и твердые тела. Удельное электрическое сопротивление диэлектриков  $\rho \approx 10^6 \dots 10^{15}$  Ом·м, тогда как у металлов  $\rho \approx 10^{-8} \dots 10^{-6}$  Ом·м. Особенности поведения диэлектриков в электростатических полях объясняются, прежде всего, их молекулярным строением. Электрически заряженные элементарные частицы, входящие в состав молекул диэлектриков, достаточно прочно связаны друг с другом внутриаомными силами. Электрические заряды, входящие в состав атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой, называются **связанными зарядами**. Заряды, не входящие в состав атомов и молекул вещества, называются **свободными**. Это заряды частиц, способных перемещаться под действием электрического поля (свободные электроны в металлах и полупроводниках, ионы в электролитах и газах, электроны и ионы в плазме), положительные заряды ионов кристаллической решетки металлов, избыточные заряды, сообщенные проводящему телу. Рассмотрение поведения диэлектриков в электростатических полях мы начнем с изучения характеристик связанных зарядов.

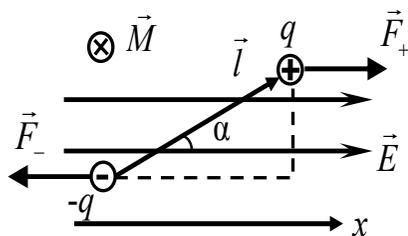


Рис. 20.1

Все молекулы диэлектрика электрически нейтральны: суммарный заряд электронов и атомных ядер в составе молекул равен нулю. Но молекула обладает электрическими свойствами: ее можно рассматривать как электриче-

ский диполь с дипольным моментом  $\vec{p} = q\vec{l}$ , где  $q$  –положительный заряд всех атомных ядер молекулы, а  $\vec{l}$  – вектор, проведенный из «центра тяжести» электронного облака в молекуле в «центр тяжести» положительных зарядов атомного ядра (рис. 20.1).

Рассмотрим поведение молекулярного диполя в однородном электрическом поле. На заряды диполя в поле будет действовать пара сил:

$$\vec{F}_+ = q\vec{E}, \quad \vec{F}_- = -q\vec{E},$$

причем

$$|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = qE. \quad (20.1)$$

Возникшая пара сил, действуя совместно на заряды диполя, будет создавать вращающий момент  $M = M_+ + M_- = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha$ ; направление вектора  $\vec{M}$  указано на рис. 20.1 (он перпендикулярен плоскости рисунка). В векторном виде

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (20.2)$$

Действие момента сил будет приводить к повороту диполя таким образом, чтобы направления векторов дипольного момента и напряженности электрического поля совпали.

Этот же результат можно получить из энергетических представлений. Суммарная потенциальная энергия зарядов диполя

$$W = W_+ + W_- = q\varphi_+ - q\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  – потенциалы точек расположения положительного и отрицательного заряда диполя соответственно. Учитывая связь напряженности поля и разности потенциалов для однородного поля, получаем  $W = -pE \cos \alpha$ .

Действие электрических сил приводит диполь в состояние устойчивого равновесия, когда его потенциальная энергия минимальна, т.е.  $\cos \alpha = 1$ ,  $\alpha = 0$ .

При внесении диполя в неоднородное электрическое поле, напряженность которого в разных точках пространства различна, силы, действующие на заряды диполя, будут не равны друг другу:  $|\vec{F}_+| \neq |\vec{F}_-|$ . Проекция на ось  $x$  (рис. 20.1) результирующей силы, действующей на диполь,

$$F_x = q(E_1 - E_2) = q \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x = q \frac{\partial E}{\partial x} l \cos \alpha = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha,$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – модули напряженности поля в точках расположения зарядов диполя. Таким образом, в неоднородном поле на диполь будет действовать сила  $\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E} = \nabla(\vec{p}, \vec{E})$ .

Из-за теплового движения дипольные моменты молекул любого диэлектрика, не внесенного в поле, ориентированы беспорядочно, так что суммарный дипольный момент молекул такого диэлектрика в любом его объеме равен нулю.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит **поляризация диэлектрика**, заключающаяся в том, что в любом малом его объеме  $\Delta V$  возникает отличный от нуля суммарный дипольный электрический момент молекул. Диэлектрик, находящийся в таком состоянии, называется **поляризованным**. Объем  $\Delta V$  предполагается во много раз большим объема одной молекулы. В то же время объем выбирается настолько малым, чтобы внешнее поле в этом объеме можно было бы считать однородным. Тем не менее в таком объеме число молекул достаточно велико, и к ним применим статистический метод.

В **неполярных диэлектриках** (диэлектриках с неполярными молекулами) в отсутствии внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах совпадают, и дипольные моменты равны нулю. Таковы, например, молекулы  $O_2$ ,  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $CCl_4$  и др. Во внешнем электрическом поле происходит деформация электронных оболочек атомов, при этом возникает множество диполей. Однако при снятии внешнего поля происходит восстановление прежней структуры молекул, исчезает деформация электронных оболочек и, как следствие, исчезают диполи. **Электронная поляризация** обусловлена упругим смещением и деформацией электронных оболочек. Электрическое поле действует на такую молекулу так, как если бы положительные и отрицательные заряды в ней были бы связаны упругими силами. Молекула ведет себя как упругий диполь.

Определим индуцированный дипольный электрический момент молекулы во внешнем поле. Для примера рассмотрим атом водорода, в котором электрон вращается по круговой орбите радиусом  $R$  под действием кулоновской силы притяжения к ядру:

$$m\omega^2 R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (20.3)$$

где  $m$  – масса электрона,  $\omega$  – его угловая скорость при движении по орбите. Во внешнем поле напряженностью  $\vec{E}$  на электрон действует сила  $F_1 = eE$ , вызывающая смещение орбиты на расстояние  $\Delta l$  (рис. 20.2).

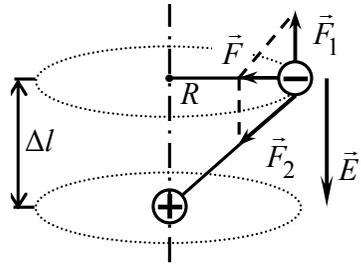


Рис. 20.2

Будем считать, что смещение плоскости орбиты из исходного положения настолько мало, что не вызывает изменения ее радиуса. Движение электрона по орбите в возмущенном состоянии будет определять сумма сил  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , где  $F_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ . Как видно из рис. 20.2,

$$\frac{\Delta l}{R} = \frac{F_1}{F} = \frac{eE}{m\omega^2 R}; \quad \Delta l = \frac{eE}{m\omega^2}.$$

С учетом (20.3) получим

$$\Delta l = \frac{E}{e} 4\pi\epsilon_0 R^3. \quad (20.4)$$

Дипольный момент молекулярного диполя, созданного внешним электрическим полем с напряженностью  $\vec{E}$ ,

$$p = e\Delta l = 4\pi\epsilon_0 R^3 E. \quad (20.5)$$

Отметим, что модуль дипольного момента пропорционален модулю напряженности внешнего поля, а направление вектора  $\vec{p}$  совпадает с направлением  $\vec{E}$ , т.е.

$$\vec{p} = \epsilon_0 \beta \vec{E}, \quad (20.6)$$

где коэффициент пропорциональности  $\beta$  называется **поляризуемостью молекулы**. Он зависит от ее размера и является постоян-

ным для рассматриваемого диэлектрика. Тепловое движение неполярных молекул не влияет на возникновение у них дипольных моментов, поэтому поляризуемость не зависит от температуры. Соотношение (20.6) может быть получено и для молекул с большим числом электронов, в которых весь отрицательный заряд равномерно распределен по объему молекулы. Оценим размер получившегося диполя. Поскольку радиус электронной орбиты  $R \approx 10^{-10}$  м, а максимальное значение напряженности поля, вызывающего разрыва молекулярных связей,  $E \approx 10^8$  В/м, то согласно (20.4)  $\Delta l = 7 \cdot 10^{-14}$  м, что подтверждает наше предположение о том, что значение  $\Delta l$  очень мало.

В **полярных диэлектриках** (диэлектриках с полярными молекулами) в отсутствие внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах не совпадают и дипольные моменты не равны нулю. Таковы, например, молекулы  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $HCl$  и др. Во внешнем электрическом поле происходит поворот уже существующих молекулярных диполей таким образом, что векторы дипольных моментов ориентируются вдоль силовых линий. Деформация электронных оболочек молекул практически не изменяет дипольные моменты молекул. Полярная молекула по своим электрическим свойствам подобна жесткому диполю с постоянным электрическим моментом. **Поляризация** диэлектриков с жесткими диполями обусловлена преимущественной ориентацией электрических моментов диполей в одном направлении, поэтому ее часто называют **ориентационной поляризацией**. Тепловое движение молекул нарушает этот порядок, поэтому средний дипольный момент упорядоченно расположенных диполей зависит от температуры:

$$\langle p \rangle = \varepsilon_0 \frac{p^2}{3kT\varepsilon_0} E, \quad \langle p \rangle = \varepsilon_0 \beta E, \quad \beta = \frac{p^2}{3kT\varepsilon_0}. \quad (20.7)$$

Здесь  $p$  – модуль дипольного момента молекулы;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура. Соотношение (20.7) впервые вывел голландский физик П. Дебай, получивший в 1936 г. Нобелевскую премию за создание дипольной теории

диэлектриков. Видно, что (20.7) по своему виду соответствует выражению (20.6), но поляризуемость полярного диэлектрика обратно пропорциональна его температуре.

**Ионная поляризация** происходит в твердых диэлектриках, имеющих ионную кристаллическую решетку (например, NaCl). Внешнее электрическое поле вызывает в таких диэлектриках упругое смещение всех положительных ионов в направлении вектора  $\vec{E}$ , а всех отрицательных ионов – в противоположную сторону. При снятии внешнего поля кристалл диэлектрика возвращается в исходное состояние, поэтому поляризуемость такого типа диэлектриков также пропорциональна напряженности внешнего поля.

Количественной мерой поляризации диэлектрика служит **поляризованность**  $\vec{P}$ , численно равная отношению электрического дипольного момента малого объема диэлектрика  $\Delta V$  к этому объему:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei}. \quad (20.8)$$

Здесь  $\vec{p}_{ei}$  – электрический дипольный момент  $i$ -й молекулы;  $N$  – общее число молекул в объеме  $\Delta V$ . Этот объем должен быть достаточно малым, чтобы в его пределах поле можно было считать однородным. В то же время число молекул в таком объеме должно быть достаточно велико, чтобы к ним можно было применить статистические закономерности. Таким образом, поляризованность диэлектрика численно равна дипольному электрическому моменту единицы объема вещества.

В пределах малого объема  $\Delta V$  все молекулы диэлектрика имеют одинаковые дипольные моменты  $\vec{p}_{ei}$ , поэтому с учетом (20.6) и (20.7) получим

$$\vec{P} = n\vec{p}_{ei} = n\varepsilon_0\beta\vec{E}, \quad (20.9)$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}, \quad (20.10)$$

где  $n$  – концентрация молекул диэлектрика.

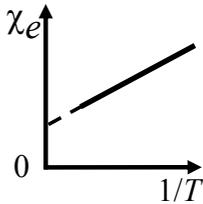


Рис. 20.3

Величина  $\chi_e = n\beta$  называется **диэлектрической восприимчивостью** вещества. Из рассмотрения механизма поляризации неполярных диэлектриков следует, что их диэлектрическая восприимчивость не зависит явным образом от температуры:  $\beta = 4\pi R^3$  (20.5), (20.6). Температура может влиять на значение

$\chi_e$  только косвенно – через концентрацию молекул.

Диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков обратно пропорциональна температуре (рис. 20.3). Из (20.7) получим, что

$$\chi_{e \text{ полярн}} = \frac{np^2}{3k\varepsilon_0 T}. \quad (20.11)$$

Диэлектрическая восприимчивость полярных диэлектриков существенно зависит от температуры (рис. 20.3). Хаотическое тепловое движение молекул препятствует выстраиванию электрических моментов полярных молекул по направлению  $\vec{E}$ .

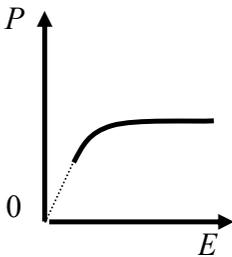


Рис. 20.4

В очень сильном электрическом поле и при достаточно низкой температуре электрические моменты всех молекул располагаются практически параллельно напряженности внешнего поля  $\vec{E}$ . При этом поляризованность полярного диэлектрика достигает максимального значения. Поэтому линейная зависимость поляризованности от напряженности поля наблюдается только в достаточно слабых полях (пунктирная линия на рис. 20.4).

В жидких и газообразных диэлектриках одновременно может происходить и электронная и ориентационная поляризация (молекулярные диполи в таких веществах могут поворачиваться). В твердых диэлектриках наблюдается только электронная поляризация. Молекулы этих веществ достаточно жестко связаны друг с другом, чтобы позволить диполям повернуться. Из этого следует,

что относительная диэлектрическая проницаемость диэлектриков в твердой фазе меньше, чем у тех же веществ в жидкой или газообразной фазе. Например, у льда  $\epsilon = 3$ , а у дистиллированной воды  $\epsilon = 81$ .

При поляризации диэлектрика в тонких слоях у его поверхностей возникают нескомпенсированные связанные заряды, называемые **поверхностными поляризационными зарядами**.

Слой неполярного диэлектрика, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , показан на рис. 20.5. Электрические моменты и оси всех диполей диэлектрика ориентируются одинаково – вдоль направления напряженности. Внешняя нормаль к границе диэлектрика составляет некоторый угол  $\alpha$  с направлениями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ . Выделим в слое некоторый объем диэлектрика в виде косоугольного цилиндра с площадью основания  $dS$  и длиной образующей  $l$ . Суммарный электрический момент диполей, попавших в этот объем, равен произведению модуля связанного заряда на поверхности диэлектрика  $q_{\text{связ}}$  и плеча получившегося диполя  $l$ :

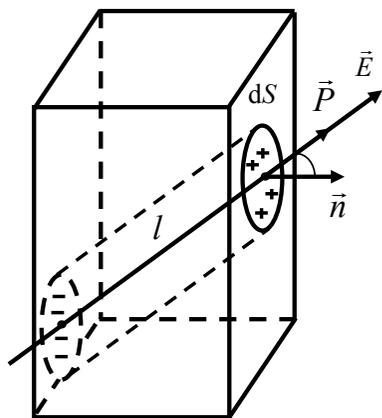


Рис. 20.5

$$\sum p_e = q_{\text{связ}} l = \sigma_{\text{связ}} dS l. \quad (20.12)$$

С другой стороны, в соответствии с (20.8),

$$\sum p_e = |\vec{P}| V = P dS l \cos \alpha = P_n dS l, \quad (20.13)$$

где  $P_n$  – проекция поляризованности на нормаль к границе диэлектрика. Сравнение (20.12) и (20.13) дает

$$\sigma_{\text{связ}} = P_n. \quad (20.14)$$

Таким образом, поверхностная плотность связанных зарядов на границе диэлектрика с другой средой (с другим веществом) равна проекции поляризованности диэлектрика на нормаль к выбранной поверхности.

### Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектриках

Электрическое поле в диэлектрической среде создается как свободными, так и связанными зарядами. Согласно принципу суперпозиции (15.9) напряженность поля в веществе равна геометрической сумме напряженностей полей, созданных свободными и связанными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{своб}} + \vec{E}_{\text{связ}}.$$

Теорема Остроградского–Гаусса может быть применена для расчета электростатического поля в диэлектрической среде, если в правой части равенства рассматривать алгебраическую сумму всех свободных и связанных зарядов, охватываемых гауссовой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ свобод}} + \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ связ}} \right).$$

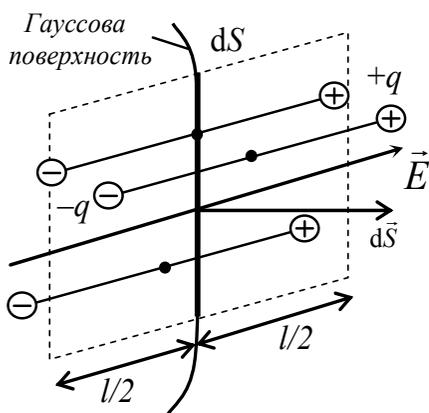


Рис. 20.6

Использование полученного соотношения для расчета напряженности поля, создаваемого заданной системой свободных зарядов в диэлектрической среде, осложняется тем, что заранее не известно распределение связанных зарядов в поле. Поскольку молекулы диэлектрика электрически нейтральны, то вклад в заряд  $Q_{\text{связ}}$  внесут только те молекулы, диполи которых «перерезаются» гауссовой поверхностью.

кулы, диполи которых «перерезаются» гауссовой поверхностью.

Для того, чтобы определить их число, рассмотрим однородный поляризованный диэлектрик, диполи которого ориентированы по направлению  $\vec{E}$  (рис. 20.6).

На рисунке указан фрагмент гауссовой поверхности. Допустим, что силовые линии электрического поля «выходят» из объема, ограниченного поверхностью. Следовательно, внутри этого объема располагаются отрицательные заряды диполей, «перерезанных» гауссовой поверхностью. Эти отрицательные заряды не скомпенсированы положительными зарядами диполей, так как последние находятся за пределами гауссовой поверхности. Алгебраическая сумма отрицательных зарядов «перерезанных» диполей определяет значение  $Q_{\text{связ}}$ , входящее в выражение (19.7). Анализируя положения различных диполей, нетрудно увидеть, что гауссова поверхность «перерезает» только те диполи, центры которых (показаны на рис. 20.6 точками) удалены от нее на расстояние не большее чем  $l/2$ , где  $l$  – плечо диполя.

Выберем элемент гауссовой поверхности площадью  $dS$  и укажем внешнюю нормаль к нему  $d\vec{S}$  (рис. 20.6). Выделим некоторый объем диэлектрика в виде косоугольного цилиндра с площадью основания  $dS$ , образующая которого параллельна  $\vec{E}$ . Пусть длина образующей равна плечу диполя  $l$ . Число диполей, находящихся в объеме выделенного цилиндра,  $dN = n l dS \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}})$ , где  $n$  –

концентрация молекул диэлектрика. Суммарный отрицательный заряд этих диполей  $dQ_{\text{связ}} = -q n l dS \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}})$ . Учтем, что  $ql = p_e$ ,

а  $p_e n = P$  согласно (20.9). Тогда  $dQ_{\text{связ}} = -P dS \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{S}}) = -P dS \cos(\vec{P}, \hat{d\vec{S}})$ ;  $\vec{P} \uparrow \vec{E}$ . В целом в объеме, ограниченном гауссовой

поверхностью, находится связанный электрический заряд

$$Q_{\text{связ}} = \oint_S dQ_{\text{связ}} = -\oint_S P dS \cos \alpha = -\oint_S \vec{P} d\vec{S}.$$

С учетом полученного соотношения преобразуем выражение (15.26) теоремы Остроградского–Гаусса следующим образом:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left( \sum_{i=1}^n Q_i \text{своб} - \oint_S \vec{P} d\vec{S} \right),$$

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_i \text{своб}. \quad (20.15)$$

Введем еще одну физическую величину – **электрическую индукцию**  $\vec{D}$  (часто эту величину называют **электрическим смещением**):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (20.20)$$

где  $\varepsilon = 1 + \chi$  – относительная диэлектрическая проницаемость. Теперь (20.15) запишем в виде

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_i \text{своб}. \quad (20.17)$$

**Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охваченных этой поверхностью.** Поток вектора электрического смещения определяется только свободными зарядами, поэтому в таком виде **теореме Остроградского–Гаусса** удобно применять в диэлектрических средах.

При расчете напряженности электростатического поля в диэлектрической среде необходимо сначала определить модуль и направление вектора электрического смещения  $\vec{D}$  (как это было сделано в разд. 19  $\vec{E}$ ). Затем, пользуясь соотношением (20.16), необходимо определять величину и направление вектора напряженности  $\vec{E}$ .

Рассмотрим пример 1, приведенный в разд. 19, и определим напряженность электростатического поля во всех точках пространства, если электрический заряд  $Q > 0$  равномерно распределен по объему диэлектрического шара радиусом  $R$ , относительная диэлектрическая проницаемость которого равна  $\varepsilon$ . Повторяя рассуждения разд. 19, получаем

$$D(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{Qr}{R^3}, & r \leq R; \\ \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases}$$

Так как  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ , а  $\vec{D} \uparrow \uparrow \vec{E}$ , то  $D = \epsilon\epsilon_0 E$ , поэтому запишем

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}, & r < R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

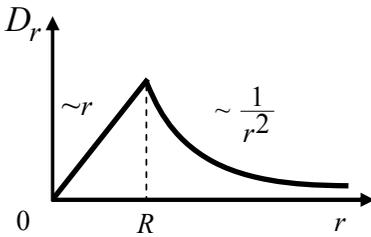


Рис. 20.7

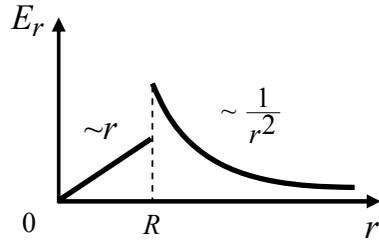


Рис. 20.8

Графики полученных зависимостей  $D_r(r)$  и  $E_r(r)$  приведены на рис. 20.7 и 20.8. Отметим, что зависимость  $E_r(r)$  имеет разрыв на поверхности шара (при  $r = R$ ), так как на этой поверхности находится связанный положительный заряд.

### Условия на границе раздела диэлектрических сред

Найдем соотношения между значениями напряженности и электрического смещения в двух граничащих диэлектрических средах. Для этого рассмотрим произвольную точку  $A$  на границе раздела двух сред 1 и 2 для случая  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  (рис. 20.9).

Проведем из точки  $A$  единичные векторы, направленные по касательной к поверхности раздела сред ( $\vec{\tau}$ ) и по нормали к ней ( $\vec{n}$ ). Построим вблизи точки  $A$  замкнутый контур  $L$  в виде прямоугольника с размерами  $\Delta h \times \Delta l$ , стороны которого

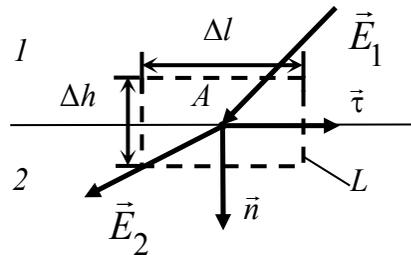


Рис. 20.9

попарно параллельны этим векторам. Из условия потенциальности электростатического поля следует, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль контура  $L$  равна нулю:  $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$ .

Устремим высоту прямоугольного контура  $\Delta h$  к нулю. Тогда длины боковых сторон контура и значения  $\int \vec{E}d\vec{l}$  на этих сторонах также стремятся к нулю. При этом верхняя и нижняя стороны контура приближаются к поверхности раздела сред. При обходе контура против часовой стрелки получаем

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = E_{1\tau}\Delta l \cos 0^\circ + E_{2\tau}\Delta l \cos 180^\circ = (E_{1\tau} - E_{2\tau}) dl = 0. \quad (20.18)$$

Следовательно,

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (20.19)$$

т.е. составляющая вектора напряженности поля, касательная к поверхности раздела двух сред, не изменяется при переходе через эту поверхность. С учетом (20.20) запишем

$$D_{2\tau} = D_{1\tau} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (20.20)$$

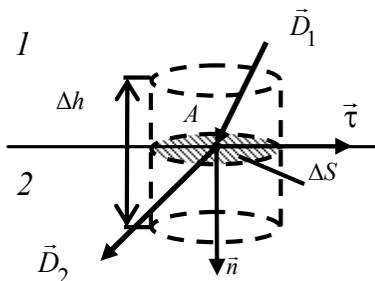


Рис. 20.10

Для определения связи нормальных к поверхности раздела сред проекций вектора напряженности и вектора смещения выберем вокруг точки  $A$  участок поверхности раздела сред площадью  $\Delta S$  (рис. 20.10).

Построим прямой цилиндр с образующей длиной  $\Delta h$ , параллельной нормали  $\vec{n}$  к поверхности раздела. По теореме Остроградского–Гаусса

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}},$$

где  $\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ своб}}$  – свободный заряд внутри замкнутой поверхности, т.е. в объеме цилиндра. Устремим высоту цилиндра  $\Delta h$  к нулю.

В таком случае поток вектора смещения через боковую поверхность цилиндра обратится в нуль. Если на поверхности раздела сред нет свободных поверхностных зарядов, то с одной стороны

$$\sum_{i=1}^n Q_{i \text{ свобод}} = 0. \text{ С другой стороны,}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_{2n} \Delta S \cos 0^\circ + D_{1n} \Delta S \cos 180^\circ = (D_{2n} - D_{1n}) \Delta S.$$

Поэтому

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (20.21)$$

Это означает, что при переходе через границу раздела двух сред, на которой нет поверхностных свободных зарядов, **нормальная составляющая электрического смещения не изменяется**. С учетом (20.20) запишем

$$E_{2n} = E_{1n} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (20.22)$$

С помощью этого соотношения можно легко пояснить физический смысл относительной диэлектрической проницаемости вещества. Если рассматривать преломление силовых линий электрического поля на границе «вакуум – диэлектрик», то из (20.22) следует, что

$$\frac{E_{n \text{ вак}}}{E_{n \text{ диэл}}} = \epsilon.$$

**Относительная диэлектрическая проницаемость равна отношению нормальной составляющей напряженности электрического поля в вакууме к нормальной составляющей напряженности электрического поля в диэлектрике.**

Объединяя условия (20.19)–(20.22), можно показать, каким образом преломляются силовые линии электростатического поля при переходе их одного диэлектрика в другой. Для случая  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  это изображено на рис. 20.11 и 20.12.

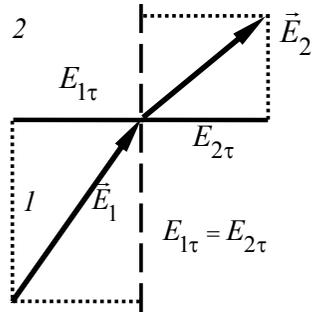


Рис. 20.11

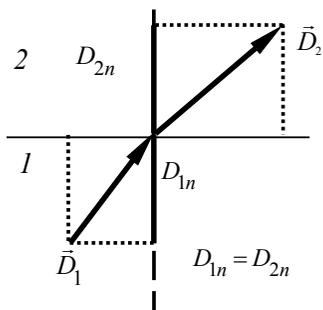


Рис. 20.12

Вектор напряженности поля не изменяется при переходе из одной среды в другую, если поверхность раздела сред касается силовых линий поля. Если поверхность раздела сред совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля, то векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  перпендикулярны такой поверхности и при переходе через нее не изменяется вектор электрического смещения.

### Контрольные вопросы и задания

1. Как происходит поляризация диэлектриков с полярными и с неполярными молекулами?
2. Какие физические величины количественно характеризуют поляризацию диэлектрика?
3. Чем определяется поверхностная плотность поляризационных зарядов?
4. Как диэлектрик влияет на напряженность электростатического поля?
5. В чем заключается физический смысл относительной диэлектрической проницаемости вещества?
6. Чему равен поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность, проведенную в электростатическом поле?
7. Определите поляризованность диэлектрического шара из однородного изотропного диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  как функцию расстояния до центра шара, если в центре шара расположен точечный заряд  $Q$ .

## 21. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

**Проводниками** называют вещества, содержащие свободные носители заряда, т.е. частицы, которые могут свободно перемещаться по объему проводника под действием сколь угодно малого электрического поля. К данному типу веществ, прежде всего, относят металлы, в которых свободными носителями заряда являются электроны проводимости. В полупроводниках *n*-типа такими частицами выступают свободные электроны, в полупроводниках *p*-типа – положительные заряды, так называемые «дырки». В электролитах проводимость обеспечивается и положительными, и отрицательными ионами. В ионизированном газе (плазме) свободные носители заряда – это электроны и положительно заряженные ионы. При анализе особенностей поведения проводников в электростатическом поле ограничимся лишь рассмотрением металлов.

В отсутствие внешнего электростатического поля свободные электроны хаотично располагаются в металле. При этом электрические поля электронов проводимости и положительных ионов металла взаимно компенсируются. Если проводник внесен во внешнее электростатическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$  (рис. 21.1), то под действием этого

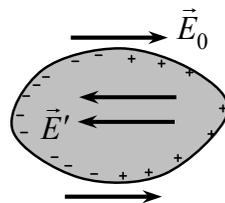


Рис. 21.1

поля электроны проводимости приходят в движение. Они смещаются в сторону, противоположную направлению напряженности внешнего поля  $\vec{E}_0$ , располагаясь на поверхности проводника, а положительные нескомпенсированные заряды ионов металла остаются на противоположной поверхности проводника. **Явление перераспределения свободных зарядов в проводнике под действием внешнего электрического поля называется электростатической индукцией.** При этом внутри проводника возникает собственное поле с напряженностью  $\vec{E}'$ . В процессе разделения зарядов суммарная напряженность поля в проводнике уменьшается:

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ ;  $E = E_0 - E'$ . Перераспределение зарядов происходит до тех пор пока напряженность результирующего поля в проводнике не станет равной нулю. Если бы внутри проводника существовало электрическое поле, то перераспределение зарядов (ток в проводнике) вызвало бы нагрев проводника при отсутствии изменения внешнего поля, что противоречило бы **второму началу термодинамики**. Таким образом, в любой точке проводника электрическое поле электронов проводимости и положительных ионов проводника компенсирует внешнее поле.

Поскольку распределение зарядов по поверхности проводника стационарно (заряды неподвижны), то тангенциальная (касательная к поверхности проводника) составляющая напряженности электростатического поля равна нулю. Это означает, что вектор  $\vec{E}$  и силовые линии поля перпендикулярны к поверхности проводника. Из этого, в свою очередь, следует, что потенциал поверхности проводника одинаков во всех точках. **Эквипотенциальной поверхностью** называется геометрическое место точек пространства, потенциалы которых равны друг другу. Таким образом, поверхность проводника является эквипотенциальной. Разность потенциалов между любыми двумя точками внутри проводника

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = 0, \text{ так как напряженность внутри проводника}$$

равна нулю. Это означает, что весь проводник представляет собой эквипотенциальный объем.

Для определения плотности зарядов на поверхности проводника выделим малый элемент его поверхности площадью  $S$  (рис. 21.2). Построим замкнутую гауссову поверхность в виде цилиндра, площадь основания которого

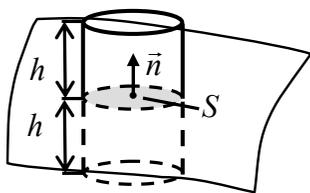


Рис. 21.2

равна  $S$ , а сами основания расположены по обе стороны поверхности проводника на расстояниях  $h$  от нее. Поток напряженности поля через гауссову поверхность определится следующим образом:

$$\begin{aligned} \oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} &= \int_{(S_{\text{бок}})} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(S_{\text{верхн}})} \vec{E} d\vec{S} + \int_{(S_{\text{нижн}})} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{(S_{\text{бок}})} E dS \cos 90^\circ + \int_{(S_{\text{верхн}})} E dS \cos 0^\circ = E_n S, \end{aligned}$$

причем  $\int_{(S_{\text{нижн}})} \vec{E} d\vec{S} = 0$ , так как электрическое поле внутри про-

водника отсутствует. Здесь  $S_{\text{бок}}$ ,  $S_{\text{верхн}}$ ,  $S_{\text{нижн}}$  – соответственно площади боковой поверхности цилиндра, его верхнего и нижнего оснований.

Поскольку выбранная гауссова поверхность охватывает заряд  $q_{\text{охв}} = \sigma S$ , расположенный на поверхности проводника, то по теореме Остроградского–Гаусса

$$E_n S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S, \quad \sigma = \epsilon_0 E_n, \quad (21.1)$$

**т.е. плотность электрического заряда на поверхности проводника прямо пропорциональна напряженности поля вблизи его поверхности.** Следствие: при переходе через поверхность заряженного проводника напряженность электрического поля изменя-

ется скачком на  $|\Delta E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Как связана поверхностная плотность распределения зарядов с кривизной поверхности проводника? Для ответа на этот вопрос рассмотрим сначала заряженный проводящий шар. Если заряд шара равен  $Q$ , а радиус –  $R$ , то потенциал поверхности шара можно определить так:

$$\varphi = \int_R^{r_{\varphi=0}} E dr = \int_R^{\infty} E dr = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Умножив числитель и знаменатель на  $R$ , получим:

$$\varphi = \frac{QR}{\epsilon_0 4\pi R^2} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}. \quad (21.2)$$

Поскольку кривизна поверхности шара постоянна ( $R = \text{const}$ ) и потенциал поверхности одинаков в любой точке, то  $\sigma = \text{const}$ , т.е. заряды по поверхности проводящего шара распределены равномерно.

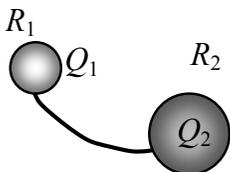


Рис. 21.3

Рассмотрим распределение зарядов по поверхности проводника с различными радиусами кривизны в разных точках поверхности. Пусть два удаленных друг от друга заряженных шара разных радиусов  $R_1$  и  $R_2$  имеют заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 21.3). После

соединения этих шаров тонкой проволокой образуется один проводник с изменяющейся кривизной поверхности. Заряды перераспределяются между шарами до тех пор пока их потенциалы не станут равны (зарядами на поверхности тонкой проволоки пренебрегаем):

$$\frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

где  $Q'_1$  и  $Q'_2$  – новые заряды шаров. Из последнего выражения с учетом (21.2) получаем  $\sigma'_1 R_1 = \sigma'_2 R_2$ . Таким образом, поверхностная плотность заряда увеличивается на тех участках поверхности проводника, где радиус кривизны поверхности меньше. В результате вблизи острых концов проводников накапливается большой заряд и создается сильное электростатическое поле с большой напряженностью.

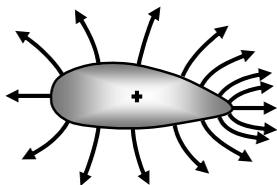


Рис. 21.4

Распределение силовых линий поля, создаваемого заряженным проводником произвольной формы, показано на рис. 21.4. Вблизи острия проводника силовые линии расположены ближе друг к другу, следовательно, модуль напряженности поля вблизи острия принимает самые большие значения.

Сформулируем основные свойства электростатического поля при наличии проводников:

- 1) электростатическое поле внутри проводника отсутствует;
- 2) при помещении проводника в электростатическое поле в проводнике возникают индуцированные заряды, которые располагаются исключительно на поверхности проводника;
- 3) свободные заряды, принесенные на проводник, также распределяются по его поверхности;
- 4) силовые линии электростатического поля вблизи поверхности проводника перпендикулярны к его поверхности;
- 5) все точки проводника имеют одинаковый потенциал;
- 6) поверхностная плотность заряда на поверхности проводника обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности;
- 7) при переходе через поверхность заряженного проводника напряженность электрического поля изменяется скачком на

$$|\Delta E| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Найдем связь потенциала проводника с его электрическим зарядом. Рассмотрим проводник произвольной формы, бесконечно удаленный от других проводников. Если сообщить этому проводнику некоторый свободный заряд  $Q$ , то он распределится по поверхности проводника. Плотность поверхностного заряда  $\sigma$  в каждой точке поверхности проводника будет пропорциональна заряду  $Q$ , а зависимость поверхностной плотности заряда от координат определится функцией  $f(\vec{r})$ , зависящей от формы проводника:

$$\sigma(\vec{r}) = Qf(\vec{r}). \quad (21.3)$$

Каждая следующая порция заряда, переносимого на проводник, будет распределяться по поверхности с плотностью согласно зависимости (21.3). Вычислим потенциал произвольной точки  $A$  заряженного проводника (рис. 21.5), пользуясь методом суперпозиции.

Выделим на поверхности проводника малый элемент  $dS$ , который имеет заряд  $dQ = \sigma(\vec{r})dS$ . Размеры элемента поверхности  $dS$  должны быть настолько

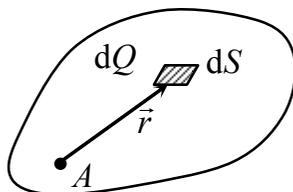


Рис. 21.5

малы, чтобы заряд  $dQ$  можно было бы считать точечным. Примем потенциал равным нулю на бесконечности и воспользуемся формулой потенциала точечного заряда:

$$d\varphi_A = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Тогда

$$\varphi_A = \oint_S \frac{\sigma(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Учитывая (21.3), получаем:

$$\varphi_A = \oint_S \frac{Qf(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r} = Q \oint_S \frac{f(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (21.4)$$

Вид функции  $f(\vec{r})$ , конечно же, зависит от выбора точки начала отсчета (точка  $A$ ), однако, поскольку потенциалы всех точек проводника равны, значение интеграла в (21.4) должно быть константой. Введем обозначение:

$$\oint_S \frac{f(\vec{r}) dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{C},$$

где  $C$  – константа, зависящая от формы и размеров проводника.

Теперь потенциал проводника запишем следующим образом:

$$\varphi = \frac{Q}{C}. \quad (21.5)$$

Итак, потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду и обратно пропорционален константе  $C$ , определяемой геометрией проводника.

Физический смысл константы  $C$ , называемой **электроемкостью**, определим из (21.5):

$$C = \frac{Q}{\varphi}. \quad (21.6)$$

**Электроемкостью уединенного проводника** называется физическая величина, равная отношению заряда проводника к его потенциалу в поле этого заряда. Электроемкость проводника показывает, какой заряд необходимо сообщить проводнику для того, чтобы его потенциал принял заданное значение. Чем больше заряд проводника, тем больше его потенциал в поле этого заряда. Электроемкость не

зависит ни от величины заряда проводника, ни от значения его потенциала, а зависит только от размера и формы проводника, а также от диэлектрических свойств среды, в которой он находится. Единица измерения электроемкости проводника в СИ

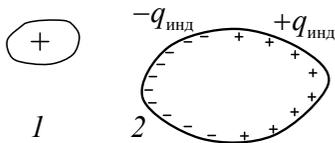


Рис. 21.6

называется фарад (обозначается 1 Ф):  $1\text{Ф} = \frac{1\text{ Кл}}{1\text{ В}}$ .

Расчет электроемкости уединенных проводников производится по формуле (21.6) следующим образом:

- 1) задается произвольный заряд проводника  $Q$ ;
- 2) с помощью метода суперпозиции или теоремы Остроградского–Гаусса определяется напряженность электрического поля;
- 3) с помощью интегральной связи напряженности и потенциала по известной напряженности определяется потенциал;
- 4) по формуле (21.6) определяется электроемкость:

$$Q \Rightarrow \vec{E}(Q) \Rightarrow \varphi(Q) \Rightarrow C = \frac{Q}{\varphi(Q)}.$$

Подчеркнем, что электроемкость проводника не зависит от его заряда  $Q$ .

**Пример.** Выведем формулу электроемкости проводящего шара радиусом  $R$ , находящегося в вакууме. Для этого сообщим шару произвольный заряд  $Q$ . Заряд равномерно распределится по поверхности шара с поверхностной плотностью  $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ , которая одинакова в каждой точке поверхности шара. Этот заряд создаст электростатическое поле, напряженность которого определяется следующим образом (см. пример 1, разд. 19):

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Потенциал шара

$$\varphi = \int_R^{\infty} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

В соответствии с (21.6) электроемкость шара запишется в виде

$$C_{\text{ш}} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (21.7)$$

Из (21.7) видно, что электроемкость проводника  $1 \text{ Ф}$  – колоссальная величина: шар с такой электроемкостью должен иметь радиус  $9 \cdot 10^9 \text{ м}$ , что соответствует радиусу орбиты Меркурия. Поэтому для практического измерения электроемкости проводников используются следующие единицы:  $1 \text{ мкФ}$  (микрофарад) =  $10^{-6} \text{ Ф}$ ;  $1 \text{ нФ}$  (нанофарад) =  $10^{-9} \text{ Ф}$ ;  $1 \text{ пФ}$  (пикофарад) =  $10^{-12} \text{ Ф}$ .

При определении электроемкости проводника описанным выше способом важно, чтобы вблизи него не находились другие проводники, т.е. чтобы проводник был уединенным.

Рассмотрим, как изменится электроемкость проводника, если он будет находиться рядом с незаряженным проводником. Допустим, что проводник  $1$  обладает положительным зарядом (рис. 21.6). Этот заряженный проводник создает электрическое поле. Поэтому в незаряженном проводнике  $2$  произойдет разделение зарядов (электростатическая индукция) на отрицательные  $-q_{\text{инд}}$  и положительные  $+q_{\text{инд}}$ , причем алгебраическая сумма индуцированных зарядов будет равна нулю. В свою очередь в электрическом поле индуцированных зарядов перераспределятся и заряды на проводнике  $1$ . В результате потенциал заряженного проводника изменится. Изменится и его электроемкость. Аналогичный вывод можно сделать и в случае, если вблизи положительно заряженного проводника располагается незаряженное диэлектрическое тело. На поверхности диэлектрика образуются связанные поляризационные заряды, что приведет к изменению потенциала и электроемкости самого проводника.

Таким образом, электроемкость проводника зависит от наличия в пространстве вблизи него любого тела (проводника или диэлектрика).

В случае, если заряженные проводники располагаются таким образом, что электрическое поле существует только в пространстве между ними, то они образуют **конденсатор**. Сами проводники при этом называются **обкладками** конденсатора. Примеры расположения двух обкладок, образующих конденсаторы, приведены на рис. 21.7, а–в.

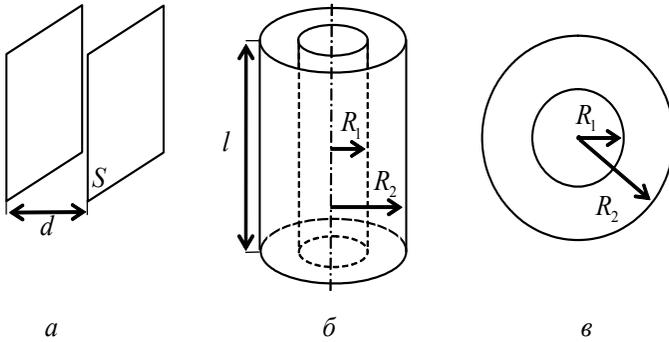


Рис. 21.7

Это соответственно плоский, цилиндрический и сферический конденсаторы. Плоский конденсатор создается системой двух бесконечно больших параллельных пластин площадью  $S$ , находящимися на малом расстоянии  $d$  друг от друга ( $d \ll \sqrt{S}$ ). Цилиндрический конденсатор образован двумя бесконечно длинными коаксиальными цилиндрами ( $l \gg (R_2 - R_1)$ ), а сферический – двумя концентрическими сферами. На рисунке 21.7 последний представлен линиями пересечения обкладок (сфер) с плоскостью чертежа. Если обкладки каждой из этих систем зарядить разноименными одинаковыми по модулю зарядами, то электрическое поле образуется только в пространстве между ними. Модуль заряда любой из обкладок называется **зарядом конденсатора**.

**Емкостью конденсатора** называется физическая величина, равная отношению заряда конденсатора к разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2}. \quad (21.8)$$

Так же как и емкость проводника, емкость конденсатора не зависит ни от величины заряда конденсатора, ни от разности потенциалов между его обкладками, а зависит только от размера и формы конденсатора, а также от диэлектрических свойств среды между обкладками конденсатора. Емкость конденсатора не зависит от наличия вблизи него других проводящих или диэлектрических тел и электрических полей.

Поскольку емкость величина положительная, а под зарядом конденсатора понимается модуль заряда одной из обкладок, то модуль разности потенциалов между обкладками обозначается символом  $U$ . Обычно выражение емкости конденсатора записывается в виде:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Термин «емкость» возник еще в середине XVIII в., когда отсутствовало понятие электрических зарядов, а электрические явления описывались поведением «электрической жидкости», которая «переливалась» из одного проводника в другой по проводам. Таким образом, емкость конденсатора определяла «количество электрической жидкости», которое он может в себя вместить. Поэтому первый конденсатор получил название «лейденская банка» (по названию города Лейден, в котором он был сконструирован).

**Пример.** Выведем формулу емкости плоского конденсатора, изображенного на рис. 21.7, а.

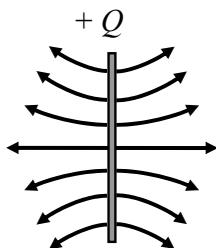


Рис. 21.8

Определим напряженность электростатического поля, создаваемого зарядом  $+Q$  одной из пластин площадью  $S$ . Силовые линии такого поля изображены на рис. 21.8.

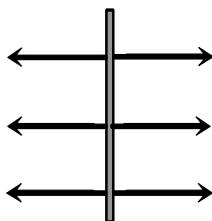


Рис. 21.9

Если рассмотреть точки пространства, расположенные настолько близко к пластине, что расстояние от них до пластины существенно меньше, чем до ее границ (из этих точек пластина будет представляться как бесконечно большая плоскость), то искривлением силовых линий у границ пластины можно пренебречь (рис. 21.9). Таким образом, большая заряженная пластина площадью  $S$  создает однородное поле. Исходя из симметричности системы, модуль напряженности поля во всех точках, равноудаленных от пластины,

должен быть одинаковым, а направление вектора  $\vec{E}$  зависит только от положения исследуемой точки пространства (слева или справа от пластины).

Определим напряженность поля в некоторой точке с координатой  $x$ , отсчитываемой вдоль оси  $Ox$ , направленной перпендикулярно пластине. Для этого в качестве гауссовой поверхности выберем поверхность цилиндра, ось которого перпендикулярна плоскости, а основание имеет площадь  $S_1$  (рис. 21.10).

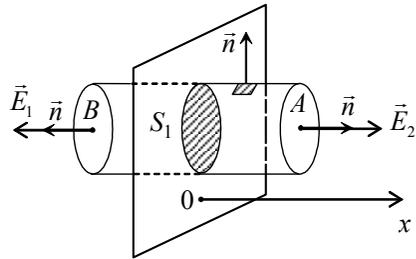


Рис. 21.10

Модуль напряженности поля одинаков во всех точках оснований цилиндра, исходя из симметрии системы. Угол между  $\vec{E}$  и внешней нормалью к поверхности во всех точках боковой поверхности цилиндра равен  $\pi/2$ , а во всех точках левого и правого оснований гауссова цилиндра этот угол равен нулю.

Определим поток напряженности поля через выбранную поверхность:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E_1 \int_{S_{\text{лев}}} \cos(\vec{E}_1, \hat{d}\vec{S}) dS + \\ + E_2 \int_{S_{\text{прав}}} \cos(\vec{E}_2, \hat{d}\vec{S}) dS + \int_{S_{\text{бок}}} E \cos(\vec{E}, \hat{d}\vec{S}) dS,$$

где  $S_{\text{лев}}$  – площадь левого основания гауссова цилиндра;  $S_{\text{прав}}$  – площадь правого основания гауссова цилиндра;  $S_{\text{бок}}$  – площадь боковой поверхности гауссова цилиндра. Получаем

$$E_1 \int_{S_{\text{лев}}} \cos(\vec{E}_1, \hat{d}\vec{S}) dS = E_1 S_1, \quad E_2 \int_{S_{\text{прав}}} \cos(\vec{E}_2, \hat{d}\vec{S}) dS = E_2 S_1,$$

$$\int_{S_{\text{бок}}} E \cos(\vec{E}, \hat{d}\vec{S}) dS = 0. \quad \text{Таким образом, так как } |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}|,$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 2ES_1. \quad (21.9)$$

Определим алгебраическую сумму зарядов, охваченных цилиндрической гауссовой поверхностью. В данном случае электрический заряд, попавший внутрь нее – это заряд «вырезанной» цилиндром части пластины. Его можно найти, умножив площадь основания цилиндра на поверхностную плотность заряда пластины:

$$Q_{\text{охв}} = \sigma S_1 = \frac{Q}{S} S_1. \quad (21.10)$$

Приравняем (21.9) и (21.10) с учетом коэффициента  $\epsilon_0$  и имеем:

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}. \quad (21.11)$$

Полученное соотношение определяет модуль напряженности однородного поля бесконечно большой заряженной пластины.

Расположим две разноименно заряженные пластины на малом расстоянии друг от друга так, чтобы выполнялось условие однородности поля каждой из них. На рисунке 21.11 показаны силовые линии поля каждой пластины. Видно, что в пространстве между пластинами напряженности полей пластин совпадают по направлению, а вне пластин противоположны. Поэтому с учетом (21.11) запишем напряженность поля по принципу суперпозиции:

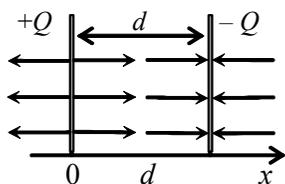


Рис. 21.11

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}, \quad 0 < x < d;$$

$$E = 0, \quad d < x < 0.$$

В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора можно определить следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d.$$

По определению (21.8) запишем емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Следует учесть, что если пространство между обкладками любого конденсатора заполнить диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то при том же значении заряда обкладок напряженность поля между обкладками уменьшится в  $\epsilon$  раз. Поэтому в  $\epsilon$  раз уменьшится разность потенциалов между ними, а, следовательно, в  $\epsilon$  раз увеличится емкость конденсатора. Запишем формулу емкости плоского конденсатора, заполненного диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ :

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (21.12)$$

Аналогично можно вывести формулу емкости сферического конденсатора:

$$C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Если конденсатор заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то

$$C_{\text{сф}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (21.13)$$

Подчеркнем еще раз, что емкость конденсатора зависит от его размера, формы обкладок и диэлектрических свойств среды, находящейся между его обкладками.

## Энергия электростатического поля.

### Объемная плотность энергии

Рассмотрим процесс зарядки проводника. Чтобы его заряд достиг величины  $Q$ , будем сообщать проводнику заряд порциями  $dq$ , перенося их из бесконечно удаленной точки  $1$  на поверхность проводника в точку  $2$  (рис. 21.12).

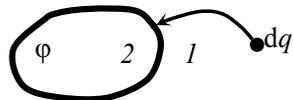


Рис. 21.12

Для передачи проводнику новой порции заряда  $dq$  внешние силы должны совершить работу против сил электрического поля:

$$\delta A_{\text{внеш}} = -dA_{\text{поля}} = -dq(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Потенциал бесконечно удаленной точки примем равным нулю  $\varphi_1 = 0$ . Потенциал точки 2 равен потенциалу проводника  $\varphi$ , поэтому

$$\delta A_{\text{внеш}} = dq\varphi.$$

Если проводнику передан заряд  $q$ , то его потенциал  $\varphi = \frac{q}{C}$ . Работу внешних сил по зарядке проводника зарядом  $Q$  рассчитаем так:

$$A_{\text{внеш}} = \int_0^Q dq\varphi = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Согласно закону сохранения энергии приращение электрической энергии проводника равно работе внешних сил:

$$W_{\text{пров}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (21.14)$$

Рассмотрим теперь процесс зарядки конденсатора емкостью  $C$  от источника ЭДС. Источник в процессе зарядки переносит заряды с одной пластины на другую, причем сторонние силы источника совершают работу по увеличению энергии конденсатора:

$$A_{\text{ист}} = \int_0^Q \varphi dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C},$$

где  $Q$  – заряд конденсатора после его зарядки. Тогда энергия электрического поля в конденсаторе

$$W_{\text{поля}} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2}. \quad (21.15)$$

Учитывая, что  $Q = C|\varphi_1 - \varphi_2|$  и  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$ , то энергию

электрического поля можно представить двумя способами:

$$W_{\text{поля}} = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{и} \quad W_{\text{поля}} = \frac{C}{2} \left( \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} \right)^2.$$

Сопоставление двух соотношений позволяет задать вопрос: с чем связана энергия электрического поля – с электрическим зарядом, создающим поле (первая формула) или с напряженностью поля (вторая формула)? Оба записанных равенства согласуются с результатами экспериментов, т.е. расчет энергии поля можно одинаково правильно осуществлять по обеим формулам. Однако такое наблюдается только в электростатике, т.е. когда осуществляется расчет энергии поля неподвижных зарядов.

При рассмотрении теории электромагнитного поля в дальнейшем (разд. 8) увидим, что электрическое поле может создаваться не только неподвижными зарядами. Электростатическое поле – это частный случай электромагнитного поля. Его энергия распределена в пространстве с определенной плотностью.

Определим энергию электрического поля плоского конденсатора. Подставим в (21.15) выражение для электроемкости  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$  и формулу связи разности потенциалов и напряженности однородного поля  $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$ . В результате получим

$$W_{\text{поля}} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{2d} E^2 d^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sd,$$

где  $V = Sd$  – объем конденсатора, т.е. объем той части пространства, в которой создано электрическое поле. Введем величину

$$w_3 = \frac{W_{\text{поля}}}{V} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}, \quad (21.16)$$

которая называется **объемной плотностью энергии поля**. Она равна отношению энергии поля, заключенного в некотором объеме пространства к этому объему.

Следовательно, энергия однородного электрического поля

$$W_{\text{поля}} = w_3 V = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V.$$

Если поле неоднородное, то можно выбрать такой элементарный объем пространства  $dV$ , в пределах которого значение напряженности поля будет практически одинаковым. Тогда по

аналогии с предыдущей формулой выражение для энергии поля в элементарном объеме:  $dW_{\text{поля}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV$ . Для всего пространства, в котором присутствует неоднородное поле,

$$W_{\text{поля}} = \oint_{(V)} w_3 dV. \quad (21.17)$$

**Пример.** Рассчитаем энергию электрического поля, созданного проводящим шаром радиусом  $R$ , заряженным зарядом  $Q$ , и находящимся в среде с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Приведем зависимость напряженности электрического поля, создаваемого заряженным шаром:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & , r < R; \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} & , r > R. \end{cases}$$

Поскольку напряженность поля зависит только от радиальной координаты  $r$ , то она будет практически постоянна в пределах тонкого сферического слоя с радиусом внутренней поверхности слоя  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 21.13). Объем этого слоя  $dV = 4\pi r^2 dr$ . Тогда энергия поля

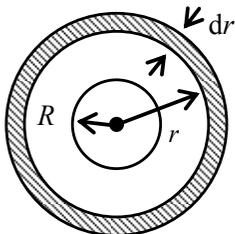


Рис. 21.13

$$\begin{aligned} W_{\text{поля}} &= \oint_{(V)} w_3 dV = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \end{aligned}$$

Аналогичный результат можно получить, если вычислять энергию заряженного шара по формуле (21.15). Воспользовавшись выражением емкости уединенного шара  $C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$ , получаем:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}.$$

Однако расчет по формуле (21.15) неприменим, если необходимо найти энергию электрического поля, заключенную не во всем объеме пространства, где присутствует поле, а лишь в части объема этого пространства.

### Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные особенности поведения электростатического поля внутри и у поверхности проводника.?
2. От чего зависит электрическая емкость уединенного проводника?
3. Как влияет на электроемкость проводника приближение к нему других незаряженных тел?
4. Чем определяется электроемкость конденсатора?
5. Как определить электрическую энергию системы заряженных тел? Где локализована эта энергия?
6. Объясните уменьшение силы взаимного притяжения пластин заряженного конденсатора при погружении его в жидкий диэлектрик.

## 22. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

В предыдущих главах были рассмотрены основные вопросы электростатики. Явления и процессы, связанные с движением электрических зарядов, составляют особую часть учения об электричестве – **электродинамику**. В электродинамике вводится понятие электрического тока. **Электрическим током** называют всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Электрический ток возникает в проводниках при условии, что внутри проводника напряженность электрического поля отлична от нуля. нас будет интересовать лишь один класс проводников, а именно металлы. Рассмотрим условия существования непрерывного электрического тока, введем его характеристики – силу тока и плотность тока, познакомимся с основными представлениями классической электронной теории электропроводности металлов, с законом Ома для неоднородного участка цепи.

**Электрическим током проводимости** называется упорядоченное движение свободных носителей зарядов в веществе или вакууме. В металлах свободными носителями зарядов являются электроны; в жидкостях (электролитах) – положительные и отрицательные ионы; в газах и в вакууме – электроны и ионы; в полупроводниках – электроны и «дырки». Это значит, что электрический ток может быть обусловлен движением как положительно, так и отрицательно заряженных носителей. За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные носители заряда.

**Постоянный электрический ток** – электрический ток, не изменяющийся во времени ни по величине, ни по направлению.

Упорядоченное движение свободных носителей зарядов возникает под действием сил электрического поля и характеризуется средней скоростью  $u$ . В то же время носители зарядов находятся в тепловом хаотическом движении со средней скоростью  $v$ . При наличии электрического тока нарушается равновесное распределение зарядов в проводнике: поверхность проводника уже не является эквипотенциальной, и силовые линии электрического поля не направлены перпендикулярно ей. Для движения зарядов необходимо, чтобы на поверхности проводника тангенциальная составляющая напряженности электрического поля не равнялась нулю. Такое электрическое поле создается поверхностными зарядами, плотность которых изменяется по длине проводника (существует градиент поверхностной плотности заряда). Внутри проводника поверхностными зарядами создается электрическое поле, силовые линии которого повторяют форму проводника.

**Необходимыми условиями для существования постоянного тока являются:**

- наличие свободных носителей зарядов, которые могли бы перемещаться на макроскопическое расстояние;
- наличие замкнутой проводящей цепи;
- наличие электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов (для того, чтобы ток был длительным, энергия поля должна все время пополняться, т.е. нужен источник электрической энергии).

**Сила тока  $I$**  – скалярная величина, численно равная заряду, переносимому в единицу времени через поперечное сечение проводника. Если за время  $dt$  переносится заряд  $dq$ , то по определению сила тока

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (22.1)$$

Другой характеристикой тока является векторная величина – **плотность тока  $\vec{j}$** . Модуль плотности тока равен отношению заряда, переносимого за единицу времени через поверхность, перпендикулярную к направлению движения носителей заряда, к площади этой поверхности.

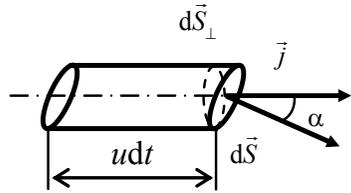


Рис. 22.1

Выделим внутри проводника с током поверхность площадью  $dS$  (рис. 22.1). За время  $dt$  эту поверхность пересечет заряд

$$dq = enudtdS\cos\alpha = enudtdS_{\perp},$$

где  $e$  – заряд электрона;  $n$  – концентрация электронов;  $u$  – средняя скорость упорядоченного движения;  $\alpha$  – угол между нормалью к поверхности  $dS$  и направлением движения носителей.

Модуль плотности тока по определению

$$j = \frac{dq}{dtdS_{\perp}} = enu.$$

Направление вектора плотности тока совпадает с направлением вектора средней скорости упорядоченного движения носителей:

$$\vec{j} = en\vec{u}. \quad (22.2)$$

Силу тока через элементарную поверхность  $dS$  можно записать так:  $dI = jdS_{\perp} = jdS\cos\alpha = \vec{j}d\vec{S}$ . Сила тока в проводнике находится интегрированием последнего выражения по всему поперечному сечению проводника:

$$I = \int \vec{j}dS. \quad (22.3)$$

Единица измерения силы тока **ампер** (А) является одной из основных единиц измерения в СИ. Определение этой единицы измерения будет дано позже при рассмотрении взаимодействия двух параллельных проводников с током.

Линии, вдоль которых движутся носители зарядов в проводниках, называются **линиями тока**. Касательные к линиям тока

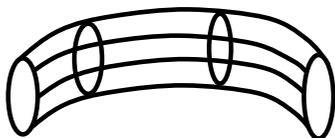


Рис. 22.2

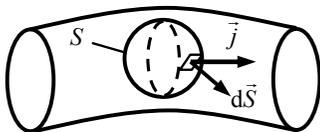


Рис. 22.3

совпадают с направлением вектора  $\vec{j}$  в точке касания. Если внутри проводника с током мысленно выделить трубку, боковая поверхность которой образована линиями тока, то носители зарядов не будут пересекать боковую поверхность трубки и не будут ни выходить из трубки наружу, ни входить в трубку извне (рис. 22.2).

Рассмотрим внутри проводника с током произвольную замкнутую поверхность  $S$  (рис. 22.3). Пусть  $j_n$  – проекция вектора плотности тока  $\vec{j}$

на нормаль к элементу поверхности  $dS$ . Величина положительного заряда, уходящего из объема, ограниченного поверхностью  $S$ , за единицу времени, равна убыли заряда в этом объеме:

$$\oint_S j_n dS = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (22.4)$$

Последнее выражение называется **уравнением непрерывности**. Оно является следствием **закона сохранения заряда**.

В случае постоянных токов объемное распределение зарядов в проводнике не изменяется. Заряд, вошедший в единицу времени в выделенный объем, равен заряду, вышедшему из него за то же время, т.е.  $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ . Уравнение непрерывности принимает вид:

т.е.  $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ . Уравнение непрерывности принимает вид:

$$\oint_S j_n dS = 0. \quad (22.5)$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, можем записать  $\oint_S j_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = 0$ . Объем интегрирования  $V$  произволен и не равен нулю. Отсюда следует, что

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (22.6)$$

Это уравнение является наиболее общим выражением того факта, что постоянный ток не имеет истоков, т.е. что линии тока всегда либо замкнуты, либо уходят в бесконечность. Электрическое поле постоянных токов, как и поле электростатическое является потенциальным, поэтому вектор напряженности поля  $\vec{E}$  может быть выражен через градиент потенциала:  $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ .

Поскольку распределение зарядов в случае постоянных токов стационарно, то их поле должно быть тождественно с электростатическим полем соответственно распределенных неподвижных зарядов.

В 1826 г. немецкий физик Г. Ом экспериментально установил закон, согласно которому **сила тока в однородном металлическом проводнике пропорциональна разности потенциалов на концах проводника:**

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (22.7)$$

**Однородным** называется проводник, в котором на носители действуют только силы электростатического происхождения. Величина  $R$ , входящая в (22.7), называется **электрическим сопротивлением** проводника. Единицей измерения сопротивления служит **Ом** (обозначается 1 Ом), равный сопротивлению такого проводника, в котором при разности потенциалов 1 В существует ток силой 1 А.

Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он изготовлен. Для однородного проводника длиной  $l$  с площадью поперечного сечения  $S$

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (22.8)$$

где  $\rho$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала. Этот коэффициент называется **удельным электрическим сопротивлением** вещества. В СИ значение  $\rho$  измеряется в Ом·м.

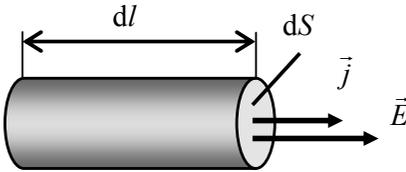


Рис. 22.4

Закон Ома можно записать в **дифференциальной форме**, установив, таким образом, связь между величинами, относящимися к одной и той же точке проводника. Выделим мысленно в окрестно-

стях некоторой точки внутри проводника элементарный цилиндрический объем (рис. 22.4) с образующими, параллельными вектору плотности тока  $\vec{j}$  в данной точке. Сила тока в цилиндре равна  $j dS$ ; разность потенциалов на торцах цилиндра равна  $E dl$ , где  $E$  – напряженность поля в данной точке. Электрическое сопротивление цилиндра согласно формуле (22.8) равно  $\rho \frac{dl}{dS}$ . Тогда закон

Ома (22.7) можно записать в виде  $j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl$ , или  $j = \frac{E}{\rho}$ .

Носители заряда в каждой точке движутся в направлении вектора напряженности электрического поля, поэтому

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (22.9)$$

где  $\gamma$  – величина, называемая **удельной электрической проводимостью** или **просто проводимостью** материала. Применяя закон Ома в дифференциальной форме, выражение (22.6) можно переписать следующим образом:  $\operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \gamma \vec{E} = 0$ .

В случае однородного проводника  $\gamma = \text{const}$ , тогда  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ . Сопоставляя этот результат с (3.24), можно сделать вывод, что в случае стационарных токов в однородном проводнике объемная плотность зарядов внутри проводника равна нулю. Заряды, создающие

электрическое поле внутри проводника, находятся только на его поверхности. А поле, в свою очередь, обеспечивает перемещение носителей заряда.

Способность вещества проводить ток характеризуется его удельным сопротивлением  $\rho$  или электропроводностью  $\gamma$ . Значения этих величин определяются химической природой вещества и внешними условиями (в частности, температурой), при которых оно находится. Для большинства металлов удельное сопротивление растет с температурой приблизительно по линейному закону  $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$ , где  $\rho_0$  – удельное сопротивление при  $0^\circ\text{C}$ ;  $t$  – температура по шкале Цельсия;  $\alpha$  – температурный коэффициент электрического сопротивления, численно равный примерно  $\frac{1}{273} (\text{°C})^{-1}$ . Переходя к абсолютной температуре, получаем

$$\rho = \rho_0 \alpha T. \quad (22.10)$$

При низких температурах наблюдаются отклонения от этой закономерности (рис. 22.5). В большинстве случаев зависимость  $\rho$  от  $T$  следует кривой 1. При этом при уменьшении температуры удельное сопротивление стремится к некоторому конечному значению  $\rho_{\text{ост}}$ . Значение  $\rho_{\text{ост}}$  зависит от чистоты материала и остаточных механических напряжений в образце. У абсолютно чистых металлов с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле  $\rho = 0$ .

У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка нескольких кельвин удельное сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис. 22.5). Это явление, обнаруженное в 1911 г. голландским физиком Х. Камерлинг–Оннесом, называется **сверхпроводимостью**. Каждый материал этой группы имеет свою критическую температуру  $T_k$ , при которой наступает сверхпроводимость. Для создания условий сверхпроводимости проводники охлаждаются в жидком гелии при температуре 4 К. Такие

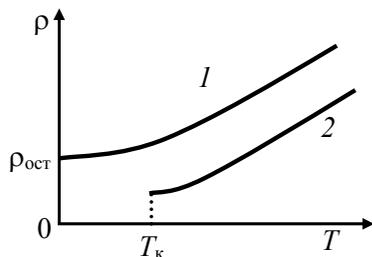


Рис. 22.5

сверхпроводящие системы являются очень дорогими и сложными устройствами, поэтому усилия ученых направлены на создание материалов, обладающих свойствами **высокотемпературной сверхпроводимости**.

Электронная теория проводимости металлов была впервые создана П. Друде в 1900 г. и получила дальнейшее развитие в работах Х. Лоренца. Существование тока в проводнике, сопровождающееся выделением тепла, в рамках классических представлений объясняется следующим образом. Свободные электроны ускоряются электрическим полем, которое имеется внутри проводника. Закон Ньютона для движения электрона имеет вид

$$ma = eE, \quad (22.11)$$

где  $m$ ,  $a$ ,  $e$  – соответственно масса, ускорение и заряд электрона.

На самом деле движение электрона очень сложно, поскольку электроны находятся в тепловом хаотическом движении. Под влиянием внешнего электрического поля электроны получают одинаковое ускорение и приобретают дополнительную скорость в направлении поля. В результате возникает упорядоченное движение электронов, т.е. электрический ток. Упорядоченное движение электронов накладывается на их хаотическое тепловое движение, причем скорость хаотического движения электронов много больше скорости их упорядоченного движения (дрейфа). Оценки при температуре  $t = 0^\circ\text{C}$  и плотности тока  $j = 1 \cdot 10^{11} \text{ А/м}^2$  дают следующие значения средней скорости  $v$  теплового движения и средней скорости  $u$  упорядоченного движения электронов:

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 10^5 \text{ м/с}, \quad u = \frac{j}{en} \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}, \quad \text{т.е. } v \gg u.$$

При своем движении электроны взаимодействуют друг с другом и с атомами кристаллической решетки проводника. При взаимодействии с узлами кристаллической решетки электроны передают им часть своей энергии, приобретенной электронами под действием электрического поля. Допустим, что электрон ускоряется в течение времени  $\tau$ , сталкивается с атомом и отдает ему всю приобретенную в электрическом поле кинетическую энергию. Затем он вновь ускоряется в течение времени  $\tau$  и вновь сталкивается с атомом, отдавая ему свою энергию.

Определим путь, пройденный электроном в упорядоченном движении, между двумя последовательными столкновениями:

$$S = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau^2, \quad (22.12)$$

где  $\tau = \lambda/v$ . Здесь  $\tau$ ,  $\lambda$  и  $v$  – соответственно среднее время между столкновениями, средняя длина свободного пробега между столкновениями и средняя скорость теплового движения электронов.

Средняя скорость упорядоченного движения

$$u = \frac{S}{\tau} = \frac{eE\lambda}{2m}. \quad (22.13)$$

Согласно выражению (22.2) плотность тока

$$j = enu = \frac{e^2 n \lambda E}{2mv}, \quad (22.14)$$

где  $n$  – концентрация электронов.

Сравнивая (22.14) с законом Ома  $j = \gamma E$ , находим выражение для удельной электрической проводимости:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \lambda}{mv}. \quad (22.15)$$

Классическая теория электропроводности весьма наглядна и дает правильную качественную зависимость плотности тока от напряженности поля. Однако она не приводит к правильным количественным результатам. Главные расхождения теории с экспериментом состоят в следующем.

1. Для того, чтобы по формуле (22.15) получить значения удельной электропроводности, совпадающие с экспериментальными, надо принять среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  очень большой (значение  $\lambda$  должно в тысячи раз превосходить межатомные расстояния в металле). Понять возможность таких больших значений длин свободных пробегов затруднительно в рамках классической теории.

2. Экспериментальная зависимость удельной электропроводности от температуры имеет вид  $\gamma \sim 1/T$ , в то время как из формулы (22.15) следует  $\gamma \sim 1/\sqrt{T}$ , поскольку

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

3. По теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы следует ожидать от свободных электронов очень большого вклада в теплоемкость проводников, что в эксперименте не наблюдается.

Лишь квантовая теория позволяет последовательно разрешить эти противоречия. Квантовая теория учитывает волновые свойства микрочастиц. Важнейшей особенностью волнового движения является способность волн огибать препятствия благодаря дифракции. В результате при своем движении электроны как бы огибают атомы без столкновений, и длины их свободного пробега могут быть весьма большими. Электроны подчиняются статистике Ферми–Дирака, согласно которой в образовании электронной теплоемкости может принимать участие лишь незначительная часть электронов. Решение задачи о движении электрона в проводнике в рамках квантовой механики приводит к зависимости  $\gamma \sim 1/T$ , что и наблюдается в действительности.

### Закон Ома для неоднородного участка цепи.

Для того, чтобы электрический ток существовал длительное время, необходимо наличие замкнутой цепи, свободных носителей зарядов и **сторонних сил**. В проводнике заряженные частицы движутся под действием электростатических сил в направлении от точки с большим потенциалом  $\varphi_1$  к точке с меньшим потенциа-

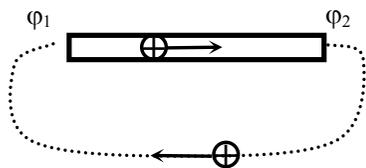


Рис. 22.6

лом  $\varphi_2$ . Сторонние силы (силы не электростатического происхождения) непрерывно отводят заряды от конца проводника с меньшим потенциалом  $\varphi_2$  и подводят их к концу с большим потенциалом  $\varphi_1$  (рис. 22.6).

**Циркуляция вектора напряженности электростатического поля всегда равна нулю.** Поэтому в замкнутой цепи, наряду с участками, на которых положительные заряды движутся в сторону убывания потенциала, должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, т.е. против сил электростатического поля (см. изображенную пунктиром часть цепи на рис. 22.6).

Рассмотрим участок  $I-2$  цепи (рис. 22.7). Предположим, что на этом участке действуют электростатические и сторонние силы, поля которых характеризуются напряженностями  $\vec{E}_{\text{эл}}$  и  $\vec{E}_{\text{стор}}$ . Напряженность

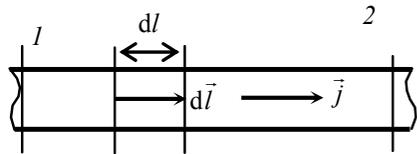


Рис. 22.7

резльтирующего поля, действующего на электроны, равна сумме напряженностей кулоновского поля и поля сторонних сил:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стор}}. \quad (22.16)$$

Выделим бесконечно малый элемент проводника  $d\vec{l}$  и запишем с учетом (22.16) закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (22.17)$$

Умножив левую и правую части выражения (22.17) на  $\rho d\vec{l}$ , получим:

$$\vec{j} \rho d\vec{l} = \vec{E}_{\text{эл}} d\vec{l} + \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (22.18)$$

Учтем, что все векторы в выражении (22.18) коллинеарны, поскольку являются касательными к линиям тока, а модуль плотности тока  $j = I / S$ , где  $I$  – сила тока в проводнике,  $S$  – площадь поперечного сечения проводника. Тогда выражение (22.18) можно переписать в виде

$$I \frac{\rho}{S} d\vec{l} = E_{\text{эл}} d\vec{l} + E_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (22.19)$$

Проинтегрируем выражение (22.19) по длине участка проводника от сечения  $1$  до сечения  $2$  с учетом того, что сила тока в каждом сечении проводника одинакова:

$$I \int_1^2 \frac{\rho}{S} d\vec{l} = \int_1^2 E_{\text{эл}} d\vec{l} + \int_1^2 E_{\text{стор}} d\vec{l}. \quad (22.20)$$

Рассмотрим подробнее физический смысл всех слагаемых, входящих в выражение (22.20). Первое слагаемое численно равно удельной работе электростатических сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2, т.е. разности потенциалов между этими точками:

$$\int_1^2 E_{\text{эл}} dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (22.21)$$

Второе слагаемое численно равно удельной работе электростатических сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 и называется **электродвижущей силой** (ЭДС)  $\mathcal{E}_{12}$ , действующей на участке цепи 1–2:

$$\int_1^2 E_{\text{стоп}} dl = \mathcal{E}_{12}. \quad (22.22)$$

**Электродвижущая сила численно равна удельной работе сторонних сил по перемещению заряда из точки 1 в точку 2.** Эта работа совершается источником энергии. Поэтому величину  $\mathcal{E}_{12}$  можно назвать электродвижущей силой источника энергии, включенного на участке цепи 1–2.

**Падением напряжения** на участке цепи 1–2 называется величина  $IR_{12}$ , численно равная удельной работе, совершаемой суммарным полем электростатических и сторонних сил при перемещении заряда из точки 1 в точку 2:

$$IR_{12} = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{эл}} + \vec{E}_{\text{стоп}}) d\vec{l}; \quad (22.23)$$

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (22.24)$$

Падение напряжения на участке цепи равно разности потенциалов только в том случае, если на этом участке не действуют сторонние силы. Величина, определяемая выражением

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{12}, \quad (22.25)$$

называется электрическим **сопротивлением** участка цепи между сечениями 1 и 2. Тогда соотношение (22.24) можно записать в виде

$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \sum_i \mathcal{E}_i. \quad (22.26)$$

Это выражение является математической записью **обобщенного закона Ома для участка цепи: произведение сопротивления участка цепи на силу тока в нем равно алгебраической сумме разности потенциалов на этом участке и ЭДС всех источников, включенных на участке.**

При выводе уравнения (22.26) выделенный участок цепи обходили в направлении движения положительных зарядов – в направлении электрического тока (вектор  $d\vec{l}$  совпадал с плотностью тока  $\vec{j}$ ). В общем случае при определении  $IR_{12}$  и ЭДС  $\mathcal{E}_i$  нужно пользоваться следующим правилом знаков. Падение напряжения  $IR_{12}$  считается положительным, если направление тока соответствует направлению обхода участка цепи от точки 1 к точке 2. В противном случае падение напряжения  $IR_{12}$  считается отрицательным. Значение ЭДС источника  $\mathcal{E}_i$  считается положительным, если направление обхода участка цепи от точки 1 к точке 2 соответствует перемещению внутри источника  $\mathcal{E}_i$  от отрицательного «-» к положительному полюсу «+». В противном случае  $\mathcal{E}_i$  следует считать отрицательным. В самом общем случае, при рассмотрении участка цепи с различными резисторами и различными токами в них, выражение (22.26) следует записывать в виде

$$\sum_k (\pm IR)_k = (\varphi_1 - \varphi_2) + \sum_i (\pm \mathcal{E})_i .$$

Применим обобщенный закон Ома к участку цепи, изображенному на рис. 22.8. Выберем положительное направление тока, как показано на рисунке, и направление обхода от точки 1 к точке 2.

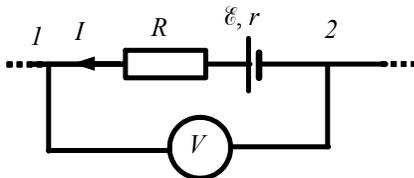


Рис. 22.8

Тогда для участка цепи  $1 - R - E - 2$  получим

$$-I(R+r) = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E} , \quad (22.27)$$

где  $r$  – внутреннее сопротивление источника тока. Применив обобщенный закон Ома к участку  $1 - V - 2$  (обход через вольтметр), получим

$$I_B R_B = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (22.28)$$

где  $I_B$  – сила тока через вольтметр;  $R_B$  – сопротивление вольтметра. Произведение  $I_B R_B$  равно разности потенциалов, измеренной вольтметром. Следовательно, вольтметр показывает разность потенциалов между точками его подключения.

### Контрольные вопросы и задания

1. Каковы условия существования тока проводимости в проводнике?
2. Чему равен поток вектора плотности тока проводимости через поверхность? Чему равен этот поток через замкнутую поверхность в случае постоянного тока?
3. Сформулируйте основные положения классической электронной теории проводимости металлов, укажите недостатки этой теории.
4. Объясните физический смысл электродвижущей силы, напряжения и разности потенциалов на участке электрической цепи.
5. Объясните правило знаков для силы тока и э.д.с. при записи обобщенного закона Ома для участка цепи.

## 23. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И СПОСОБЫ ЕЕ РАСЧЕТА

Магнитные явления были впервые обнаружены и изучены на естественных **магнитах**. Этим словом еще в Древней Греции были названы куски породы, добываемые вблизи г. Магнезия на территории современной Турции. Оказалось, что эти «магнитные камни» обладают способностью притягивать к себе куски железа. Однако понимание процессов, происходящих в магните, требует предварительного изучения более простых и фундаментальных явлений и понятий.

До сих пор рассматривались процессы, происходящие **внутри** проводников с токами. При рассмотрении электропроводности тел

были сформулированы законы постоянного тока. Однако эти законы не описывают всех явлений, наблюдаемых при прохождении электрического тока в проводниках. Опыты показали, что вокруг проводников с током так же, как и вокруг постоянных магнитов, существует силовое поле, которое легко можно обнаружить по его действию на движущиеся электрические заряды, другие проводники с токами и постоянные магниты. **Магнитное поле** – форма существования материи, посредством которой осуществляется действие на движущиеся электрические заряды и постоянные магниты со стороны других движущихся зарядов и постоянных магнитов.

Постоянные магниты оказывают ориентирующее действие на магнитную стрелку, помещенную вблизи них. Постоянное магнитное поле не действует на неподвижные электрически заряженные частицы и тела. В свою очередь эти заряженные частицы и тела не действуют на помещенную вблизи них магнитную стрелку, т.е. не создают магнитное поле.

Исследования электромагнитных явлений были начаты в опытах датского физика Х. Эрстеда в 1823 г. Он обнаружил, что при пропускании по прямолинейному горизонтальному проводнику постоянного тока, находящаяся под ним стрелка компаса поворачивается вокруг своей вертикальной оси, располагаясь перпендикулярно проводнику с током (рис. 23.1).

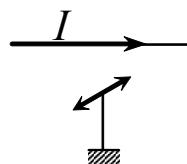


Рис. 23.1

В дальнейшем в аналогичных опытах исследовалось действие на магнитную стрелку электрического тока, протекающего по проводникам различной формы. Экспериментально доказано что **при создании в проводнике электрического тока вокруг проводника возникает магнитное поле, действующее на помещенную в это поле магнитную стрелку.** При этом материал проводника и характер его проводимости (электронный или ионный), а также происходящие в проводнике процессы не влияют на создаваемое им магнитное поле. Поскольку ток в проводнике – это упорядоченное движение электрических зарядов, то **вокруг всякого движущегося заряда должно существовать магнитное поле.** Электрическое поле, существующее вокруг любого электрического заряда, действует как на неподвижные, так и на дви-

жущиеся электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся в этом поле электрические заряды. Поэтому между двумя движущимися друг относительно друга заряженными частицами существуют и электрическое, и магнитное взаимодействия.

Существование магнитного поля в какой-либо области пространства можно обнаружить по его силовому действию либо на движущуюся заряженную частицу, либо на элемент проводника с током, либо на виток с током (замкнутый ток).

Если через какую-либо точку пространства, в котором существует магнитное поле, движется заряженная частица, то со стороны магнитного поля на нее действует сила, и частица отклоняется от первоначального направления движения. Направление силы зависит от направления скорости частицы и знака ее заряда, а модуль силы определяется зарядом частицы  $q$ , модулем ее скорости  $v$  и направлением движения частицы в поле. В случае, если вектор скорости частицы направлен определенным образом, модуль силы достигает максимального значения при неизменных  $q$  и  $|\vec{v}|$ . Оказывается, что отношение модуля максимальной силы к произведению заряда частицы и модуля ее скорости постоянно в данной точке поля:

$$\frac{F_{\max}}{q v} = \text{const} . \quad (23.1)$$

Если в ту же точку магнитного поля поместить прямолинейный элемент проводника длиной  $l$ , в котором существует ток силой  $I$ , то со стороны магнитного поля на проводник с током будет действовать сила, что можно обнаружить по отклонению проводника от исходного положения. Направление силы зависит от ориентации проводника в поле. Кроме того, в зависимости от ориентации проводника, модуль силы будет принимать различные значения, а в некотором положении на проводник будет действовать сила максимальной величины. Оказывается, что отношение модуля максимальной силы к произведению силы тока и длины проводника постоянно в данной точке поля:

$$\frac{F_{\max}}{I l} = \text{const} . \quad (23.2)$$

Если в ту же точку магнитного поля поместить виток (рамку) с током малых размеров, то со стороны магнитного поля на нее будет действовать момент сил, поворачивающий рамку вокруг некоторой оси. Направление вращающего момента зависит от направления тока в рамке и ее ориентации, а момент силы зависит от величины силы тока в рамке, ее площади и первоначальной ориентации витка в поле. При определенной ориентации рамки момент силы примет максимальное значение. Отношение модуля максимального момента к произведению силы тока в рамке на ее площадь постоянно в данной точке поля:

$$\frac{M_{\max}}{IS} = \text{const.} \quad (23.3)$$

Постоянная величина, определяемая выражениями (23.1)–(23.3), является характеристикой магнитного поля в исследуемой точке пространства. По своему физическому смыслу она определяет силовое действие магнитного поля на движущиеся заряженные частицы и называется магнитной индукцией  $B$ .

**Магнитная индукция** – векторная величина, характеризующая магнитное поле и определяющая силу, действующую на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля. Как уже было сказано, магнитная индукция определяется одним из трех соотношений:

$$B = \frac{F_{\max}}{qv}; \quad B = \frac{F_{\max}}{Il}; \quad B = \frac{M_{\max}}{IS}. \quad (23.4)$$

Поскольку в числителях выражений (23.4) стоят модули векторных величин и направления этих векторов экспериментально определены, то и магнитная индукция должна быть векторной величиной, имеющей определенное направление в пространстве.

По результатам экспериментальных исследований была «сконструирована» формула магнитной индукции магнитного поля, возникающего вблизи частицы, обладающей положительным зарядом  $Q$  и движущейся со скоростью  $\vec{v}$ :

$$\vec{B} = k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (23.5)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный от движущегося заряда  $Q$  (источника поля) в рассматриваемую точку пространства (рис. 23.2).

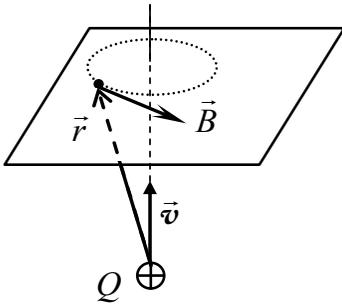


Рис. 23.2

Напомним, что, в соответствии с определением векторного произведения, вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен каждому из векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ . Если источником поля будет движущаяся в том же направлении отрицательно заряженная частица, то направление  $\vec{B}$  противоположно тому, которое указано на рис. 23.2.

Единица измерения магнитной индукции в СИ называется **тесла** (в честь американского электротехника Н. Тесла) и обозначается Тл. Таким образом,  $[B] = \text{Тл}$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  в формуле (23.5) зависит от выбора системы единиц. В СИ принимается, что

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}, \quad (23.6)$$

где  $\mu_0$  – коэффициент, называемый **магнитной постоянной**:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}. \quad (23.7)$$

В случае, если магнитное поле создается системой движущихся зарядов, то для нахождения результирующей магнитной индукции в любой точке пространства справедлив **принцип суперпозиции магнитных полей (принцип независимости действия магнитных полей)**:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i, \quad (23.8)$$

**т.е. магнитная индукция поля, созданного системой движущихся зарядов в любой точке пространства, равна векторной сумме магнитных индукций полей, созданных каждым движущимся зарядом в этой точке в отдельности.**

Определим с помощью принципа суперпозиции (23.8) и соотношения (23.5) магнитную индукцию поля, создаваемого элементом проводника с током (рис. 23.3) в некоторой точке пространства.

Поскольку электрический ток – это направленное движение заряженных частиц, за направление которого принято направление движения положительных зарядов, магнитное поле в точке  $M$  будет создаваться всеми движущимися по проводнику частицами, сосредоточенными в выбранном элементе проводника длиной  $dl$ . Если

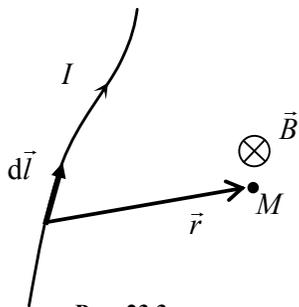


Рис. 23.3

концентрация свободных носителей заряда в проводнике  $n$ , то число заряженных частиц в данном элементе проводника  $dN = nS dl$ . Пусть каждая из частиц обладает зарядом  $Q$ . Согласно (23.5) и (23.8) запишем элементарную магнитную индукцию  $d\vec{B}$  (т.е. магнитную индукцию поля, созданного элементом проводника) в точке  $M$ :

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} dN = k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} nS dl = \\ &= k \frac{Q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} nS dl \frac{\mathbf{v}}{v} = k \frac{QnS\mathbf{v}}{r^3} \left[ \frac{\vec{v}}{v} dl, \vec{r} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку сила тока в проводнике  $I = QnSv$ , а соотношение  $\frac{\vec{v}}{v} dl$  определяет вектор  $d\vec{l}$ , то  $d\vec{B}$  запишется в виде

$$d\vec{B} = k \frac{I}{r^3} [d\vec{l}, \vec{r}]. \quad (23.9)$$

**Магнитная индукция поля, созданного в произвольной точке пространства элементом проводника  $dl$  с током силой  $I$  прямо пропорциональна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на радиус-вектор, проведенный от этого элемента в точку, и обратно пропорциональна кубу длины радиуса-вектора. Это утверждение называется законом Био–Савара–Лапласа.** Математическую

форму закону придал в 1823 г. французский математик П.С. Лаплас, обобщив результаты исследований Ж.Б. Био и Ф. Савара.

Определим с помощью этого закона магнитные индукции некоторых магнитных полей.

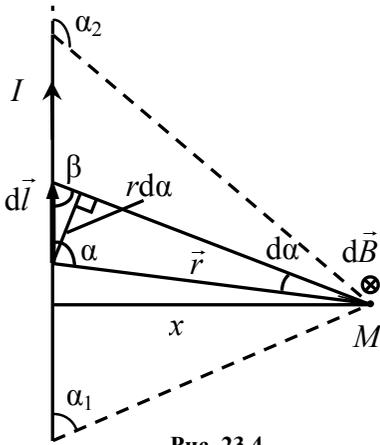


Рис. 23.4

**Пример 1.** Определим магнитную индукцию магнитного поля прямолинейного проводника с током (рис. 23.4). Пусть исследуемая точка  $M$  находится на кратчайшем расстоянии  $x$  от проводника. Выделим в проводнике элемент длиной  $d\vec{l}$ , которому будет соответствовать вектор  $d\vec{l}$ . Проведем от этого элемента радиус-вектор  $\vec{r}$  в точку  $M$ . Согласно закону Био–Савара–Лапласа, элементарная магнитная

индукция поля  $d\vec{B}$ , создаваемого в точке  $M$  этим элементом проводника, определяется выражением (23.9), а направление вектора – правилом векторного произведения: если правый винт вращать по кратчайшему пути от первого сомножителя произведения (вектора) ко второму сомножителю (вектору), то поступательное движение винта укажет направление. На рисунке 23.4 показано, что вектор  $d\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости рисунка «от нас».

Проводник можно представить в виде бесконечно большого числа элементарных отрезков с током. Каждый из них в рассматриваемой точке создает магнитное поле с элементарной индукцией  $d\vec{B}$ . Направления всех векторов  $d\vec{B}$  совпадают, поэтому согласно принципу суперпозиции (23.8)  $\vec{B} = \int d\vec{B}$ , причем  $\vec{B} = \int d\vec{B}$ ,

Модуль элементарной индукции  $dB$  можно найти следующим образом: согласно закону Био–Савара–Лапласа

$$dB = k \frac{I}{r^3} \left| \left[ d\vec{l}, \vec{r} \right] \right| = k \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha, \quad (23.10)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ . Поскольку элемент  $d\vec{l}$  виден из точки  $M$  под малым углом  $d\alpha$ , то  $\sin \alpha \approx \sin \beta$ ,  $dl/\sin \alpha = dl/\sin \beta = r d\alpha$ , так как отрезок  $r d\alpha$  практически совпадает с дугой окружности радиусом  $r$  с центром в точке  $M$ . Наконец,

$$r = \frac{x}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

Подставляя полученные выше соотношения в (23.10), получаем:

$$dB = k \frac{I}{x} \sin \alpha d\alpha.$$

Тогда

$$B = \int dB = k \frac{I}{x} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = k \frac{I}{x} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (23.11)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между направлением тока в проводнике и направлением на точку  $M$  в начале и в конце проводника (см. рис. 23.4).

Из (23.11) можно получить выражение для модуля индукции магнитного поля **бесконечно длинного прямолинейного проводника с током**. Таким объектом будет отрезок прямого провода, если исследуемая точка  $M$  находится настолько близко к проводу, что расстояние  $x$  во много раз меньше расстояний от точки  $M$  до концов отрезка проводника, т.е. границы проводника не видны из точки  $M$ . Следовательно  $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \pi$ . Формула (23.11) в СИ принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}. \quad (23.12)$$

Для определения направления вектора  $\vec{B}$  в произвольной точке применимо следующее правило (**правило правого винта, или «правило буравчика»**): если ввинчивать правый винт по направлению тока в прямолинейном проводнике, то направление движения рукоятки винта укажет направление вектора магнитной индукции в каждой точке пространства.

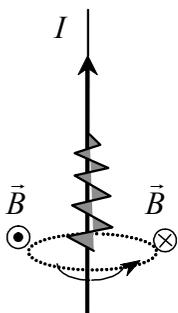


Рис. 23.5

На рисунке 23.5 показано, что во всех точках плоскости рисунка слева от проводника векторы  $\vec{B}$  направлены перпендикулярно плоскости рисунка «на нас», а во всех точках справа от проводника – «от нас».

Если рассмотреть направление векторов  $\vec{B}$  в различных точках, то можно сделать такой вывод: векторы магнитной индукции магнитного поля прямолинейного бесконечного проводника с током расположены в плоскостях, перпендикулярных проводнику, причем

в точках, равноудаленных от проводника модули векторов одинаковы. Для графического изображения стационарного, т.е. не изменяющегося во времени, магнитного поля пользуются методом линий магнитной индукции.

**Линиями магнитной индукции** называются воображаемые линии, проведенные так, что в каждой точке поля касательная к линии магнитной индукции совпадает с направлением вектора  $\vec{B}$  в этой точке поля. Линии магнитной индукции можно наблюдать с помощью мелких игольчатых железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом поле и ведут себя подобно маленьким магнитным стрелкам, разворачиваясь вдоль линий магнитной индукции. Подобный метод графической иллюстрации магнитного поля напоминает изображение электрических полей с помощью силовых линий. Так же как и силовые линии электрических полей, линии магнитной индукции не пересекаются и не соприкасаются. Однако есть существенные отличия свойств силовых линий электростатического поля и линий магнитной индукции.

Во-первых, **силовые линии** в каждой точке указывают направление **силы**, действующей на заряд в электрическом поле (отсюда и название), а направление линий магнитной индукции не указывает направление силы, действующей на движущийся заряд в магнитном поле; поэтому их не рекомендуется называть силовыми линиями магнитного поля.

Во-вторых, силовые линии электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах, а линии магнитной индукции замкнуты.

Будем называть магнитное поле **однородным**, если во всех его точках векторы индукции  $\vec{B}$  совпадают по модулю и направлению. В этом случае линии магнитной индукции параллельны друг другу, т.е. замыкаются на бесконечно большом удалении от рассматриваемой точки пространства. Однородным можно считать магнитное поле между полюсами постоянного магнита.

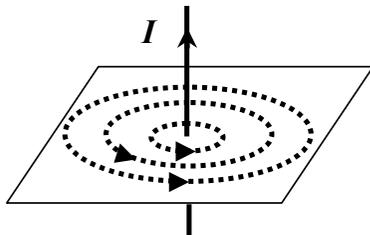


Рис. 23.6

В случае бесконечно длинного прямолинейного проводника с током линии магнитной индукции образуют систему концентрических окружностей, центры которых расположены на проводнике, а плоскости окружностей перпендикулярны проводнику (рис. 23.6). Направления линий магнитной индукции определены по правилу буравчика.

**Пример 2.** Определим магнитную индукцию магнитного поля кругового витка радиусом  $R$  с током силой  $I$  (рис. 23.7).

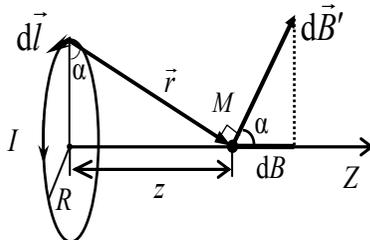


Рис. 23.7

Пусть исследуемая точка  $M$  находится на его оси на расстоянии  $z$  от плоскости витка. На рисунке 23.7 плоскость витка с током перпендикулярна плоскости рисунка. Выделим в витке элемент длиной  $dl$ , которому будет соответствовать вектор  $d\vec{l}$ . Пусть это будет элемент, расположенный так, что вектор  $d\vec{l}$  направлен «на нас». Проведем от этого элемента радиус-вектор  $\vec{r}$  в точку  $M$ . Согласно закону Био–Савара–Лапласа, элементарная магнитная индукция  $d\vec{B}'$ , создаваемая в точке  $M$  этим элементом проводника, будет определяться выражением (23.9). Направление вектора  $d\vec{B}'$  определим по правилу векторного произведения: если правый винт вращать по кратчайшему пути от первого сомножителя произведения (вектора  $d\vec{l}$ ) ко второму сомножителю (вектору  $\vec{r}$ ), то поступательное движение винта укажет направление  $d\vec{B}'$ .

На рисунке 23.7 показано, что вектор  $d\vec{B}'$  направлен в плоскости рисунка перпендикулярно вектору  $\vec{r}$ . Если рассмотреть различные элементы витка, то можно сделать вывод, что все элементарные индукции  $d\vec{B}'$  будут направлены в точке  $M$  под одним и тем же углом  $\alpha$  к оси витка, причем их модули будут одинаковы. Из условий симметрии следует, что вектор магнитной индукции поля, создаваемого всем витком с током, будет направлен вдоль оси витка  $Z$ . Поэтому нужно суммировать проекции элементарной магнитной индукции на ось  $Z$ . Тогда согласно принципу суперпозиции (23.8)

$$|\vec{B}| = \int dB,$$

где  $dB = dB' \cos \alpha = k \frac{I dl}{r^2} \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha$ ;  $r^2 = R^2 + z^2$ ;  $\cos \alpha = \frac{R}{r}$ . Таким образом

$$B = \int_0^{2\pi R} k \frac{IR dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = k \frac{2\pi IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (23.13)$$

Это выражение в СИ принимает вид

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (23.14)$$

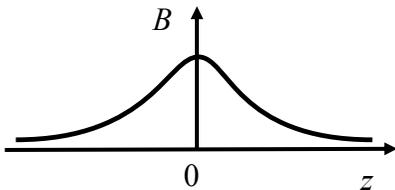


Рис. 23.8

График зависимости модуля магнитной индукции на оси витка от координаты  $z$  приведен на рис. 23.8.

Из (23.14) легко получить выражение для модуля магнитной индукции в центре кругового витка с током ( $z = 0$ ):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (23.15)$$

**Магнитным моментом витка с током**  $\vec{p}_m$  называется вектор, модуль которого равен произведению силы тока в витке  $I$  на площадь витка  $S$ , а направление совпадает с единичным вектором нормали к витку:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}. \quad (23.16)$$

Направление вектора  $\vec{n}$  согласовано с направлением тока в витке по правилу буравчика (рис. 23.9). С учетом  $\vec{p}_m$  выражение (23.14) преобразится к виду

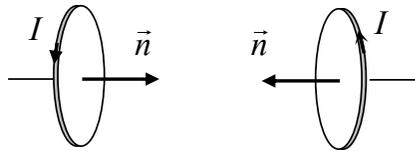


Рис. 23.9

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (23.17)$$

Определим **циркуляцию магнитной индукции** вдоль произвольного замкнутого контура. Сначала рассмотрим магнитное поле, созданное длинным прямолинейным проводником с током силой  $I$ . Линии магнитной индукции поля такого проводника представляют собой окружности, центры которых совпадают с осью проводника. На рисунке 23.10 пунктирной окружностью показана одна из линий магнитной индукции.

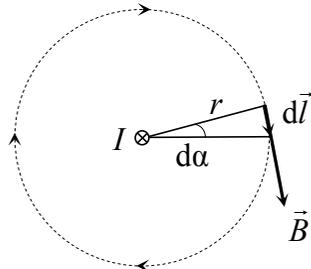


Рис. 23.10

Проводник расположен перпендикулярно плоскости рисунка. Ток в проводнике направлен в плоскость чертежа «от нас».

Модуль магнитной индукции в каждой точке окружности радиусом  $r$  определяется по формуле (23.12):

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Направление  $\vec{B}$  при выбранном направлении тока в проводнике определяется в соответствии с правилом буравчика и указано на рис. 23.10. Вычислим циркуляцию магнитной индукции вдоль контура, совпадающего с линией магнитной индукции,

причем направление обхода контура выберем по часовой стрелке. Элемент окружности  $d\vec{l}$  совпадает в каждой точке по направлению с вектором  $\vec{B}$ . Тогда

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos(\vec{B} d\vec{l}) = B dl = B r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi,$$

где  $d\varphi$  – угол, под которым элемент  $d\vec{l}$  виден из центра окружности. Циркуляция магнитной индукции по всему замкнутому контуру определяется следующим соотношением:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I. \quad (23.18)$$

Таким образом, в отличие от циркуляции напряженности электростатического поля, циркуляция магнитной индукции по замкнутому контуру не равна нулю, следовательно, магнитное поле не является потенциальным.

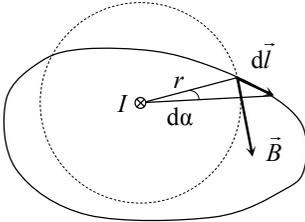


Рис. 23.11

Теперь найдем циркуляцию магнитной индукции вдоль произвольного контура  $L$ , не совпадающего с линией магнитной индукции (рис. 23.11). Учитывая, что  $dl \cos \alpha = r d\varphi$ , можем записать:

$$\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos \alpha = B r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi.$$

Интегрируя по углу  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , получаем:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

Приведенный вывод повторяет результат, полученный в соотношении (23.18). Отметим, что в случаях, изображенных на рис. 23.10 и 23.11, проводник с током пересекал поверхность, ограниченную контуром  $L$ . Такой проводник (или ток) называют **проводником (током), сцепленным с контуром**.

Рассмотрим, чему будет равна циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру, не охватывающему ток (рис. 23.12). В этом случае весь контур  $L$  разбивается на две

части  $L_1$  и  $L_2$ . На части контура  $L_1$  угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$  острый ( $\cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) > 0$ ), а на части контура  $L_2$  угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$  тупой ( $\cos(\widehat{\vec{B}d\vec{l}}) < 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{B} d\vec{l} &= \int_{L_1} \vec{B} d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B} d\vec{l} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi} d\varphi - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi - \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Итак, если ток не сцеплен с контуром, то циркуляция магнитной индукции по такому контуру равна нулю.

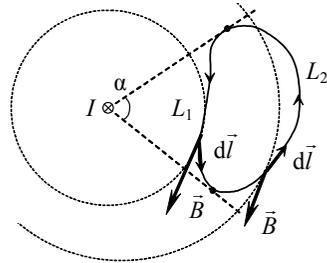


Рис. 23.12

Если магнитное поле создается системой токов, то из принципа суперпозиции магнитных полей следует, что в правой части (23.18) необходимо будет записать алгебраическую сумму токов, сцепленных с контуром. При этом знак тока определяется в соответствии с выбранным направлением обхода контура. Если направление тока и направление обхода контура согласуются с правилом правого винта, то сила тока берется со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус. Если получено положительное значение циркуляции магнитной индукции, то это означает, что угол между направлениями магнитной индукции и элемента контура  $d\vec{l}$  является острым. Рисунок 23.13 и выражение (23.19) иллюстрируют правило знаков:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_3 + I_4). \quad (23.19)$$

Таким образом, **циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру прямо пропорциональна алгебраической сумме токов, сцепленных с этим контуром.**

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{i\text{сц}}. \quad (23.23)$$

Теорему о циркуляции магнитной индукции называют также **законом полного тока** для магнитного поля.

Поскольку циркуляция магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру в общем случае отлична от нуля, то магнитное поле не является потенциальным. Оно относится к **вихревым** физическим полям. Вихревой характер поля означает, что его линии магнитной индукции замкнуты сами на себя, а неподвижные «магнитные заряды», создающие такое поле, в природе отсутствуют.

Рассмотрим методику применения закона полного тока для определения магнитной индукции различных полей. Этот закон удобно использовать для расчета магнитной индукции таких магнитных полей, которые создаются симметричными системами токов. В этом случае можно так выбрать контур интегрирования, что циркуляция магнитной индукции поля по нему легко выражается через искомое значение модуля вектора  $\vec{B}$ . Решение задачи о нахождении индукции поля в какой-либо точке пространства должно осуществляться следующим образом:

1) исходя из симметрии распределения заданной системы токов в пространстве, необходимо построить линии магнитной индукции поля, т.е. определить направление вектора  $\vec{B}$  в любой точке пространства;

2) выбрать «удобный» замкнутый контур интегрирования, отвечающий следующим требованиям:

а) контур должен проходить через исследуемую точку;

б) длина контура должна быть известна;

в) модуль индукции поля должен быть постоянен в точках всего контура или хотя бы его части;

г) угол между  $\vec{B}$  и касательной к контуру должен быть известен в любой точке контура (это обеспечивается выполнением п. 1);

3) определить циркуляцию магнитной индукции по выбранному замкнутому контуру:

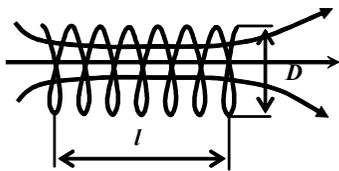
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B_1 \int_{L_1} \cos(\vec{B}, d\vec{l}) dl + B_2 \int_{L_2} \cos(\vec{B}, d\vec{l}) dl + \dots + B_n \int_{L_n} \cos(\vec{B}, d\vec{l}) dl,$$

где  $B_i$  – постоянный модуль магнитной индукции во всех точках части контура  $l_i$ ;

4) определить алгебраическую сумму токов, сцепленных с контуром;

5) применить теорему, т.е. приравнять результаты, полученные в пп. 3 и 4 с учетом коэффициента пропорциональности  $\mu_0$ .

**Пример 3.** Определим магнитную индукцию поля бесконечно длинного соленоида. Таким термином называется катушка, образованная одинаковыми плотно прилегающими друг к другу витками (рис. 23.14), причем длина катушки существенно больше ее диаметра.



$$D \ll l$$

Рис. 23.14

Изобразим на рис. 23.15 фрагмент центральной части соленоида, указав направления тока в его витках. Выберем контур интегрирования  $L$ , состоящий из четырех участков. Первый участок длиной  $l_1$  проведем вдоль оси соленоида. Вблизи оси соленоида магнитное поле можно считать однородным. Здесь линии магнитной индукции параллельны оси, а модуль индукции не изменяется.

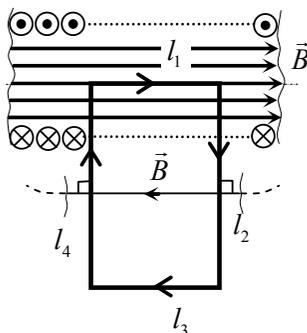


Рис. 23.15

Участки контура  $l_2$  и  $l_4$  проведем так, чтобы они были перпендикулярны линиям магнитной индукции. Замкнем контур участком  $l_3$  настолько далеким от оси соленоида, чтобы магнитную индукцию в точках этого участка контура можно было бы принять равной нулю. При таком выборе контура циркуляция магнитной индукции будет отлична от нуля только на участке  $l_1$ :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_{l_1} B dl = Bl_1. \quad (23.21)$$

Алгебраическая сумма токов, сцепленных с контуром  $L$ , определится числом токов в витках соленоида, расположенных на длине отрезка  $l_1$ :

$$\sum_{i=1}^n I_{\text{сц}} = Inl_1, \quad (23.22)$$

где  $n$  – число витков соленоида, приходящееся на единицу его длины. Применим закон полного тока, приравняв выражения (23.21) и (23.22) с учетом коэффициента  $\mu_0$ :

$$Bl_1 = \mu_0 Inl_1. \quad (23.23)$$

Тогда модуль магнитной индукции в центре бесконечно длинного соленоида на его оси

$$B_{\text{центр}} = \mu_0 In. \quad (23.24)$$

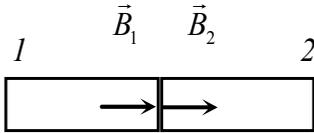


Рис. 23.16

Найдем модуль магнитной индукции в центре основания бесконечно длинного соленоида. Для этого магнитную индукцию в среднем сечении такого соленоида представим суммой магнитных индукций, создаваемых левой 1 и правой 2 бесконечно длинными половинами соленоида (рис. 23.16):  $B = B_1 + B_2$ . Поскольку  $B_1 = B_2 = B_{\text{край}}$ ,

$$\text{то } B_{\text{край}} = \frac{1}{2} \mu_0 In. \quad (23.25)$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется магнитная индукция поля постоянного тока?
2. Запишите выражение закона Био–Савара–Лапласа для определения магнитной индукции, создаваемой элементом проводника с током.
3. В каких случаях магнитную индукцию удобно находить, основываясь на теореме о циркуляции магнитной индукции?
4. Опишите алгоритм определения магнитной индукции с помощью закона полного тока.

## 24. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВИЖУЩИЙСЯ ЗАРЯД И ПРОВОДНИК С ТОКОМ

Экспериментально обнаружено, что магнитное поле действует на движущиеся в нем частицы, имеющие электрические заряды. В соответствии с (23.4), магнитная индукция равна отношению максимальной силы, действующей со стороны магнитного поля на заряженную частицу, движущуюся со скоростью  $\vec{v}$ , к произведению заряда на скорость частицы. Если заряженная частица влетает в магнитное поле (рис. 24.1), то сила  $\vec{F}$ , действующая со стороны поля, перпендикулярна скорости частицы и вектору магнитной индукции  $\vec{B}$ :

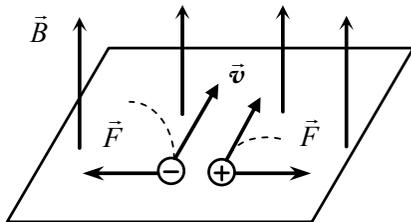


Рис. 24.1

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (24.1)$$

откуда следует, что  $\vec{F} \uparrow \uparrow [\vec{v}, \vec{B}]$  при  $q > 0$  и  $\vec{F} \uparrow \downarrow [\vec{v}, \vec{B}]$  при  $q < 0$ .

Эти случаи поясняются с помощью рис. 24.1. Направление силы  $\vec{F}$  согласно (24.1) можно определить по правилу «левой руки»: если расположить кисть левой руки так, чтобы четыре пальца показывали направление скорости частицы, а линии магнитной индукции входили в раскрытую ладонь, то отогнутый под прямым углом большой палец покажет направление силы, действующей на положительно заряженную частицу. Если заряд частицы отрицателен, направление силы будет противоположным.

Поскольку сила, действующая на частицу, перпендикулярна ее скорости, ускорение, сообщаемое этой силой, тоже перпендикулярно скорости частицы и является **нормальным ускорением**. Под действием этой силы траектория частицы будет искривляться.

Из (24.1) следует, что, если заряженная частица влетает в поле вдоль линий магнитной индукции, сила на частицу не действует. Если же частица влетает в поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, то сила, действующая на частицу, является максимальной:  $F = qvB$ . Запишем второй закон Ньютона для заряженной частицы, движущейся в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции:  $F = ma_n$ , или  $qvB = m \frac{v^2}{R}$ , где  $m$  – масса частицы, а  $R$  – радиус кривизны траектории. Если

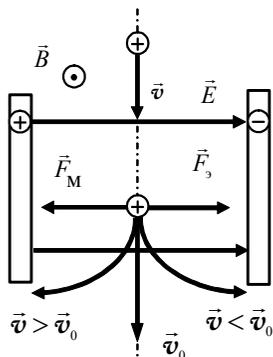


Рис. 24.2

поле однородно ( $B = \text{const}$ ), то  $R$  является радиусом окружности

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (24.2)$$

Период обращения частицы по этой окружности не зависит от скорости частицы:  $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$ .

Движение частицы в магнитное поле осуществляется с постоянной скоростью, кинетическая энергия частицы не изменяется. Это является следствием того, что сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля, не совершает работы ( $\vec{F} \perp \vec{v}$ ,  $\vec{F} \perp \Delta\vec{r}$ ).

Если же заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях, то в соответствии с (13.5) и (24.26) на нее действует сила

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]. \quad (24.3)$$

Эта сила называется **силой Лоренца** (в честь голландского физика Х.-А. Лоренца, получившего в 1902 г. Нобелевскую премию за исследование влияния магнетизма на процессы излучения). Первое слагаемое выражения (24.3) определяет электрический компонент силы Лоренца, а второе – магнитный.

Рассмотрим некоторые примеры практического использования воздействия магнитного и электрического полей на заряженные

частицы. На рисунке 24.2 показана схема работы сепаратора частиц, т.е. устройства, разделяющего пучок частиц по их скоростям или энергиям.

В таком устройстве существует область, в которой созданы однородные электрическое и магнитное поля. Векторы напряженности и магнитной индукции этих полей взаимно перпендикулярны. На рисунке вектор магнитной индукции направлен из плоскости чертежа «на нас», а вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости чертежа и направлен вправо. Пусть в сепаратор влетает пучок одинаковых положительно заряженных частиц, имеющих разные скорости. Тогда если частицы движутся так, что  $\vec{v} \perp \vec{B}$  и  $\vec{v} \perp \vec{E}$ , то электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца направлены в противоположные стороны. При определенном значении модуля скорости  $v_0$  эти составляющие равны:

$$qv_0B = qE, \quad v_0 = \frac{E}{B}.$$

Это означает, что все частицы, модули скоростей которых равны  $v_0$ , пролетят сепаратор, не отклоняясь от своего первоначального направления. Частицы пучка, модули скоростей которых больше, чем  $v_0$ , отклонятся влево. Для них  $qvB > qE$ , т.е. магнитная составляющая силы Лоренца превосходит электрическую составляющую. Остальные частицы отклонятся вправо, так как для них  $qvB < qE$ . Таким образом, на выходе из сепаратора будет получен **моноэнергетический** пучок частиц, т.е. пучок частиц, обладающих одинаковой кинетической энергией.

Если пучок образован частицами разных масс, то дальнейшее воздействие на него однородного магнитного поля способно разделить частицы по массе. На этом основано действие масс-спектрометра (рис. 24.3).

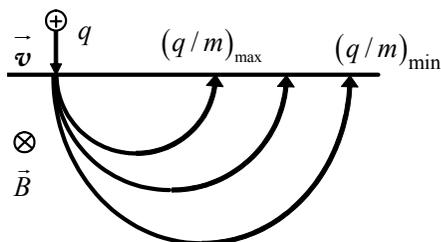


Рис. 24.3

Пусть пучок частиц, прошедших сепаратор, попадает в однородное магнитное поле, магнитная индукция которого перпендикулярна скорости частиц. Тогда частицы пучка, масса которых равна  $m_i$ , будут согласно (24.2) в дальнейшем двигаться по окружности радиусом

$$R_i = \frac{m_i v}{qB}.$$

Чем больше **удельный заряд частицы** (отношение ее заряда к массе  $\frac{q_i}{m_i}$ ), тем меньше радиус ее траектории при той же скорости и индукции магнитного поля. Таким образом, масс-спектрометр позволяет установить состав исследуемого пучка частиц, рассортировав его по значениям удельного заряда.

Воздействие магнитного поля на пучки движущихся частиц приводит иногда к неожиданным экспериментальным результатам. В 1879 г. американский физик Э.Г. Холл обнаружил эффект, названный впоследствии его именем. **Эффектом Холла** называется возникновение в проводнике с током, помещенном в магнитное поле, разности потенциалов в направлении, перпендикулярном векторам плотности тока и магнитной индукции.

Для объяснения этого эффекта рассмотрим фрагмент плоского металлического проводника толщиной  $b$ , в котором электрическим полем с напряженностью  $\vec{E}_{\parallel}$  создан электрический ток плотностью  $\vec{j}$  (рис. 24.4, *a*). В отсутствие магнитного поля свободные электроны металла упорядоченно движутся со скоростью  $\vec{u}$ , направленной противоположно вектору плотности тока  $\vec{j}$ . Если проводник поместить в магнитное поле так, что  $\vec{B} \perp \vec{j}$ , то на электроны будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_M$ , направление которой показано на рисунке. Ее действие приведет к поперечному смещению электронов, в результате чего между верхней и нижней поверхностями проводника появится электрическое поле разделенных зарядов. Если проводник достаточно тонкий, то возникшее электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}_{\perp}$

можно считать однородным. Процесс смещения электронов прекратится, когда компенсируются силы, действующие на них со стороны магнитного и электрического полей:  $euB = eE_{\perp}$ . В проводнике установится электрическое поле с напряженностью  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$  (рис. 24.4, б). Изменение направления напряженности электрического поля в проводнике приведет к изменению положения эквипотенциальных плоскостей (эквипотенциальные плоскости перпендикулярны  $\vec{E}$ ). Ранее такая плоскость проходила через точки  $M$  и  $N$  проводника (рис. 24.4, в). Теперь она пройдет через точки  $M'$  и  $N$ . Поэтому между точками  $M$  и  $N$  возникнет разность потенциалов

$$\varphi_N - \varphi_M = E_{\perp} b = uBb.$$

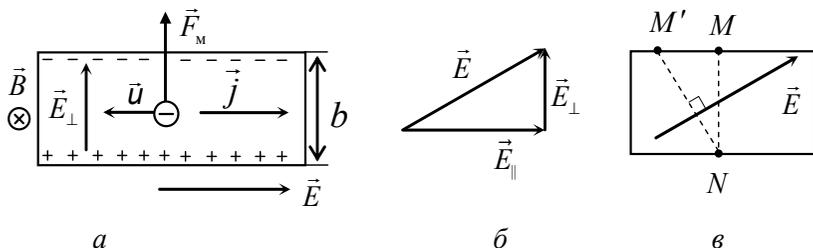


Рис. 24.4

Поскольку  $j = uen$ , где  $n$  – концентрация свободных электронов в металле, то

$$\varphi_N - \varphi_M = \frac{j}{en} Bb. \quad (24.9)$$

Эта разность потенциалов называется **холловской разностью потенциалов**, ее экспериментальное измерение при заданных размерах проводника и силе тока в нем позволяет определить магнитную индукцию поля, в которое помещен **холловский датчик**. Это один из основных методов измерения магнитной индукции постоянных магнитных полей.

### Закон Ампера

Согласно закону, экспериментально установленному Ампером, на элемент  $dl$  проводника с током действует в магнитном поле сила (рис. 24.5)

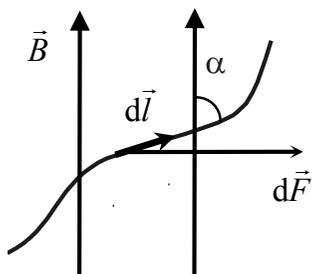


Рис. 24.5

Сила направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Соотношение (24.5) представляет математическую запись закона Ампера: сила, действующая на элемент проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на векторное произведение элемента длины проводника на магнитную индукцию поля. Сила, определяемая по (24.5), называется силой Ампера. Направление силы Ампера можно определить по «правилу левой руки»: если расположить кисть левой руки так, чтобы четыре пальца показывали направление тока в проводнике, а линии магнитной индукции входили в раскрытую ладонь, то отогнутый под прямым углом большой палец

покажет направление силы, действующей на элемент проводника с током.

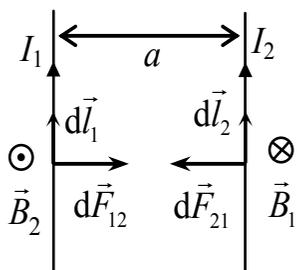


Рис. 24.6

Найдем силу взаимодействия двух тонких параллельных бесконечно длинных проводников с токами (рис. 24.6).

Если расстояние между проводниками  $a$ , то каждый элемент проводника с током  $I_2$  будет находиться в поле,

магнитная индукция которого  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$ . Следовательно, на

элемент проводника длиной  $dl$  будет действовать сила

$$F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl. \quad (24.7)$$

Для силы  $F_{12}$ , действующей на участок проводника с током  $I_1$ , получается аналогичное выражение. С помощью правила левой руки легко установить, что при одинаковом направлении токов проводники притягивают друг друга, а при различном – отталкивают.

Из (24.7) следует определение основной единицы измерения электрических величин в СИ – ампера. **Один ампер – сила неизменяющегося тока, который, протекая по двум параллельным бесконечно длинным проводникам ничтожно малого кругового сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, вызывает между ними силу взаимодействия  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины проводников.**

Рассмотрим теперь поведение контура (рамки с током) в магнитном поле. Пусть прямоугольная рамка с током находится в однородном магнитном поле, причем направления магнитного момента рамки и магнитной индукции поля совпадают (рис. 24.7). Со стороны магнитного поля на каждую сторону рамки будет действовать соответствующая сила. Направления всех сил указаны на рисунке. Действие сил приводит к растяжению рамки. Если изменить направление тока (или направление  $\vec{B}$ ), то действие сил будет приводить к сжатию рамки. Однако в любом случае

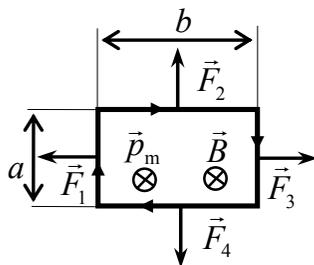


Рис. 24.7

$$F_1 = F_3 = Iba, \quad F_2 = F_4 = IBb.$$

Так как  $\sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 0$ , то рамка в однородном магнитном поле

сохраняет состояние покоя. Таким образом, действие магнитного поля на рамку сводится в данном случае только к ее деформации.

Повернем плоскость рамки на угол  $\alpha$  относительно положения, указанного на рис. 24.7. На такой же угол повернется вектор  $\vec{p}_m$  относительно вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ . На рисунке 24.8 представлен вид сверху на рамку (рамка расположена перпендикулярно плоскости чертежа).

Теперь векторы сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$  изменили свои направления (мы предлагаем вам самостоятельно убедиться в том, что направления  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_4$  остались прежними, т.е. эти силы растягивают рамку). Моменты сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_3$  будут стремиться повернуть рамку

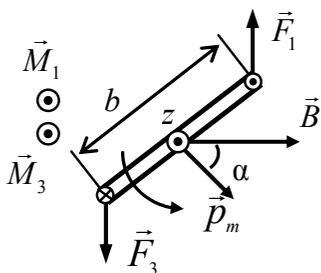


Рис. 24.8

вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости чертежа, против часовой стрелки. Определим эти моменты:

$$M_{1z} = Iba \frac{b}{2} \sin \alpha, \quad M_{3z} = Iba \frac{b}{2} \sin \alpha.$$

Направления векторов моментов указаны на рис. 24.8. Ясно, что суммарный момент сил, действующих на рамку,

$$M = M_1 + M_2 = Iab^2 \sin \alpha.$$

Поскольку  $ab = S$  (площадь рамки), то получаем:

$$M = p_m B \sin(\vec{p}_m, \vec{B}), \quad \vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (24.8)$$

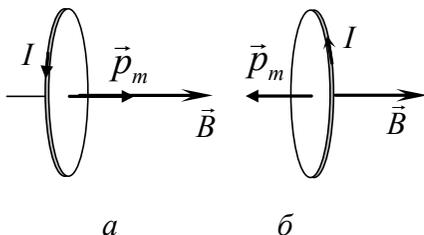


Рис. 24.9

Таким образом, если направления магнитного момента рамки с током  $\vec{p}_m$  и магнитной индукции поля  $\vec{B}$  не совпадают, то действие поля на рамку приведет к ее повороту вокруг оси, перпендикулярной вектору магнитной индукции в положение устойчивого равновесия (рис. 24.9, а). При выведении рамки из этого положения действие момента сил возвращает рамку обратно (рис. 24.10, а) в положение, указанное штриховой линией. Положение рамки на

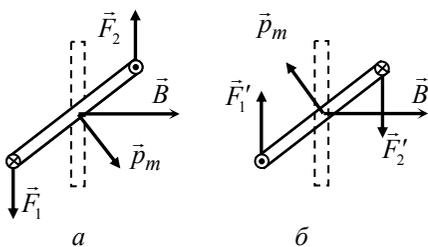


Рис. 24.10

рис. 24.9, б – это положение неустойчивого равновесия. При выведении рамки из этого положения действие момента сил еще более отклоняет рамку от этого положения и приводит ее в положение устойчивого равновесия (рис. 24.10, б).

Для того чтобы угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  увеличить на  $d\alpha$ , нужно совершить элементарную работу  $\delta A = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha$ .

Эта работа внешних сил равна приращению энергии рамки с током в магнитном поле:  $dW = \delta A$ . Отсюда  $dW = p_m B \sin \alpha d\alpha$ . Интегрируя, находим, что

$$W = -p_m B \cos \alpha + \text{const}.$$

Если положить  $\text{const} = 0$ , то формула приобретает вид

$$W = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (24.9)$$

Рассмотрим поведение плоского контура с током в неоднородном поле. На различные элементы контура будут действовать элементарные силы  $d\vec{F}$  в различных направлениях (рис. 24.11). Результирующая всех элементарных сил  $d\vec{F}$  ориентирует контур так, что направление его магнитного момента совпадает с направлением магнитной индукции. При этом контур поворачивается, растягивается и втягивается в область более сильного поля.

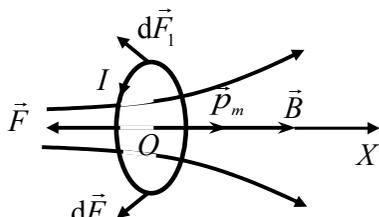


Рис. 24.11

Результирующая сила, действующая на контур с током в неоднородном магнитном поле, может быть найдена через градиент энергии контура в поле:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W.$$

Например, если неоднородность магнитного поля проявляется вдоль какой-либо оси  $OX$ , то

$$F_x = p_{m_x} \frac{\partial B}{\partial x},$$

где первый множитель – это проекция магнитного момента на ось  $OX$ .

Таким образом, если магнитный момент рамки и индукция поля сонаправлены, то рамка втягивается в область более сильного поля – туда, где  $|\vec{B}|$  больше (где густота линий магнитной индукции больше), т.е. влево на рис. 24.11. Если направления магнитного момента рамки и индукции поля противоположны, то рамка выталкивается в область слабого поля.

Суммируя все сделанные выводы, резюмируем: **в наиболее общем случае поведение контура с током во внешнем магнитном поле описывается его поступательным движением, вращением и деформацией.**

### Магнитный поток

Назовем **поток магнитной индукции (магнитным потоком)** через элемент поверхности  $dS$  величину

$$d\Phi = B dS \cos(\widehat{\vec{B}, \vec{n}}), \quad (24.10)$$

где  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности в месте расположения элемента  $dS$  (рис. 24.12).

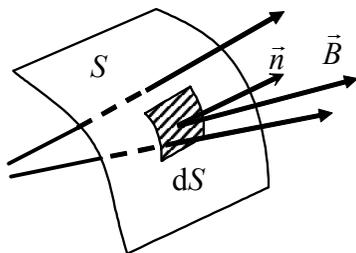


Рис. 24.12

Выражение (24.10) можно преобразовать, если ввести понятие **вектора площади элемента поверхности** как произведения площади поверхности и единичного вектора нормали к этой поверхности:  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ , причем

$$|d\vec{S}| = dS |\vec{n}| = dS.$$

Тогда **магнитный поток** можно определить как **скалярное произведение вектора площади элемента поверхности на магнитную индукцию**:

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S}.$$

Элемент поверхности  $dS$  выбирается таких малых размеров, чтобы его можно было считать практически плоским, а магнитное поле в его пределах можно было считать однородным.

Магнитный поток через всю поверхность  $S$  находится как алгебраическая сумма потоков через все малые участки этой поверхности:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (24.11)$$

Знак магнитного потока определяется относительно произвольно выбранного направления нормали  $\vec{n}$  к поверхности. В случае выпуклой или замкнутой поверхности принято использовать **внешние нормали  $\vec{n}$** , т.е. положительным считается направление из области, ограниченной этой поверхностью. По своему физическому смыслу магнитный поток аналогичен потоку вектора напряженности электрического поля: **магнитный поток через поверхность пропорционален числу линий магнитной индукции, пересекающих эту поверхность.**

В случае, когда рассматривается контур, состоящий из  $N$  одинаковых витков, вводится понятие «потокосцепления». **Потокосцепление  $\Psi$  есть сумма магнитных потоков, сцепленных со всеми витками:**

$$\Psi = N\Phi.$$

Единица измерения магнитного потока в СИ называется **вебер** (обозначение Вб, принята в честь немецкого физика В.Э. Вебера, предложившего вместе с К.Ф. Гауссом систему единиц для электрических величин): 1 вебер – это поток однородного магнитного поля с индукцией 1 тесла через поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно линиям магнитной индукции;  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ .

Поскольку линии магнитной индукции всегда замкнуты, то при вычислении магнитного потока через любую замкнутую поверхность необходимо учитывать, что число линий магнитной индукции, пересекающих поверхность с одной стороны (входящих в нее), всегда равно числу линий индукции, пересекающих поверхность с другой стороны (выходящих в нее). Поэтому суммарный магнитный поток через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (24.12)$$

Опыты показали, что, разрезая постоянный магнит на части, нельзя разделить его полюсы, т.е. нельзя получить магнит либо с

одним северным, либо с одним южным полюсом. Физический смысл этого факта и выражения (24.37) заключается в том, что в природе нет магнитных зарядов, т.е. источников магнитного поля, на которых начинались бы или заканчивались линии магнитной индукции.

### Работа сил магнитного поля по перемещению проводника с током

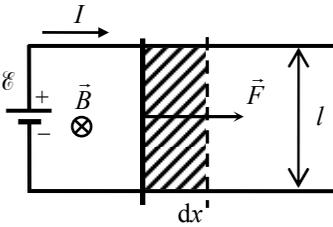


Рис. 24.13

Допустим, что провод с током может свободно перемещаться во внешнем магнитном поле под действием силы Ампера. Это можно осуществить с помощью скользящих контактов между концами провода и остальными участками замкнутой цепи (рис. 24.13). Внешнее поле будем предполагать однородным.

Направление вектора  $\vec{B}$  перпендикулярно к плоскости чертежа.

При указанных на рисунке направлениях тока и вектора  $\vec{B}$  сила Ампера, действующая на провод с током, будет направлена вправо. Модуль силы  $F = IBl$ , где  $l$  – длина перемещающегося участка проводника. На пути  $dx$  сила Ампера совершает над проводником работу по его перемещению:

$$\delta A = F dx = IBl dx.$$

Произведение  $l dx$  равно заштрихованной на рис. 24.13 площади  $dS$ , очерчиваемой проводником при его движении, а  $B l dx$  – потоку магнитной индукции  $d\Phi$  через эту площадку. Поэтому можно записать

$$\delta A = I d\Phi. \tag{24.13}$$

Полученный результат легко обобщить на случай неоднородного поля. Для этого нужно разбить проводник на участки  $dl$  и сложить элементарные работы, совершаемые по перемещению каждого участка (в пределах каждой площадки  $dS$  магнитную индукцию можно считать постоянной).

Если вектор  $\vec{B}$  образует с нормалью к поверхности, очерчиваемой проводником, угол  $\alpha$ , отличный от нуля, то направление силы составит с направлением перемещения также угол  $\alpha$ . Тогда

$$\delta A = F \cos \alpha \, dx = IB_n \, dl \, dx ,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  – составляющая вектора магнитной индукции, совпадающая с направлением нормали к площадке  $dS$ . Магнитный поток через площадку, очерчиваемую проводником при его движении, составит  $d\Phi = B_n \, dl \, dx$ . Таким образом, и в этом случае вновь приходим к формуле (24.13).

**Работа сил магнитного поля по перемещению проводника с током равна произведению силы тока в проводнике на магнитный поток через поверхность, очерчиваемую проводником при его движении.**

Заметим, что работа по перемещению проводника с током совершается не за счет энергии магнитного поля (сила Лоренца работы не совершает), а за счет энергии источника, поддерживающего ток в электрической цепи, в которую входит рассматриваемый проводник.

Найдем работу, совершаемую над замкнутым контуром при его перемещении в магнитном поле. Пусть контур произвольной формы перемещается из положения  $abcd$  в положение  $a'b'c'd'$ , совершая плоское движение

(рис. 24.14; вектор  $\vec{B}$  направлен «от нас», перпендикулярно плоскости чертежа). Разделим контур  $abcd$  на две части  $abc$  и  $cda$ . Найдем работы по перемещению каждой части.

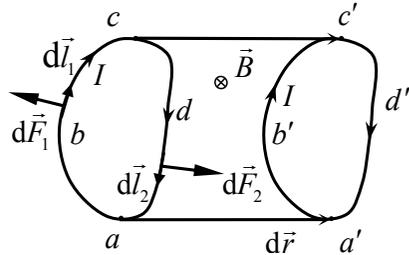


Рис. 24.14

Работу сил Ампера по перемещению части  $abc$  согласно (24.13) выразим так:  $A_{abc} = -I(\Phi_1 + \Phi_0)$ , где  $\Phi_1$  – магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в его начальном положении,  $\Phi_0$  – магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром  $adcc'b'a'$ . Знак «-» в этой формуле вызван тем, что векторы перемещения  $d\vec{r}$  и силы Ампера  $d\vec{F}_1$  образуют друг с другом тупые углы для всех элементов  $d\vec{l}_1$  проводника  $abc$ .

Работа сил Ампера по перемещению части  $cda$ :  $A_{cda} = I(\Phi_2 + \Phi_0)$ , где  $\Phi_2$  – магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром в его конечном положении.

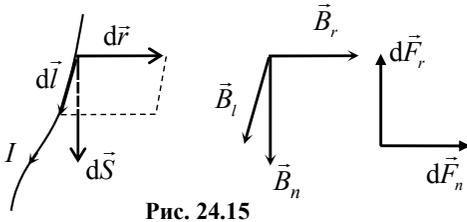
Работа по перемещению всего замкнутого контура:

$$A = A_{abc} + A_{cda} = I(-\Phi_1 - \Phi_0 + \Phi_2 + \Phi_0) = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I \Delta\Phi.$$

**Работа сил магнитного поля по перемещению контура с током равна произведению силы тока в контуре на приращение магнитного потока через площадь, ограниченную контуром:**

$$A = I \Delta\Phi. \quad (24.14)$$

Если при вычислении работы сил магнитного поля рассмотреть самый общий случай произвольной ориентации элемента проводника с током и вектора магнитной индукции поля, то выражения (24.13) и (24.14)



не изменятся. Действительно, произвольно направленный вектор  $\vec{B}$  всегда можно разложить по трем взаимно перпендикулярным направлениям

(рис. 24.15) так, что  $\vec{B}_r \parallel d\vec{r}$ ,  $\vec{B}_l \parallel d\vec{l}$ ,  $\vec{B}_n \perp d\vec{S}$ , где  $d\vec{r}$  – перемещение проводника;  $d\vec{l}$  – элемент проводника,  $d\vec{S}$  – вектор площади поверхности, очерчиваемой проводником. Эти три составляющие магнитной индукции определяют выражения для трех составляющих силы Ампера  $d\vec{F}_r$ ,  $d\vec{F}_l$ ,  $d\vec{F}_n$ . Однако согласно (24.5)

$$d\vec{F}_r = I [d\vec{l}, \vec{B}_r],$$

причем  $d\vec{F}_r \perp d\vec{r}$ , а поэтому работа данной составляющей силы Ампера по перемещению проводника будет равна нулю. Кроме того,  $d\vec{F}_l = I [d\vec{l}, \vec{B}_l] = 0$ . Поэтому работу по перемещению проводника будет совершать только сила  $d\vec{F}_n$ , а именно этот случай и рассматривался раньше.

## Контрольные вопросы и задания

1. За счет какого источника энергии совершают работу силы магнитного поля при перемещении в нем проводника с током?
2. Какие параметры влияют на форму траектории движения заряженной частицы в однородном магнитном поле?
3. Чему равен поток магнитной индукции через замкнутую поверхность, проведенную в магнитном поле?
4. От чего зависит сила, действующая со стороны магнитного поля на двигающуюся в нем заряженную частицу?

## 25. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Если электрический ток создает магнитное поле, то не может ли магнитное поле индуцировать электрический ток? Такой вопрос поставил в начале 1820-х годов М. Фарадей. Он считал, что между электрическими и магнитными явлениями существует тесная взаимосвязь. Ампер, Био и другие выяснили лишь одну сторону этой взаимосвязи, а именно магнитное действие тока. Фарадей считал необходимым установить существование электрического действия магнитного поля. «Представляется весьма необычным, чтобы, с одной стороны, всякий электрический ток сопровождался магнитным действием соответствующей интенсивности, направленным под прямым углом к току, и чтобы, в то же время, в хороших проводниках электричества, помещенных в сферу этого действия, совсем не индуцировался ток, не возникало какое-либо осязаемое действие, эквивалентное по силе току», – так писал Фарадей в своей работе «Экспериментальные исследования по электричеству».

Однако первые опыты с проводником, помещенным в магнитное поле постоянного тока, не дали положительных результатов. Только в 1831 г. после десяти лет упорных поисков Фарадею удалось решить поставленную задачу и осуществить опыты, имевшие огромное значение для дальнейшего развития техники. Открытое Фарадеем явление стало той основой, на базе которой

в последующие годы были созданы электрические двигатели, генераторы и трансформаторы. Поэтому М. Фарадей заслуженно считается одним из основателей электротехники.

Схему опытов Фарадея, которые привели к открытию электромагнитной индукции, можно пояснить следующим образом. Разместим на одном сердечнике две проводящие катушки (рис. 25.1, а). Одну из катушек замкнем на гальванометр, а другую будем подключать к источнику тока при помощи ключа  $K$ . В момент замыкания (или размыкания) цепи ключом  $K$  гальванометр, включенный в цепь, будет отмечать возникновение электрического тока в цепи второй катушки.

По результатам этого опыта можно сделать вывод, что первая катушка электрически влияет на вторую. Однако, что было причиной появления тока во второй катушке: возникновение (или исчезновение) тока в первой катушке или магнитного поля этого тока?

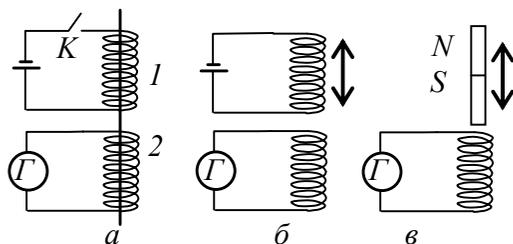


Рис. 25.1

Для ответа на этот вопрос поставим второй опыт (рис. 25.1, б). Теперь катушка 1 постоянно подключена к источнику, поэтому ток в ней неизменен. Однако в процессе смещения катушек

друг относительно друга гальванометр дает показания, т.е. причиной появления тока в катушке 2 является изменение магнитного поля, в котором она находилась.

Чтобы подтвердить этот вывод, Фарадей проводит третий опыт (рис. 25.1, в), в котором первая катушка заменяется постоянным магнитом. Результаты опыта при смещении магнита относительно катушки 2 полностью аналогичны предыдущим. В этом опыте видно, что причиной всех электрических явлений в катушке 2 является исключительно поведение магнитного поля, в которое она помещена, а источник создания магнитного поля никак не влияет на результат наблюдений.

Общим для всех трех опытов было то, что при осуществлении действий, описанных выше, изменялся магнитный поток через вторую катушку, в которой создавался (индуцировался) электрический ток. Важно также и то, что появление тока наблюдалось только **в процессе** изменения магнитного потока. Как только изменение магнитного потока прекращалось (прекращалось относительное смещение катушек или останавливалось движение магнита), стрелка гальванометра занимала нулевое положение. Если гальванометр заменить вольтметром, то он покажет появление разности потенциалов на концах катушки 2.

Наблюдаемое явление Фарадей назвал **электромагнитной индукцией**, т.е. **явлением возникновения ЭДС индукции (а также индукционного тока в замкнутом контуре) при любом изменении магнитного потока через площадь, ограниченную контуром.**

Экспериментально доказано, что величина возбуждаемой ЭДС определяется только скоростью изменения магнитного потока через контур и не зависит от способа изменения магнитного потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (25.1)$$

Это выражение носит название основного закона электромагнитной индукции (закона Фарадея), который формулируется так: **электродвижущая сила электромагнитной индукции равна скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком.**

Знак минус в (25.1) отражает экспериментально установленное правило Э. Ленца: **при всяком изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в контуре возникает индукционный ток такого направления, что магнитное поле тока противодействует изменению магнитного потока через эту поверхность.**

Например, при увеличении силы тока  $I$  в контуре 1 (рис. 25.2) будет увеличиваться магнитная индукция поля этого тока и соответственно магнитный поток через

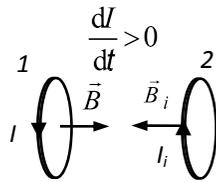


Рис. 25.2

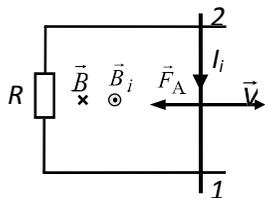


Рис. 25.3

поверхность, ограниченную контуром 2. Это приводит к появлению в контуре 2 ЭДС электромагнитной индукции и индукционного тока  $I_i$ . Направление индукционного тока при этом таково, что магнитная индукция  $\vec{B}_i$ , создаваемого им магнитного поля направлена противоположно индукции магнитного поля тока  $I$  в контуре 1. То есть индукционный ток  $I_i$ , возникающий в контуре 2, препятствует увеличению магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром. Если же сила тока  $I$  в контуре 1 будет уменьшаться, то в контуре 2 возникнет индукционный ток  $I_i$  такого направления, что создаваемое им магнитное поле будет препятствовать уменьшению магнитного потока через поверхность ограниченную контуром 2.

Итак, правило Ленца показывает, что **следствие процесса** (появляющийся индукционный ток) **всегда препятствует причине, его вызывающей** (изменению магнитного потока).

Поясим это еще на одном примере. Поместим в однородное магнитное поле с магнитной индукцией  $\vec{B}$  систему двух параллельных проводников, замкнутых на резистор сопротивлением  $R$  (рис. 25.3).

Вдоль проводников без нарушения электрического контакта перемещается перемычка 1–2. Тогда при ее движении вправо со скоростью  $\vec{v}$  будет увеличиваться площадь проводящего контура, образованного проводниками, резистором и перемычкой. Соответственно будет увеличиваться и магнитный поток через этот контур, что приведет к появлению индукционного тока. Индукционный ток в контуре будет иметь такое направление (против часовой стрелки), что магнитная индукция  $\vec{B}_i$  поля тока будет направлена противоположно индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ . В магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  на перемычку с индукционным током будет действовать сила Ампера, направление которой определяется по правилу левой руки (рис. 25.3). Появившаяся сила препятствует перемещению перемычки.

Выведем закон электромагнитной индукции, используя закон сохранения энергии. Для этого рассмотрим проводящий контур (рис. 25.4), образованный двумя параллельными проводниками, замкнутыми свободно двигающейся по ним перемычкой 1–2. В контур включен источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и резистор с сопротивлением  $R$ . Поместим контур в однородное магнитное поле с магнитной индукцией  $\vec{B}$ .

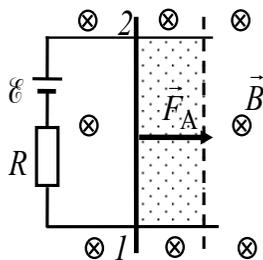


Рис. 25.4

Поскольку в контуре существует электрический ток, на перемычку будет действовать сила Ампера, что вызовет движение перемычки вправо. При движении перемычки площадь контура будет возрастать, а, следовательно, магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, также будет увеличиваться. Это будет причиной возникновения электромагнитной индукции.

Согласно закону сохранения энергии работа, совершенная источником тока за время  $dt$ , расходуется на выделение в контуре некоторого количества теплоты и на работу по перемещению перемычки в магнитном поле:

$$\delta A_{\text{ист}} = \delta Q + \delta A.$$

Отсюда следует

$$\mathcal{E}dq = I^2 Rdt + Id\Phi,$$

где  $dq$  – заряд, перенесенный источником за время  $dt$ . Поскольку  $dq = Idt$ , то

$$\mathcal{E} = IR + \frac{d\Phi}{dt}, \quad I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}.$$

Согласно закону Ома числитель последнего выражения должен содержать сумму ЭДС в контуре, следовательно, второе слагаемое числителя представляет собой ЭДС индукции, возникающую в контуре:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Таким образом, получено выражение закона Фарадея для электродвижущей силы индукции.

Это же выражение можно получить на основе электронных представлений, рассмотрев силы, действующие на электроны проводника, движущегося в магнитном поле. Для этого возьмем

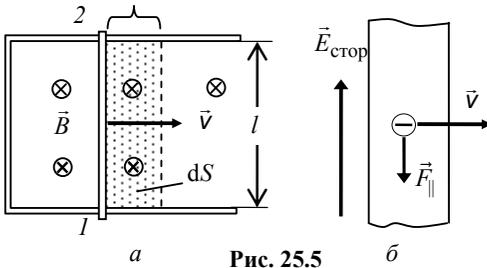


Рис. 25.5

контур, участок которого 1–2 длиной  $l$  может перемещаться без нарушения контакта с остальной частью контура (рис. 25.5, а).

Поместим его в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости контура. Приведем подвижную часть контура в движение со скоростью  $\vec{v}$ . С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители заряда в проводнике – электроны. Рассмотрим процессы, происходящие внутри подвижной части контура, движущегося со скоростью  $\vec{v}$  в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  так, как это показано на рис. 25.5, б.

Поскольку свободные электроны движутся вместе с участком контура, со стороны магнитного поля на них действует магнитная составляющая силы Лоренца, направленная вдоль провода и равная по модулю

$$F_{\parallel} = e \mathbf{v} \mathbf{B},$$

где индекс « $\parallel$ » указывает на то, что сила направлена вдоль провода.

Под действием этой силы электроны смещаются в направлении нижнего (рис. 25.5, б) конца проводника. Действие этой силы эквивалентно действию электрической силы

$$eE_{\text{стоп}} = e \mathbf{v} \mathbf{B},$$

обусловленной напряженностью поля  $E_{\text{стоп}} = \mathbf{v} \mathbf{B}$  и направленной так, как указано на рис. 25.5, б. Это поле не электростатического происхождения, оно является полем сторонних сил. Роль сторонней силы в данном случае играет составляющая силы Лоренца, направленная вдоль проводника. Циркуляция вектора напряженности стороннего поля вдоль контура, включающего движущийся проводник, равна электродвижущей силе, индуцируемой в проводнике:

$$\mathcal{E} = \oint E_{\text{стоп}} \, dl = \int_1^2 E_{\text{стоп}} \, dl = E_{\text{стоп}} l = \mathbf{v} B l. \quad (25.2)$$

Правую часть этого выражения можно преобразовать:

$$v l B = B \frac{l v dt}{dt} = B \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt},$$

где  $d\Phi$  – магнитный поток через поверхность площадью  $dS$ , очерчиваемую проводником при его движении за время  $dt$  (рис. 25.5. а).

С учетом этих преобразований формулу (25.2) можно переписать:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если проводник движется в неоднородном магнитном поле, то следует выделить его малый элемент длиной  $dl$  и определить ЭДС индукции, возникающей в этом элементе,

$$d\mathcal{E} = \mathbf{v} B dl, \quad (25.3)$$

а затем проинтегрировать это выражение по всей длине проводника.

Итак, результаты, полученные при выводе выражения для ЭДС электромагнитной индукции из закона сохранения энергии и на основе электронных представлений тождественны. Однако смысл правой части выражения для контура и отрезка проводника различен. В первом случае  $d\Phi/dt$  – это скорость изменения магнитного потока, через поверхность, ограниченную контуром. Во втором – это отношение магнитного потока  $d\Phi$ , через поверхность, очерчиваемую проводником при его движении за бесконечно малый интервал времени, к величине этого интервала  $dt$ .

Рассмотрим явление электромагнитной индукции, возникающее в короткозамкнутой катушке. Пусть катушка содержит  $N$  витков общим сопротивлением  $R$  и ее пронизывает изменяющийся во времени магнитный поток. В катушке возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ . Поскольку витки катушки соединены последовательно,  $\mathcal{E}_i$  будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом отдельном витке

$$\mathcal{E}_i = -\sum \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\sum \Phi).$$

Сумму магнитных потоков, сцепленных со всеми проводниками элемента электрической цепи, назовем **потокосцеплением**  $\Psi$  или полным магнитным потоком. Если поток, пронизывающий каждый из витков одинаков, то потокосцепление равно произведению числа витков на магнитный поток, сцепленный с одним витком:

$$\Psi = N\Phi.$$

Воспользовавшись потокосцеплением, выражение для ЭДС, индуцируемой в катушке, можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Силу индукционного тока, возникающего в катушке, найдем следующим образом:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt}.$$

За время существования в катушке индукционного тока (от момента времени  $t_1$  до момента  $t_2$ ) по катушке пройдет **индуцированный (индукционный) электрический заряд**

$$Q_i = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Psi}{dt} dt = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R}, \quad (25.4)$$

где  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – значения потокосцепления в начальный и конечный моменты времени. Важно отметить, что величина индукционного заряда определяется лишь начальным и конечным значениями потокосцепления.

С одной стороны, при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную неподвижным контуром, в контуре возникает электродвижущая сила, определяемая скоростью изменения магнитного потока (25.1). С другой стороны, электродвижущая сила равна удельной работе сторонних сил по переносу зарядов в контуре

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_{\text{стоп}} d\vec{l}. \quad (25.5)$$

Объединив выражения (25.1) и (25.5), получим:

$$\oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (25.6)$$

Фигурирующий здесь магнитный поток может изменяться по ряду причин: благодаря изменению формы контура и его расположения в поле, а также из-за того, что магнитная индукция зависит от времени. Полная производная  $d\Phi/dt$  учитывает все эти причины. В случае неподвижного контура магнитный поток изменяется только вследствие зависимости магнитной индукции от времени, поэтому вместо  $d\Phi/dt$  следует брать частную производную  $\partial\Phi/\partial t$ . Точно также следует поступить, когда проводящий контур вообще отсутствует, и мы рассматриваем вихревое электрическое поле, порождаемое изменяющимся во времени магнитным полем (рис. 25.6). Здесь  $L$  – воображаемый контур, по которому вычисляется циркуляция напряженности электрического поля.

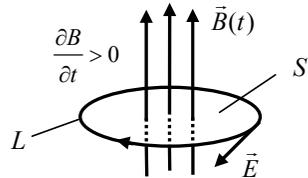


Рис. 25.6

Уравнение (25.6) с учетом того, что  $d\Phi = \vec{B}d\vec{S}$ , записывают в виде

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (25.7)$$

Стороннее электрическое поле не является кулоновским. Его принципиальные отличия от изученного нами ранее электростатического поля таковы:

- это поле создается не электрическими зарядами, а изменяющимся во времени магнитным полем;
- силовые линии поля являются замкнутыми, т.е. такое электрическое поле является **вихревым**.

Физический смысл уравнения (25.7) заключается в том, что изменяющееся во времени магнитное поле порождает в пространстве вихревое электрическое поле.

## Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции?
2. Сформулируйте и запишите закон Фарадея для электромагнитной индукции.
3. Сформулируйте правило Ленца для электромагнитной индукции.
4. Как определить индуцированный заряд, протекающий в замкнутом контуре при изменении магнитного потока через площадь этого контура?
5. Напишите уравнение связи циркуляции напряженности вихревого электрического поля с индукцией магнитного поля.

## 26. ЯВЛЕНИЯ САМОИНДУКЦИИ И ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИИ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

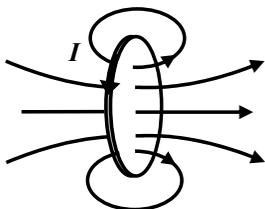


Рис. 26.1

Рассмотрим контур с электрическим током силой  $I$  (рис. 26.1). Ток создает полный магнитный поток  $\Psi$ , пронизывающий поверхность, ограниченную контуром. Этот магнитный поток называется собственным магнитным потоком. При изменении силы тока в контуре будет изменяться также и собственный магнитный поток. Это приводит к тому, что в контуре индуцируется электродвижущая сила индукции. Явление возникновения ЭДС электромагнитной индукции в электрической цепи вследствие изменения в ней электрического тока **называется самоиндукцией**.

В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа магнитная индукция  $B$  пропорциональна силе тока, вызвавшего поле. Отсюда вытекает, что сила тока в цепи и создаваемое этим током поточесцепление друг другу пропорциональны:

$$\Psi = LI. \quad (26.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока в цепи и полным магнитным потоком называется **индуктивностью** цепи. Индуктивность  $L$  – скалярная величина, численно равна отношению потокосцепления электрической цепи к силе тока в цепи

$$L = \frac{\Psi}{I}. \quad (26.2)$$

Индуктивность элемента электрической цепи (например, провода, соленоида, коаксиального кабеля и т.п.) зависит только от его формы, геометрических размеров, числа витков и магнитных свойств среды, в которой этот элемент **находится**. При неизменности этих величин электродвижущая сила самоиндукции  $\mathcal{E}_s$  согласно закону Фарадея определяется выражением

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (26.3)$$

Таким образом, величина ЭДС самоиндукции для любой системы пропорциональна скорости изменения силы тока в ней. В роли коэффициента пропорциональности выступает индуктивность системы. В СИ для измерения индуктивности принята единица, называемая **генри** (обозначение 1 Гн) в честь американского физика Дж. Генри. Независимо от М. Фарадея, но позже него, он открыл закон электромагнитной индукции. В соответствии с (26.2) 1 Гн – это индуктивность такой проводящей системы, в которой при силе тока 1 А создается потокосцепление 1 Вб.

Определим для примера индуктивность длинного соленоида. Пусть его длина  $l$ , площадь поперечного сечения  $S$  и число витков в нем  $N$ . Зададим силу тока  $I$  в соленоиде. Магнитная индукция на оси соленоида в его среднем сечении определяется формулой

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l}.$$

Следует отметить, что магнитная индукция в соленоиде убывает как в радиальном направлении (от оси к периферии), так и в осевом (от среднего сечения к торцам соленоида). Сделаем следующие предположения. Во-первых, будем считать магнитную индукцию постоянной по поперечному сечению соленоида. Во-вторых, пренебрежем уменьшением магнитной индукции вблизи

торцов соленоида (для длинного соленоида число витков, находящихся вблизи торцов в области, где магнитная индукция по модулю уменьшается, много меньше числа витков, находящихся в области с постоянной магнитной индукцией). Тогда потокосцепление равно произведению магнитной индукции в среднем сечении на площадь поперечного сечения и число витков соленоида:

$$\Psi = \mu_0 I \frac{N}{l} NS.$$

Для определения индуктивности разделим потокосцепление  $\Psi$  на силу тока в соленоиде  $I$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S. \quad (26.3)$$

Анализ формулы (26.3) показывает, что индуктивность элемента электрической цепи не зависит от силы тока в нем.

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие в проводниках, обладающих индуктивностью, вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать изменениям силы тока, текущего в проводниках. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании и размыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.

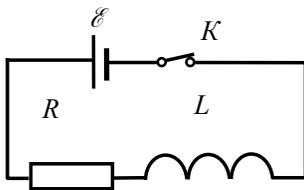


Рис. 26.2

Найдем законы изменения силы тока при замыкании или размыкании электрической цепи.

Допустим, что источник с ЭДС  $\mathcal{E}$  замыкается ключом  $K$  на цепь, содержащую резистор сопротивлением  $R$  и катушку индуктивностью  $L$  (рис. 26.2).

Поскольку сила тока в цепи будет возрастать, в катушке возникнет явление самоиндукции, и в процессе изменения тока в цепи будут существовать две ЭДС – источника  $\mathcal{E}$  и самоиндукции  $\mathcal{E}_s$ .

Запишем закон Ома для замкнутой цепи:  $i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_s}{R}$ , здесь  $i$  –

мгновенное значение силы тока. Поскольку  $\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$ , то

$L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} - iR$ . Решим полученное дифференциальное уравнение, раз-

делив переменные:  $\frac{di}{\mathcal{E} - iR} = \frac{1}{L} dt$ . Умножим левую и правую часть

последнего уравнения на сопротивление цепи  $R$  и преобразуем к виду

$$\frac{d(\mathcal{E} - iR)}{\mathcal{E} - iR} = -\frac{R}{L} dt.$$

Проинтегрировав полученное выражение, получим:

$$\ln(\mathcal{E} - iR) = -\frac{R}{L} t + \ln C,$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, которая может быть найдена из начальных условий. Потенцирование и преобразование этого выражения дает

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R} e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (26.4)$$

При замыкании цепи в начальный момент времени при  $t = 0$  сила тока равна нулю  $i(0) = 0$  и формула (26.4) преобразуется к виду

$$0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R} e^0 = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{C}{R}.$$

Отсюда  $C = \mathcal{E}$ . Тогда уравнение (26.4) принимает вид

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right).$$

При  $t \rightarrow \infty$  сила тока в цепи  $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ , и в результате

$$i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right). \quad (26.5)$$

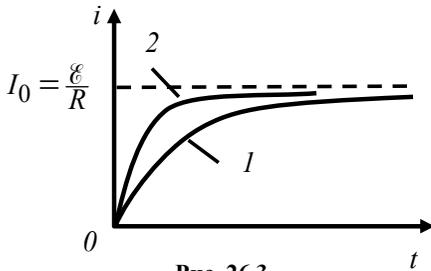


Рис. 26.3

ми индуктивности ( $L_1 > L_2$ ), приведен на рис. 26.3. Сила тока в цепи нарастает по экспоненциальному закону. Скорость нарастания определяется имеющей размерность времени величиной

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (26.6)$$

которую называют постоянной времени цепи.

С учетом формулы (26.6) формуле (26.5) можно придать вид

$$i = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (26.7)$$

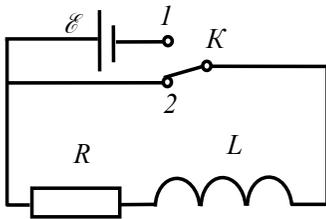


Рис. 26.4

Теперь рассмотрим случай **размыкания** цепи (рис. 26.4). перебросим ключ  $K$  из положения 1 в положение 2, тем самым отключим источник и замкнем цепь, включающую резистор  $R$  и катушку индуктивности  $L$ . В момент замыкания цепи в катушке индуктивности существовал ток силой  $I_0$ .

Начальные условия для решения уравнения в этом случае будут выглядеть следующим образом:  $t = 0$ ;  $i(0) = I_0$ ;  $\mathcal{E}(0) = 0$ . Под-

ставим эти значения в (26.4):  $I_0 = -\frac{C}{R}e^0 = -\frac{C}{R}$ . Отсюда получим,

что  $C = -I_0 R$  и соотношение (26.4) преобразуем к виду

$$i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (26.8)$$

Сила тока в цепи при  $t \rightarrow \infty$  будет стремиться к нулю по экспоненциальному закону. На рисунке 26.5 приведены графики зависимости силы тока от времени при двух различных значениях индуктивности. Из уравнения (26.8) следует, что за время

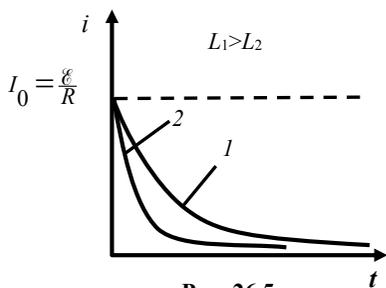


Рис. 26.5

$\tau = L/R$  сила тока убывает в  $e$  раз. С использованием постоянной времени  $\tau$  закон изменения силы тока можно записать следующим образом:

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Анализ приведенной формулы и хода кривых 1 и 2, приведенных на рис. 26.3 и 26.5, показывает, что чем больше значение постоянной времени  $\tau$  (т.е. чем больше значение индуктивности при неизменном значении сопротивления  $R$ ), тем медленнее происходит процесс установления силы тока при коммутации цепей, содержащих катушки индуктивности.

Рассмотрим явления, возникающие при размыкании цепи, с точки зрения закона сохранения энергии. Поскольку после отключения источника (рис. 26.4) ток в цепи не прекращается, то это означает, что работа по переносу зарядов в цепи совершается за счет ЭДС самоиндукции. При переносе по цепи заряда  $dq$  эта работа находится следующим образом:

$$\delta A = \mathcal{E}_s dq = -L \frac{di}{dt} i dt = -Li di. \quad (26.19)$$

Так как сила тока в цепи уменьшается, то ослабевает создаваемое током магнитное поле. С точки зрения закона сохранения энергии это означает, что работа по переносу зарядов осуществляется за счет уменьшения энергии магнитного поля:  $\delta A = -dW$ . Последнее уравнение после интегрирования принимает вид

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1).$$

Эта работа идет на приращение внутренней энергии проводников, т.е. на их нагревание. По окончании процесса сила тока в цепи и, следовательно, энергия магнитного поля становятся равными нулю ( $W_2 = 0$ ).

Так как работа ЭДС самоиндукции, с одной стороны,

$$A = -\int_I^0 Li \, di = \frac{LI^2}{2}, \quad (26.10)$$

а с другой –

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1,$$

то энергия магнитного поля  $W$ , запасенная в катушке индуктивностью  $L$  с током  $I$

$$W = W_1 = \int_I^0 -Li \, di = \frac{LI^2}{2}. \quad (26.11)$$

Заметим, что выражение (26.10) можно трактовать как работу, которую нужно совершить против ЭДС самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до  $I$ , и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (26.11). Работа, совершаемая против ЭДС самоиндукции, определяется по формуле

$$A' = \int_0^I (-\mathcal{E}_s) i \, dt.$$

Произведя преобразования, аналогичные тем, которые приведены в (26.9), получаем:  $\delta A' = L i \, di$ ,

$$A' = \int_0^I L i \, di = \frac{LI^2}{2}. \quad (26.12)$$

Последнее выражение совпадает с (26.10). Работа (26.12) совершается при установлении тока за счет источника ЭДС и целиком идет на создание сцепленного с контуром магнитного поля.

Таким образом, как бы мы ни анализировали процесс, результат его рассмотрения один и тот же: если в системе, обладающей индуктивностью  $L$ , существует ток  $I$ , то в системе существует магнитное поле с энергией

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (26.13)$$

Выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие само поле. Рассмотрим длинный соленоид, индуктивность которого выражается формулой

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Если в соленоиде течет постоянный ток  $I$ , то внутри соленоида возникнет магнитное поле, энергию которого можно определить по формуле (26.26):

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} SI^2.$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на  $\mu_0 l$  и учтем, что  $V = Sl$  – объем соленоида:

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l} SI^2 \frac{\mu_0 l}{\mu_0 l} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{l^2} \frac{Sl}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} V,$$

где  $B$  – магнитная индукция внутри соленоида. Введем понятие объемной плотности энергии магнитного поля так же, как это понятие вводили для электрического поля. **Объемной плотностью энергии магнитного поля** называется отношение энергии поля, заключенного в малом объеме пространства к этому объему. В вакууме объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (26.14)$$

Энергию однородного магнитного поля можно рассчитать так:  $W = wV$ .

В случае неоднородного магнитного поля его энергия в некотором объеме  $V$  вычисляется интегрированием объемной плотности энергии по этому объему:

$$W = \oint_V w dV, \quad (26.15)$$

где  $dV$  – элементарный объем части пространства, настолько малый, что в его пределах магнитную индукцию можно считать постоянной.

Рассмотрим два контура  $1$  и  $2$ , расположенные относительно друг друга не очень далеко (рис. 26.6). Если в контуре  $1$  течет ток силы  $i_1$ , он создает через контур  $2$  полный маг-

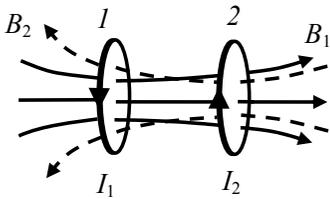


Рис. 26.6

нитный поток  $\Psi_{21} \sim i_1$ . Коэффициент пропорциональности между  $\Psi_{21}$  и  $i_1$  зависит от взаимного расположения контуров, расстояния между ними и их геометрии. Можно записать:

$$\Psi_{21} = L_{21}i_1, \quad (26.16)$$

где  $L_{21}$  – **взаимная индуктивность** второго и первого контура. Так же как и индуктивность, взаимная индуктивность в СИ измеряется в **генри**.

При изменении в первом контуре силы тока  $i_1$  во втором контуре будет возникать электромагнитная индукция, ЭДС которой определяется следующим образом:

$$E_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (26.17)$$

Аналогично при изменении силы тока во втором контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции в первом контуре:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{di_2}{dt}.$$

Взаимные индуктивности контуров в отсутствии ферромагнетиков всегда равны друг другу:  $L_{12} = L_{26}$ .

Явление взаимной индукции лежит в основе работы трансформаторов, служащих для повышения или понижения напряжения переменного тока.

### Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается явление самоиндукции?
2. Что называется индуктивностью цепи, каков ее физический смысл?
3. Как определить энергию магнитного поля, создаваемого проводником с током?
4. Напишите формулу для определения объемной плотности энергии магнитного поля в вакууме.
5. В чем заключается явление магнитной индукции?
6. Сформулируйте определение взаимной индуктивности двух проводников.

## 27. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Из сопоставления картин линий магнитной индукции соленоида и полосового магнита видно, что эти картины очень похожи друг на друга. Полная аналогия между магнитными полями полосовых магнитов и длинных соленоидов позволила французскому физика А. Амперу в 1822 г. высказать гипотезу о том, что магнитные свойства постоянных магнитов обусловлены существующими в них микротоками. О природе и характере этих микротоков Ампер ничего не мог сказать, так как в то время учение о строении вещества только зарождалось. Лишь после открытия электрона и выяснения строения атомов и молекул, т.е. спустя почти 100 лет гипотеза Ампера была блестяще подтверждена и легла в основу современных представлений о магнитных свойствах вещества. Гипотетические микротоки Ампера получили простое и наглядное объяснение: они связаны с движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

При помещении любого вещества в магнитное поле оно создает собственное магнитное поле, т.е. вещество **намагничивается**. Существуют различные виды намагниченности, но везде и всегда она создается магнитными моментами микрочастиц вещества, в частности, электронным орбитальным магнитным моментом и электронным спиновым магнитным моментом.

Ранее рассматривалось магнитное поле, создаваемое проводниками с током, находящимися в вакууме. Если же проводники с током находятся в какой-либо среде, магнитное поле существенным образом меняется. Всякое вещество является **магнетиком**, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться (приобретать магнитный момент). Внешнее магнитное поле (поле проводников с токами) намагничивает вещество. В результате намагниченное вещество создает собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее. Индукция результирующего магнитного поля равна сумме индукций  $\vec{B}_0$  и  $\vec{B}'$  собственного и внешнего магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'.$$

Для объяснения намагничивания тел Ампер предположил, что в молекулах вещества циркулируют круговые токи. Каждый такой ток обладает магнитным моментом и создает в окружающем пространстве магнитное поле. Ампер назвал такие токи **микротоками**, так как эти токи принимают участие в создании магнитного момента вещества, но не дают вклад в **макротоки** – токи проводимости.

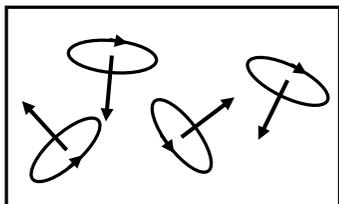


Рис. 27.1

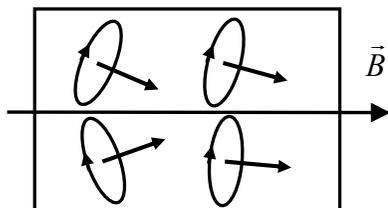


Рис. 27.2

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты микротоков ориентированы беспорядочно (рис. 27.1), поэтому суммарный магнитный момент микротоков  $\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{mi} = 0$ . При нали-

чии внешнего поля магнитные моменты микротоков ориентируются вдоль линий индукции внешнего поля, и суммарный магнитный момент становится отличным от нуля (рис. 27.2):

$$\vec{P}_m = \sum_i \vec{p}_{mi} \neq 0.$$

Магнитные поля отдельных молекулярных токов

в этом случае уже не компенсируют друг друга, и возникает поле с индукцией  $\vec{B}'$ , вещество намагничивается.

Намагничивание магнетика характеризуется магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют **намагниченностью** и обозначают  $\vec{J}$ . Если магнетик намагничен неоднородно, то намагниченность магнетика в данной точке определяется следующим выражением

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_m}{\Delta V}, \quad (27.1)$$

где  $\Delta V$  – физически бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки;  $\vec{p}_m$  – магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование производится по всем молекулам, заключенным в объеме  $\Delta V$ . **Намагниченность численно равна магнитному моменту единицы объема вещества.**

Ранее была выведена связь циркуляции магнитной индукции с токами, сцепленными с контуром интегрирования. Следует

учитывать, что в правую часть соотношения  $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{i\text{сц}}$

входят токи любой природы, сцепленные с контуром, т. е. как макроток, так и микроток. В соответствии с гипотезой Ампера кроме макротоков (токов проводимости) необходимо учесть и наличие в веществе микротоков, величина которых не известна:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n (I_{i\text{макро}} + I_{i\text{микро}}). \quad (27.2)$$

Попытаемся ввести такую вспомогательную величину, циркуляция которой определялась бы только макроскопическими токами – токами проводимости. Рассмотрим возможное расположение микротоков молекул вещества

относительно некоторого контура  $L$  (рис. 27.3). Все микроток можно разделить на три группы: токи  $I$  как бы «нанизаны» на контур  $L$  (как баранки на веревку); токи  $I'$  дважды пересекают поверхность, натянутую на контур;

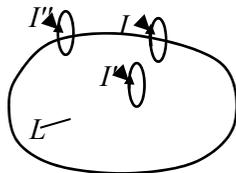


Рис. 27.3

токи  $I''$  вообще не пересекают эту поверхность. Очевидно, что сцепленными с контуром являются только токи  $I$  и  $I'$ . Однако, сколько бы ни нашлось токов  $I'$  их алгебраическая сумма (входящая в правую часть закона полного тока) всегда будет равна нулю. Это объясняется тем, что каждый из этих микротоков пересекает поверхность, ограниченную контуром, дважды, причем в противоположных направлениях.

Для строгого применения закона полного тока необходимо знать число микротоков, сцепленных с контуром интегрирования  $L$ . Для их подсчета вырежем вокруг контура  $L$  косою цилиндр длиной  $dl$  с основаниями, параллельными плоскостям микротоков, и площадями, равными площади контуров микротоков (рис. 27.4).

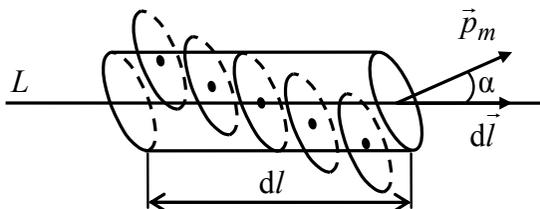


Рис. 27.4

Сцепленными с контуром окажутся микротоки, центры которых попадут в этот цилиндр. Пусть  $n$  – концентрация молекул, тогда сумма всех микротоков, попавших в цилиндр, определяется по формуле:

$$dI_{\text{микро}} = In dV = InS dl \cos\alpha = p_m n dl \cos\alpha. \quad (27.3)$$

Очевидно, что произведение  $p_m n$  представляет собой модуль вектора намагниченности вещества. Преобразуем выражение (27.3):

$$dI_{\text{микро}} = p_m n dl \cos\alpha = \vec{J} d\vec{l}.$$

Полная сумма микротоков, сцепленных с контуром на всей его длине,

$$I_{\text{микро}} = \oint dI_{\text{микро}} = \oint \vec{J} d\vec{l}.$$

Подставим последнее соотношение в формулу (27.2):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left( \sum_i I_{i \text{ макро}} + \oint \vec{J} d\vec{l} \right).$$

Отсюда

$$\oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_i I_{i \text{ макро}}. \quad (27.4)$$

В скобках под интегралом стоит векторная величина, циркуляция которой определяется только макроточками. Назовем ее **напряженностью магнитного поля**  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (27.5)$$

В СИ размерности намагниченности и напряженности магнитного поля одинаковы:  $[H] = [J] = \text{А м}^{-1}$ . Тогда формулу (27.4) перепишем в виде

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_{i\text{макро}}. \quad (27.6)$$

Полученное соотношение выражает **теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля** (закон полного тока для магнитного поля в веществе): **циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме макротокков (токов проводимости), сцепленных с этим контуром.**

В однородном изотропном магнетике имеет место линейная связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi_m \vec{H},$$

где  $\chi_m$  – магнитная восприимчивость. **Магнитная восприимчивость – величина, характеризующая свойство вещества намагничиваться в магнитном поле, равная отношению модуля намагниченности к модулю напряженности магнитного**

**поля:**  $\chi = \frac{J}{H}$ .

Используя понятие магнитной восприимчивости выражение (27.5), можно записать следующим образом:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi_m).$$

Если обозначить  $\mu = 1 + \chi_m$ , то можно записать

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (27.7)$$

Величина  $\mu$  называется **относительной магнитной проницаемостью** вещества. Выясним ее физический смысл. Пусть в вакууме (при отсутствии магнетика) токи проводимости создают магнитное поле, характеризующееся индукцией  $\vec{B}_{\text{вак}} = \mu_0 \vec{H}_{\text{вак}}$ . В однородном изотропном магнетике те же токи проводимости создадут магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_{\text{магн}} = \mu \mu_0 \vec{H}_{\text{магн}}$ .

В соответствии с теоремой (27.6),

$$\vec{H}_{\text{вак}} = \vec{H}_{\text{магн}},$$

поэтому

$$\mu = \frac{B_{\text{магн}}}{B_{\text{вак}}}. \quad (27.8)$$

**Относительная магнитная проницаемость вещества показывает, во сколько раз индукция магнитного поля системы токов в магнетике отличается от индукции магнитного поля той же системы токов в вакууме.** Магнитная восприимчивость может быть и положительной, и отрицательной. Следовательно, относительная магнитная проницаемость вещества может быть как больше, так и меньше единицы. По величине относительной магнитной проницаемости все магнетики делятся на три основные группы.

К **диамагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых отрицательна, поэтому  $\mu_{\text{д}} < 1$ . Из опытных данных известно, что  $|\chi_{\text{мд}}| \approx 10^{-8} \dots 10^{-5}$ , поэтому  $\mu_{\text{д}}$  для практических расчетов можно принять равной единице.

К **парамагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых незначительно больше нуля, поэтому  $\mu_{\text{п}} > 1$ . Из опытных данных известно, что  $\chi_{\text{мп}} \approx 10^{-8} \dots 10^{-4}$ , поэтому для практических расчетов можно принять  $\mu_{\text{пара}}$  равной единице.

К **ферромагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых значительно больше нуля, поэтому  $\mu_{\text{ф}} \gg 1$ . Из опытных данных известно, что  $\chi_{\text{мф}} \approx 10^2 \dots 10^6$ . Ферромагнетики используются для создания сильных магнитных полей.

Выясним, что происходит с магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля на границе двух однородных изотропных магнетиков с разными значениями магнитной проницаемости  $\mu$ . Воспользуемся тем обстоятельством, что поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю, т.е.

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Рассмотрим воображаемый цилиндр высотой  $\Delta h$ , основания которого площадью  $S_1$  и  $S_2$  ( $S_1 = S_2 = S$ ) расположены по разные стороны границы раздела (рис. 27.5). Магнитным потоком через боковую поверхность цилиндра можно пренебречь, так как  $\Delta h$  будет стремиться к нулю. Магнитный поток через верхнее основание  $\Phi_{\text{в}} = -B_{1n}S_1$ , где  $B_{1n}$  – нормальная составляющая вектора магнитной индукции в первом магнетике в непосредственной близости к поверхности раздела магнетиков. Аналогично поток через нижнее основание есть  $\Phi_{\text{н}} = B_{2n}S_2$ , где  $B_{2n}$  – нормальная составляющая вектора магнитной индукции во втором магнетике, тоже в непосредственной близости к поверхности раздела. Сложив эти два потока, получим полный поток магнитной индукции через замкнутую поверхность, который равен нулю:  $\Phi = -B_{1n}S_1 + B_{2n}S_2 = 0$ .

Отсюда следует

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (27.9)$$

Таким образом, **при переходе через границу раздела двух магнитных сред нормальная к границе раздела составляющая магнитной индукции не изменяется.**

Выражение (27.9) можно переписать в виде  $\mu_1\mu_0 H_{1n} = \mu_2\mu_0 H_{2n}$ , тогда для нормальных составляющих напряженности магнитного поля получим:

$$H_{2n} = H_{1n} \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (27.10)$$

Для нахождения условия связи тангенциальных проекций напряженности и индукции поля в двух средах выберем прямоугольный контур (рис. 27.6) и вычислим для него циркуляцию вектора напряженности магнитного поля. Если на поверхности

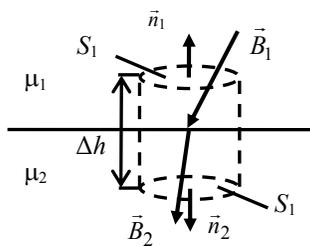


Рис. 27.5

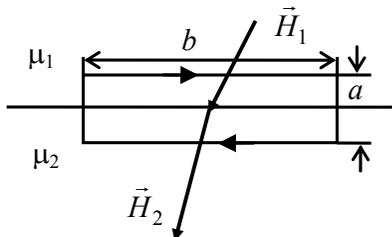


Рис. 27.6

раздела двух сред отсутствуют токи проводимости, то из закона полного тока следует, что циркуляция напряженности магнитного поля по выбранному замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

Отрезок контура  $a$  возьмем столь малым, что вкладом, вносимым в циркуляцию вдоль сторон, перпендикулярных к поверхности раздела, можно пренебречь. Тогда, с одной стороны, циркуляция вектора  $\vec{H}$  вдоль этого контура равна  $b(H_{1\tau} - H_{2\tau})$ . С другой стороны, поскольку с контуром не сцеплены макроскопические токи, циркуляция вектора  $\vec{H}$  равна нулю, откуда вытекает, что

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (27.11)$$

**т.е. составляющая напряженности магнитного поля, касательная к поверхности раздела двух сред, не изменяется при переходе через эту поверхность.**

Выражение (27.11) можно переписать в виде

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \mu_0} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \mu_0}, \quad B_{2\tau} = B_{1\tau} \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (27.12)$$

Объединяя условия (27.19) — (27.12), можно показать каким образом преломляются линии индукции магнитного поля при переходе из одной среды в другую. Для случая  $\mu_2 > \mu_1$  это изображено на рис. 27.7 и 27.8. Видно, что при увеличении относительной магнитной проницаемости среды линии магнитной индукции отклоняются в сторону поверхности раздела сред.

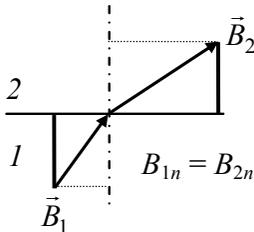


Рис. 27.7

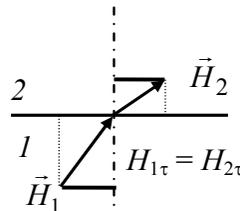


Рис. 27.8

## Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение намагниченности.
2. Что называется напряженностью магнитного поля?
3. Что характеризует магнитная восприимчивость вещества?
4. Сформулируйте закон полного тока для напряженности магнитного поля в веществе.
5. Сформулируйте определение изменение нормальных составляющих векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  при переходе линий магнитной индукции через торцевую поверхность северного полюса магнита (из магнита в вакуум), модуль намагниченности которого равен  $j$ .

## 28. ДИА-, ПАРА- И ФЕРРОМАГНЕТИКИ

Гипотеза Ампера о молекулярных токах позволяет объяснить многие явления в магнетиках. Природа молекулярных токов стала понятной после того, как опытами Резерфорда было установлено, что атомы всех веществ состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов. Согласно теории, развитой в 1913 г. Нильсом Бором, электроны в атомах движутся по круговым орбитам.

Рассмотрим модель одноэлектронного атома (рис. 28.1). Такой атом может быть представлен в виде массивной положительно заряженной частицы (ядра), находящейся в центре круговой орбиты электрона, вращающегося вокруг него.

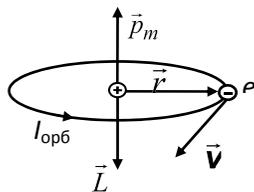


Рис. 28.1

Отрицательно заряженный электрон, вращающийся по орбите, создает **орбитальный ток**. Направление орбитального тока противоположно направлению вращения электрона. Если  $v$  – скорость вращения электрона по орбите, то силу орбитального тока  $I_{\text{орб}}$  можно найти, разделив величину заряда на период вращения:

$$I_{\text{орб}} = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (28.1)$$

Орбитальный ток электрона подобен току, существующему в проводящем витке, а поэтому движение электрона по орбите создает магнитный момент:

$$p_m = I_{\text{орб}} S = \frac{e v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e v r}{2}. \quad (28.2)$$

Момент (28.2) обусловлен движением электрона по орбите, вследствие чего называется **орбитальным магнитным моментом электрона**. Направление вектора магнитного момента образует с направлением тока правовинтовую, а с направлением движения электрона левовинтовую систему (рис. 28.1). Движущийся по орбите электрон массой  $m$  обладает моментом импульса

$$L = m v r. \quad (28.3)$$

Вектор  $\vec{L}$  называют **орбитальным механическим моментом электрона**. Он образует с направлением движения электрона правовинтовую систему. Следовательно, направления векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{L}$  противоположны. Отношение магнитного момента  $p_m$  элементарной частицы к ее механическому моменту  $L$  называется **гиромагнитным отношением**. Для электрона

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}, \quad (28.4)$$

знак минус указывает на то, что направления моментов противоположны.

Кроме орбитальных моментов (28.2) и (28.3) электрон обладает собственным механическим  $L_s$  и магнитным  $p_{ms}$  моментами, для которых значение гиромагнитного отношения в два раза больше

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}. \quad (28.5)$$

Собственный механический момент (спин) и связанный с ним собственный (спиновый) магнитный момент являются такими же неотъемлемыми свойствами электрона, как его масса и заряд.

Магнитный момент атомов складывается из орбитальных и собственных моментов входящих в него электронов, а также из магнитного момента ядра. Магнитный момент ядра значительно меньше моментов электронов, поэтому при рассмотрении многих явлений им можно пренебречь и считать, что магнитный момент

атома равен векторной сумме магнитных моментов электронов. Следует ожидать, что вещества, атомы которых имеют магнитный момент равный нулю и магнитный момент отличный от нуля, будут вести себя во внешнем магнитном поле различным образом.

Как уже отмечалось, к **диамагнетикам** относятся вещества, магнитная восприимчивость которых отрицательна, а относительная магнитная проницаемость меньше единицы. К диамагнетикам относятся вещества, у которых атомы не обладают магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов равна нулю).

Выясним, по какой причине диамагнетики намагничиваются «противоположно» внешнему магнитному полю, т.е. так, что их индуцированные магнитные моменты атомов  $\vec{p}'_m$  направлены противоположно вектору магнитной индукции внешнего поля. Рассмотрим орбитальное движение электронов таких атомов во внешнем поле (рис. 28.2).

Если линии магнитной индукции не перпендикулярны плоскости орбиты электрона, то на орбитальный ток  $I_{\text{орб}}$ , обусловленный движением электрона, (по аналогии с витком с током) действует вращающий момент  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ .

Под действием магнитного поля ось орбиты и совпадающий с ней по направлению вектор магнитного момента  $\vec{p}_m$  прочерчивают при вращении вокруг вектора магнитной индукции боковую поверхность конуса с вершиной в центре орбиты. Возникает так называемая **прецессия** орбиты электрона. Причем согласно основному уравнению динамики вращательного движения за время  $dt$  вектор механического момента электрона  $\vec{L}$  получает приращение  $d\vec{L}$ :

$$d\vec{L} = \vec{M} dt.$$

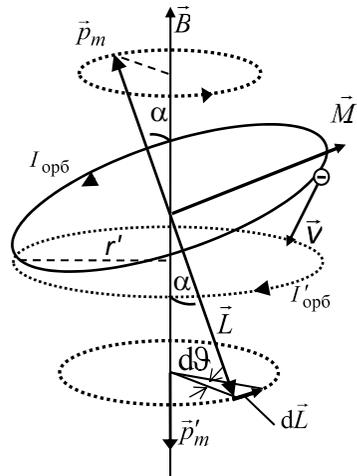


Рис. 28.2

Вектор  $d\vec{L}$ , как и вектор  $\vec{M}$ , перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{L}$ . Модуль вектора  $d\vec{L}$

$$dL = p_m B \sin \alpha dt,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором магнитного момента и вектором магнитной индукции.

За время  $dt$  плоскость, в которой лежит вектор  $\vec{L}$ , повернется вокруг направления  $\vec{B}$  на угол

$$d\vartheta = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{p_m B \sin \alpha dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_m}{L} B dt.$$

Разделив угол  $d\vartheta$  на время  $dt$ , найдем угловую скорость прецессии

$$\omega_L = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p_m}{L} B.$$

Подставив в это выражение значение отношения магнитного и механического моментов электрона (гиромагнитное отношение), получим:

$$\omega_L = \frac{e}{2m} B. \quad (28.6)$$

Частоту (22.6) называют **частотой ларморовой прецессии или просто ларморовой частотой**.

Прецессия орбиты обуславливает дополнительное движение электрона вокруг направления магнитной индукции внешнего поля. Это, в свою очередь, приводит к возникновению дополнительного орбитального тока  $I'_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi}$  и соответственно дополнительного магнитного момента

$$p'_m = I'_{\text{орб}} S' = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r'^2 = \frac{e\omega_L}{2} r'^2.$$

Вектор  $\vec{p}'_m$ , как видно на рис. 28.2, направлен в сторону, противоположную направлению магнитной индукции внешнего поля. Этот момент называют индуцированным (наведенным) магнитным моментом. С учетом формулы для ларморовой частоты индуцированный магнитный момент

$$\vec{p}'_m = -\frac{e^2 \vec{B}}{4m} r'^2. \quad (28.7)$$

Знак « $\leftarrow$ » означает, что векторы  $\vec{p}'_m$  и  $\vec{B}$  направлены в противоположные стороны.

Обобщим полученные результаты. При внесении любого вещества в магнитное поле каждый орбитальный ток, независимо от направления движения электрона по орбите, приобретает индуцированный магнитный момент  $\vec{p}'_m$ , направленный против вектора магнитной индукции внешнего поля. Этот процесс в физике магнитных явлений называется **диамагнитным эффектом**.

Магнитные свойства диамагнетиков обусловлены только диамагнитным эффектом, поэтому их намагниченность определяется индуцированным магнитным моментом

$$\vec{J} = n\vec{p}'_m = -\frac{e^2 Z}{4m} r'^2 n \vec{B} = -\frac{e^2 Z}{4m} r'^2 n \mu_0 \vec{H},$$

где  $n$  – концентрация атомов;  $Z$  – зарядовое число атома. Тогда магнитная восприимчивость единицы объема

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 n e^2 Z}{4m} r'^2. \quad (28.8)$$

Формула (28.8) не совсем точна. Вместо расстояния  $r'^2$  в ней нужно взять среднее значение квадрата  $\langle r'^2 \rangle$  расстояния электрона от ядра и просуммировать по всем электронам. Это уточнение приводит к выражению

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 n e^2 Z}{6m} \sum_{k=1}^Z \langle r_k'^2 \rangle.$$

Зависимость намагниченности диамагнетика от напряженности магнитного поля  $J = f(H)$  приведена на рис. 28.3.

Магнитная восприимчивость диамагнетиков не зависит от напряженности внешнего магнитного поля,

поэтому для них характерно линейное намагничивание. Относительная магнитная проницаемость диамагнетиков  $\mu$  постоянна и не

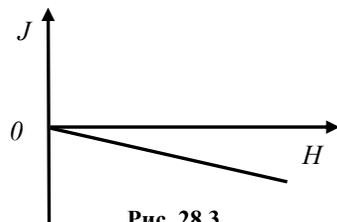


Рис. 28.3

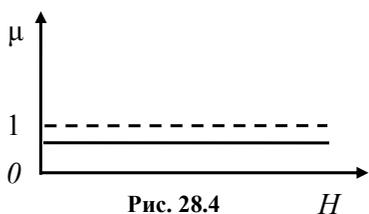


Рис. 28.4

зависит от напряженности  $H$  внешнего магнитного поля (рис. 28.4). Поскольку магнитная восприимчивость таких материалов отрицательна, то  $\mu < 1$ .

Диамагнетиками являются инертные газы, молекулярные водород и азот, висмут, медь, цинк, золото, серебро, кремний, вода и ряд других неорганических и органических соединений. В неоднородном магнитном поле поведение диамагнетиков таково, что, например, стержень из висмута выталкивается в область более «слабого» поля и устанавливается так, чтобы ось стержня была перпендикулярна  $\vec{B}$ . Газы, входящие в состав продуктов сгорания, обладают диамагнитными свойствами, поэтому пламя свечи выталкивается из области более «сильного» поля.

**Парамагнетиками** называются вещества, магнитная восприимчивость которых положительна, а относительная магнитная проницаемость составляет величину, незначительно большую единицы. К парамагнетикам относятся вещества, атомы которых обладают собственным магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых моментов электронов не равна нулю). В отсутствие внешнего магнитного поля парамагнетик не намагничен, так как из-за теплового движения собственные магнитные моменты атомов ориентированы беспорядочно, поэтому  $\vec{J} = 0$ .

При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле происходят два процесса: с одной стороны, за счет диамагнитного эффекта возникает намагниченность с направленностью, противоположной магнитной индукции внешнего поля, а с другой – собственные магнитные моменты атомов (молекул) ориентируются вдоль вектора магнитной индукции внешнего поля. Вклад собственных магнитных моментов преобладает, поэтому парамагнетики намагничиваются по направлению индукции внешнего магнитного поля.

Классическая теория парамагнетизма была разработана в 1905 г. французским физиком П. Ланжевенем. Он рассмотрел статистическую задачу о поведении молекулярных токов и их магнитных моментов в однородном магнитном поле. Оказалось, что намагниченность  $\vec{J}$  парамагнетика в поле зависит от параметра

$$a = \frac{p_m B}{kT}, \quad (28.9)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура. Данный параметр является отношением потенциальной энергии молекулярного тока в магнитном поле к средней энергии теплового движения атомов.

Если учесть, что  $J_{\max} = np_m$ , т.е. максимальная намагниченность материала возникает, когда все магнитные моменты атомов «выстраиваются» в одну сторону, то результаты расчетов Ланжевена можно записать в виде

$$J = J_{\max} \left( \frac{e^a + e^{-a}}{e^a + e^{-a}} - \frac{1}{a} \right). \quad (28.10)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи соотношения (28.10). Если  $a \gg 1$ , то все выражение в скобках в пределе равно единице. Поэтому в области низких температур (или достаточно сильных магнитных полей) намагниченность парамагнетика практически постоянна и равна максимальному значению. Это состояние называется состоянием магнитного насыщения парамагнетика. При комнатной температуре оно может быть достигнуто только в очень сильных ( $B \sim 100$  Тл) магнитных полях.

В случае, если  $a \ll 1$ , выражение в скобках в формуле (28.10) имеет предельное значение  $a/3$ . С учетом (28.9) намагниченность парамагнетика определяется следующим образом:

$$J = J_{\max} \frac{p_m B}{3kT} = \frac{np_m^2 B}{3kT}. \quad (28.11)$$

Отсюда, поскольку  $\vec{J} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ , получим выражение

для магнитной восприимчивости

$$\chi_{m \text{ пара}} = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}. \quad (28.12)$$

Таким образом, магнитная восприимчивость парамагнетика обратно пропорциональна его термодинамической температуре.

Относительная магнитная проницаемость парамагнетиков постоянна и не зависит от напряженности внешнего магнитного поля (рис. 28.5).

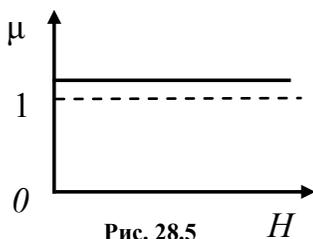


Рис. 28.5

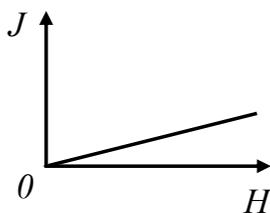


Рис. 28.6

Так как магнитная восприимчивость парамагнетиков положительна, то магнитная проницаемость больше единицы  $\mu > 1$ . На рисунке 28.6 показана кривая намагничивания для парамагнетика. Поскольку магнитная восприимчивость такого материала не зависит от величины напряженности внешнего поля, то для парамагнетиков так же, как и для диамагнетиков, характерно линейное намагничивание.

Экспериментально установлено, что намагничивание парамагнетика действительно происходит в

направлении, совпадающем с вектором  $\vec{B}$ . При внесении парамагнитного стержня в неоднородное магнитное поле он сначала поворачивается и устанавливается вдоль линий магнитной индукции этого поля, а затем втягивается в область более сильного поля.

К парамагнетикам относятся многие металлы (щелочные и щелочно-земельные), кислород, окись азота и др.

**Ферромагнетиками** называются вещества, обладающие при не слишком высоких температурах самопроизвольной (**спонтанной**) намагниченностью, которая сильно изменяется под влиянием внешних воздействий – магнитного поля, деформации, температуры. Ферромагнетики в отличие от слабомагнитных диа- и парамагнетиков являются сильномагнитными средами: магнитная индукция поля внутри них может в сотни и тысячи раз превосходить магнитную индукцию внешнего поля в вакууме. Такими свойствами обладают, например, железо, кобальт, никель и материалы, содержащие атомы этих элементов. Исключением является нержавеющая сталь, которая является парамагнитной.

Большой вклад в экспериментальное изучение свойств ферромагнетиков внес русский физик А.Г. Столетов. В 1872 г. он исследовал зависимость намагниченности железа от напряженности магнитного поля. Предложенный им метод заключался в определении магнитного потока в ферромагнитных кольцах при помощи

баллистического гальванометра. На рисунке 28.7 показана схема установки Столетова.

На тороидальный сердечник из исследуемого материала намотаны две обмотки. Первичная обмотка 1

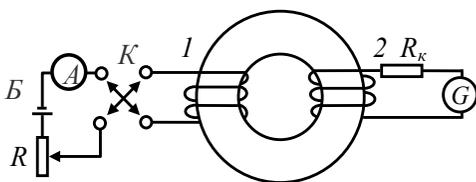


Рис. 28.7

подключается в цепь батареи  $B$  через реостат  $R$  и амперметр  $A$ . Ключ  $K$  в этой цепи позволяет изменять направление тока в цепи (полярность подключения батареи). Зная число витков обмотки и силу тока в ней, можно, используя закон полного тока, определить напряженность магнитного поля в сердечнике  $H = In$ , где  $I$  – сила тока в первичной обмотке;  $n$  – число витков на единицу длины обмотки.

Вторичная обмотка 2 подключена к баллистическому гальванометру  $G$ , измеряющему заряд, протекающий по виткам вторичной обмотки. При изменении направления тока в первичной обмотке на противоположный магнитный поток, сцепленный как с витками первичной, так и с витками вторичной обмоток, меняет свое значение. Во вторичной обмотке благодаря явлению электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции и протекает заряд, который, с одной стороны, измеряется гальванометром, а с другой – может быть рассчитан по формуле

$$|Q| = \frac{|\Psi_2 - \Psi_1|}{R_k} = \frac{2BSN}{R_k},$$

где  $\Psi_2$  и  $\Psi_1$  – соответственно конечное и начальное значения полного магнитного потока через вторичную катушку;  $R_k$  – электрическое сопротивление катушки;  $S$  – площадь поперечного сечения катушки;  $N$  – число витков катушки;  $B$  – магнитная индукция в тороидальном сердечнике. Отсюда определяется значение магнитной индукции в ферромагнетике

$$B = \frac{|Q|R_k}{SN}.$$

Проведя измерения для различных значений силы тока в первичной обмотке, можно экспериментально получить зависимость  $B = f(H)$  (рис. 28.8), которая называется основной кривой

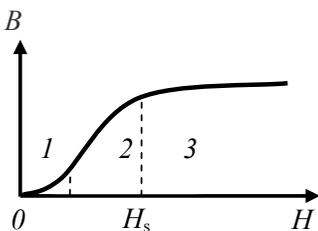


Рис. 28.8

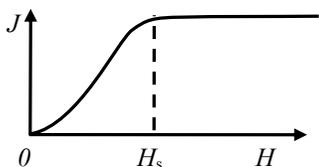


Рис. 28.9

намагничивания ферромагнетика.

Используя соотношение  $J = \frac{B}{\mu_0} - H$ ,

можно рассчитать намагниченность ферромагнетика и построить график зависимости намагниченности от напряженности поля  $J = f(H)$  (рис. 28.9).

Анализ графиков показывает, что вид кривой намагничивания ферромагнетика существенно отличается от подобных зависимостей для диа- и парамагнетиков. Кроме того, начиная с некоторого значения напряженности магнитного поля  $H_s$ , ферромаг-

нетик входит в состояние **магнитного насыщения**, когда дальнейший рост напряженности поля не приводит к росту намагниченности вещества.

Отличительной особенностью ферромагнетиков является то, что их относительная магнитная проницаемость быстро растет с возрастанием  $H$ , достигает максимума, а затем убывает, стремясь к

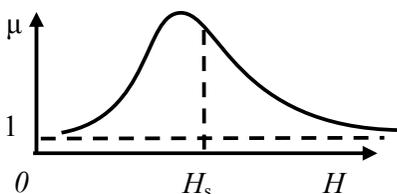


Рис. 28.10

единице в сильных магнитных полях (рис. 28.10). Отметим, что максимальное значение относительной магнитной проницаемости наступает раньше, чем ферромагнетик достигнет состояния насыщения: согласно выражению (27.7) величина  $\mu$  определяется тангенсом угла наклона касательной к графику зависимости  $B = f(H)$  (рис. 28.8). Дальнейшее уменьшение значения  $\mu$  при возрастании  $H$  можно объяснить тем, что при очень больших значениях  $H$  в выражении

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$$

можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым.

Тогда

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \approx \mu_0 \vec{H} \quad \text{и} \quad \mu \approx 1.$$

Дальнейшие теоретические и практические исследования показали, что такие необычные свойства ферромагнетиков объясняются их внутренней структурой. Дело в том, что при отсутствии внешнего магнитного поля внутри ферромагнетиков самопроизвольно возникают области намагничивания, в которых магнитные моменты отдельных атомов ориентируются в одном направлении. Объясняется это взаимодействием спиновых магнитных моментов соседних атомов и их взаимным влиянием друг на друга. Квантово-механическое объяснение этого процесса достаточно сложно и не входит в программу нашего курса. Области спонтанного намагничивания внутри ферромагнетика получили название **доменов** (этот термин ввел П. Вейс в 1907 г.). Их линейный размер может достигать 0,01 мм. На рисунке 28.11 показана различная ориентации магнитных моментов доменов внутри ферромагнетика. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения. Магнитные же моменты различных доменов ориентированы хаотично, поэтому в исходном состоянии ферромагнетик не обладает намагниченностью. Границы доменных зерен можно наблюдать с помощью обычного микроскопа. Для этого отшлифованный срез ферромагнетика достаточно покрыть слоем жидкости с мелкодисперсным ферритовым порошком. Поскольку на границе доменов магнитное поле резко неоднородно, то частицы порошка переместятся в жидкости так, что расположатся вблизи границ доменов.

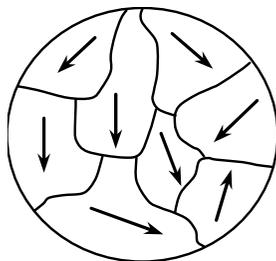


Рис. 28.11

При помещении ферромагнетика в магнитное поле происходит нарушение первичной доменной структуры. Это связано с тем, что различные домены обладают различной энергией в магнитном поле, причем эта энергия зависит от направления магнитного момента. Те домены, магнитные моменты которых образуют острые углы с вектором  $\vec{H}$ , имеют меньшую энергию, т.е. находятся в энергетически более выгодных положениях, чем те, у которых эти углы тупые. При увеличении напряженности внешнего поля наблюдается укрупнение энергетически более выгодных доменов за счет соседних. Осуществляется это двумя

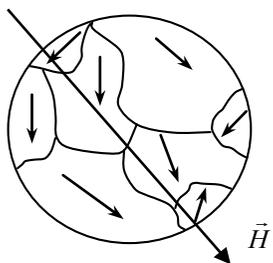


Рис. 28.12

способами. При малых значениях  $H$  наблюдается укрупнение доменов, имеющих меньшие значения энергии в поле. «Территории» соседних с ними доменов уменьшаются, так как атомы в прилегающих тонких слоях разворачивают свои магнитные моменты. Промежуточный результат этого процесса показан на рис. 28.12.

В итоге сумма магнитных моментов единицы объема вещества становится отличной от нуля, и намагниченность материала растет. Следует учесть, что рост магнитной индукции поля в веществе на данном этапе процесса намагничивания происходит не слишком сильно, так как в процессе участвуют не все атомы вещества (см. рис. 28.8, этап 1).

При больших значениях  $H$ , наряду с описанным процессом происходит другой: отдельные домены начинают целиком поворачиваться, ориентируясь своими магнитными моментами по направлению вектора напряженности магнитного поля. Магнитные моменты доменов как бы «выстраиваются» вдоль линий магнитной индукции внешнего поля (см. рис. 28.8, этап 2). Поскольку намагниченность материала увеличивается при этом весьма существенно, то рост магнитной индукции и относительной магнитной проницаемости (рис. 28.10) оказывается очень сильным. Когда все домены ферромагнетика «выстроят» свои магнитные моменты в одном направлении, дальнейшее намагничивание материала оказывается невозможным, и он достигает состояния магнитного насыщения; при этом границы между отдельными доменами исчезают. Увеличение магнитной индукции в веществе (см. рис. 28.8, этап 3) происходит лишь за счет увеличения напряженности внешнего поля.

Возникающая на определенном этапе необратимость намагничивания материала позволяет ферромагнетикам частично сохранять намагниченность после удаления их из поля. При уменьшении напряженности внешнего поля можно наблюдать **процесс запаздывания уменьшения магнитной индукции  $\vec{B}$** . Этот про-

цесс в ферромагнетиках получил название **магнитного гистерезиса** (от греческого *hystérēsis* – отставание, запаздывание). На рисунке 28.13 показано, что при уменьшении напряженности внешнего поля до нуля магнитная индукция в предварительно намагниченном ферромагнетике

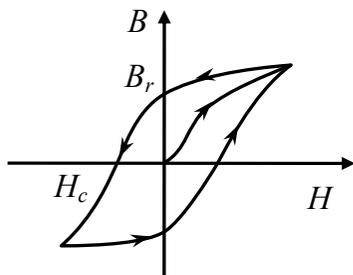


Рис. 28.13

не принимает нулевого значения. Сохраняющееся при этом в веществе магнитное поле характеризуется **остаточной магнитной индукцией**  $B_r$ . Чтобы полностью размагнитить образец, необходимо поместить его в магнитное поле с противоположной ориентацией линий индукции (в «отрицательное поле»). Величина напряженности магнитного поля, необходимая для полного размагничивания ферромагнетика, называется **коэрцитивной силой**  $H_c$  (от латинского *coercitio* – удерживать). Цикл перемагничивания ферромагнетика описывается графиком, приведенном на рис. 28.12.

Этот график называется **петлей гистерезиса**. Можно показать, что площадь петли гистерезиса пропорциональна количеству теплоты, выделяющемуся в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания.

Согласованное участие магнитных моментов всех атомов в создании доменов и междоменное взаимодействие позволяют ферромагнетикам усиливать внешние поля в сотни, тысячи и миллионы раз.

Необычные свойства ферромагнетиков на этом не заканчиваются. Оказывается, при температуре выше некоторого критического значения ферромагнетик утрачивает ферромагнитные свойства. Впервые это явление обнаружил французский физик П. Кюри. Критическое значение температуры называется **точкой Кюри**.

При более высоких температурах ферромагнетик ведет себя во внешнем поле как обычный парамагнетик. При температуре точки Кюри в результате сильного теплового движения частиц происходит разрушение доменной структуры ферромагнетика. Для железа эта температура составляет  $770^{\circ}\text{C}$ , для никеля  $360^{\circ}\text{C}$ .

Сплав железа с никелем – пермаллой, который используется для изготовления трансформаторных сердечников, имеет точку Кюри всего 70°С.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какие типы магнетиков вам известны, чем они отличаются?
2. Чем обусловлены магнитные свойства атомов?
3. В чем заключается диамагнитный эффект?
4. Какие вещества относятся к диамагнетикам?
5. В чем заключаются особенности намагничивания парамагнетиков?
6. Каковы особенности магнитных свойств ферромагнетиков?
7. В чем заключается явление магнитного гистерезиса?
8. Что происходит с ферромагнетиком при его нагревании до температуры выше точки Кюри?
9. Опишите различия в процессах намагничивания парамагнетиков и ферромагнетиков и объясните причины этих различий.

## 29. СОБСТВЕННЫЕ СВОБОДНЫЕ И ЗАТУХАЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ

**Колебаниями** называются процессы (движения или изменения состояния), обладающие той или иной повторяемостью во времени. Электрические колебания могут возникать в цепи, содержащей конденсатор и катушку индуктивности. Такая цепь называется **колебательным контуром**. В колебательном контуре периодически изменяются заряд и напряжение конденсатора и сила тока в катушке индуктивности, при этом происходит попеременное превращение энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки индуктивности и наоборот – переход энергии магнитного поля катушки индуктивности в энергию электрического поля конденсатора.

Независимо от природы колебаний и характера колебательной системы все колебательные процессы подчиняются одним и тем же закономерностям. Это касается дифференциальных уравнений колебаний, их решений, характеристик **собственных, затухающих и вынужденных** колебаний. Поэтому при анализе электромагнитных колебаний будем использовать соотношения, аналогичные тем, что были получены при рассмотрении механических колебаний.

Примером электрической цепи, в которой могут происходить свободные электрические колебания, служит простейший колебательный контур (рис. 29.1), состоящий из конденсатора электроемкостью  $C$  и соединенной с ним последовательно катушки индуктивностью  $L$ . При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора в колебательном контуре возникают свободные незатухающие колебания заряда конденсатора и силы тока в катушке. Рассмотрим процесс возникновения колебаний подробнее.

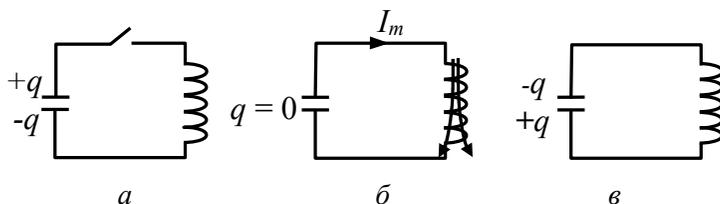


Рис. 29.1

Исходное состояние системы показано на рис. 29.1, а. Конденсатор заряжен максимальным зарядом  $q_m = CU_m$ , где  $C$  – емкость конденсатора;  $U_m$  – напряжение на конденсаторе. В пространстве между обкладками заряженного конденсатора существует электрическое поле, энергия которого  $W_{э,м} = \frac{q_m^2}{2C}$ .

Если конденсатор подключить к катушке, он начнет разряжаться, и в контуре возникнет электрический ток. При этом сила тока увеличивается постепенно от нуля до некоторого максимального значения, поскольку в катушке возникает электродвижущая

сила электромагнитной индукции, препятствующая увеличению силы тока в контуре. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но при этом будет возникать все увеличивающаяся энергия магнитного поля, обусловленного током через катушку. Энергия магнитного поля определяется индуктивностью катушки  $L$  и силой тока в цепи  $i$ :  $W_M = \frac{Li^2}{2}$ .

В тот момент, когда конденсатор полностью разряжается, его заряд, а значит, и энергия электрического поля обращаются в нуль, в то время как сила тока в цепи, а значит, и энергия магнитного поля достигают максимального значения (рис. 29.1, б):

$$W_{mm} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

Несмотря на то, что конденсатор полностью разряжен, в контуре продолжает существовать ток того же направления, так как возникающая в катушке самоиндукция препятствует теперь уже уменьшению силы тока в цепи. Сила тока уменьшается от максимального значения до нуля, а конденсатор заряжается. Знаки зарядов обкладок при этом противоположны знакам зарядов в исходном состоянии (рис. 29.1, в). Энергия магнитного поля катушки переходит в энергию электрического поля конденсатора. Далее вновь повторяется процесс разрядки конденсатора, но ток в контуре уже имеет противоположное направление. Так возникают электрические колебания в контуре.

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия системы, состоящая из энергий электрического и магнитного полей остается постоянной.

$$W = W_э + W_M = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{Li_m^2}{2}.$$

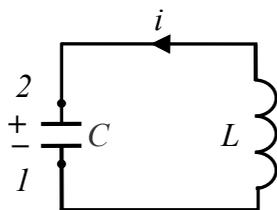


Рис. 29.2

Определим закон изменения заряда конденсатора во времени. Для этого составим дифференциальное уравнение колебаний в колебательном контуре, схема которого приведена на рис. 29.2. Запишем закон Ома для участка цепи 1–2, приняв, что направление тока соответствует зарядке конденсатора:

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s, \quad (29.1)$$

где  $R$  – сопротивление контура;  $\mathcal{E}_s$  – электродвижущая сила самоиндукции. Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  на участке цепи  $1-2$  равна напряжению на конденсаторе, взятому со знаком минус:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -U_C = -\frac{q}{C}. \text{ ЭДС самоиндукции } \mathcal{E}_s \text{ определяется законом}$$

Фарадея:  $\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}$ . Учтем, что сила тока при зарядке конденсатора равна первой производной заряда конденсатора по времени

$$i = \frac{dq}{dt}. \text{ Тогда ЭДС самоиндукции } \mathcal{E}_s = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Подставив разность потенциалов и ЭДС в уравнение (29.1) и учитывая, что  $R = 0$ , получим:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Разделим все слагаемые последнего уравнения на индуктивность катушки  $L$ :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Введя обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (29.2)$$

где  $\omega_0$  – частота собственных гармонических колебаний, получаем:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (29.3)$$

Уравнение (29.3) называется **дифференциальным уравнением собственных незатухающих колебаний заряда** в колебательном контуре. Решением уравнения (29.3) является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (29.4)$$

где  $q_m$  – амплитудное значение заряда конденсатора;  $\alpha$  – начальная фаза колебаний заряда.

**Период собственных колебаний** колебательного контура определяется по **формуле Томсона**

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (29.5)$$

Пользуясь (29.4), выведем закон изменения силы тока в контуре. Для этого найдем производную заряда по времени:

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (29.6)$$

где  $I_m = q_m \omega_0$  – амплитуда силы тока.

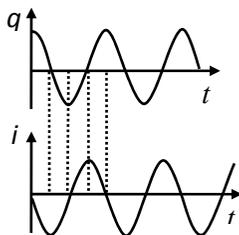


Рис. 29.3

Из сопоставления уравнений (29.4) и (29.6) видно, что колебания силы тока в контуре опережают колебания заряда по фазе на  $\pi/2$ , а по времени – на четверть периода. Графики изменения заряда конденсатора и силы тока в колебательном контуре при  $\alpha = 0$  представлены на рис. 29.3.

Чтобы получить зависимость напряжения на обкладках конденсатора от времени, воспользуемся формулой:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} q_m \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (29.7)$$

где  $U_m = \frac{q_m}{C}$  – амплитуда напряжения на конденсаторе.

Напряжение на конденсаторе изменяется со временем в одной фазе с зарядом конденсатора. Отношение амплитудного значения напряжения на конденсаторе к амплитудному значению силы тока в цепи называют **волновым сопротивлением контура** (по аналогии с сопротивлением  $R$  в законе Ома для однородного участка цепи):

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{q_m}{C} \frac{1}{q_m \omega_0} = \frac{1}{C \omega_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (29.8)$$

Энергия электрического поля в конденсаторе и энергия магнитного поля в соленоиде во времени при нулевой начальной фазе колебаний изменяются согласно следующим зависимостям:

$$W_э = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t;$$

$$W_м = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t.$$

Графики колебаний заряда, энергии магнитного и электрического полей представлены на рис. 29.4. Анализ приведенных зависимостей показывает, что колебания энергии магнитного и электрического полей происходят с частотой, равной удвоенной частоте собственных колебаний, а сумма этих энергий, равная полной энергии контура, с течением времени остается величиной постоянной. Значение полной энергии на рис. 29.4. показано штриховой линией.

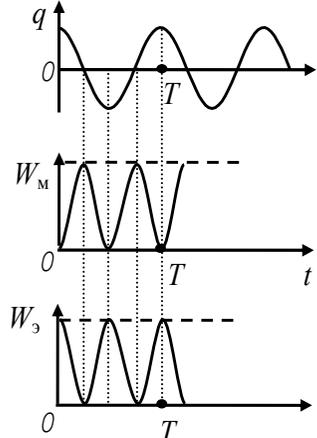


Рис. 29.4

Проанализируем теперь колебательный процесс, происходящий в контуре при наличии резистора с омическим сопротивлением  $R$  (рис. 29.5). Будем считать, что направление тока в контуре соответствует зарядке конденсатора. Запишем для участка цепи  $1-2$  обобщенный закон Ома:

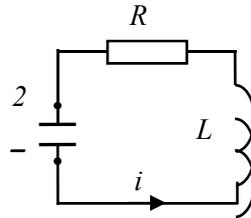


Рис. 29.5

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s,$$

где  $i = \frac{dq}{dt}$ ;  $\mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ ;  $\varphi_1 - \varphi_2 = -u_C = -\frac{q}{C}$ .

После подстановки и преобразований получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (29.9)$$

Введем обозначения

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (29.10)$$

С учетом этих обозначений соотношение (29.9) принимает стандартный вид **дифференциального уравнения затухающих колебаний**:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (29.11)$$

При условии, что  $\beta^2 < \omega_0^2$ , т.е.  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ , его решение

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (29.12)$$

где  $\varphi$  – начальная фаза;  $\omega$  – частота затухающих колебаний, причем

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (29.13)$$

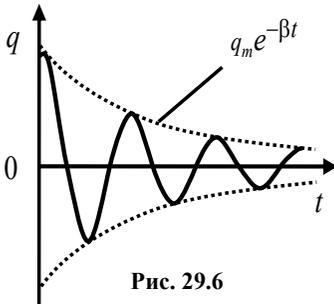


Рис. 29.6

График затухающих колебаний заряда на обкладках конденсатора приведен на рис. 29.6.

Поскольку амплитуда колебаний заряда  $q_m e^{-\beta t}$  уменьшается с течением времени, затухающие колебания не являются гармоническими. Однако для них удобно ввести понятие **условного периода** колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Анализ формулы (29.13) показывает, что при условии  $\omega_0^2 \leq \beta^2$  колебания в системе не возникают. Значение максимального сопротивления контура, при котором еще возможно возникновение колебаний, называется критическим сопротивлением  $R_{кр}$ . Его значение определяется из условия  $\omega_0 = \beta$ :

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (29.14)$$

Заметим, что период затухающих колебаний больше периода незатухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Рассмотрим характеристики затухающих колебаний и сформулируем их **физический смысл**. Первая из них, непосредственно входящая в закон изменения колеблющейся величины, называется **коэффициентом затухания**  $\beta$ . Найдем отношение амплитуд колебаний в моменты времени  $t = t_0$  и  $t = t_0 + \tau$ :

$$\frac{A(t_0)}{A(t_0 + \tau)} = \frac{q_m e^{-\beta t_0}}{q_m e^{-\beta(t_0 + \tau)}} = e^{\beta \tau}. \quad (29.15)$$

Время  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется **постоянной времени**. Поскольку  $e^{\beta \tau} = e$ , то  $\beta = \frac{1}{\tau}$ . Таким образом, **коэффициент затухания равен величине, обратной времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.**

Для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний вводится также понятие **логарифмического декремента колебаний**  $\delta$ :

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (29.16)$$

Если за время  $\tau = NT$  система совершит  $N$  колебаний и их амплитуда уменьшится в  $e$  раз, то

$$\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

Таким образом, **логарифмический декремент – величина, обратная числу колебаний  $N_e$ , в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.**

Колебательный контур характеризуется **добротностью  $Q$  – величиной, обратно пропорциональной логарифмическому декременту:**

$$Q = \frac{\pi}{\delta}. \quad (29.17)$$

Чтобы пояснить физический смысл добротности, рассмотрим относительное изменение энергии контура за один период. Амплитуда силы тока и напряжения на конденсаторе убывает по закону  $e^{-\beta t}$ . Энергия, запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды силы тока (или квадрату амплитуды напряжения на конденсаторе). Следовательно, энергия убывает по закону  $e^{-2\beta t}$ . Относительное уменьшение энергии за период

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\delta}.$$

При незначительном затухании (при условии  $\delta \ll 1$ )  $e^{-2\delta} \approx 1 - 2\delta$ , в результате

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\delta) = 2\delta.$$

Заменяя в этом выражении логарифмический декремент  $\delta$  через добротность контура  $Q$  в соответствии с формулой (29.17) и решив полученное уравнение относительно  $Q$ , получим:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}. \quad (29.18)$$

Таким образом, **добротность колебательного контура пропорциональна отношению энергии, запасенной в контуре, к ее убыли за один период.**

Для случая малого затухания колебаний в цепи  $\beta \ll \omega_0$  период  $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$ . Поэтому логарифмический декремент

$$\delta = \beta T = \frac{R}{2L} 2\pi\sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}},$$

а добротность контура

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (29.19)$$

Итак, **добротность контура равна отношению волнового сопротивления контура к его активному сопротивлению.**

## Контрольные вопросы и задания

1. Опишите механизм возникновения собственных гармонических колебаний в колебательном контуре.
2. Напишите дифференциальное уравнение собственных гармонических колебаний и функцию, которая является решением этого уравнения.
3. Напишите выражение для частоты собственных гармонических колебаний.
4. Напишите дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний и функцию, которая является решением этого уравнения.
5. Как зависит от времени амплитуда затухающих колебаний?
6. Что называется коэффициентом затухания, от каких параметров колебательного контура он зависит?
7. Чему равна частота собственных затухающих колебаний?
8. Что называется логарифмическим декрементом колебаний?

## 30. ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ

Вынужденные колебания возникают, если на систему оказывают внешнее периодически изменяющееся воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура источник переменной ЭДС (рис. 30.1), изменяющейся во времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ :

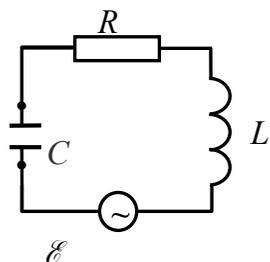


Рис. 30.1

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний можно получить, записав закон Ома для участка цепи  $l-l-2$  в виде:

$$iR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s + \mathcal{E},$$

где  $iR$  – падение напряжения на резисторе контура;  $\varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов между точками 1 и 2;  $\mathcal{E}_s$  – ЭДС самоиндукции катушки индуктивности;  $\mathcal{E}$  – вынуждающая электродвижущая сила, причем

$$i = \frac{dq}{dt}; \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -u_C = -\frac{q}{C}; \quad \mathcal{E}_s = -L \frac{di}{dt}.$$

После подстановки и преобразований получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (30.1)$$

Если обозначить

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

то уравнение (30.1) приводится к виду:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (30.2)$$

Уравнение (30.2) является **дифференциальным уравнением вынужденных колебаний**. Как было показано в первой части курса, частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi). \quad (30.3)$$

Амплитуда  $q_m$  вынужденных колебаний и сдвиг фаз  $\psi$  между колебаниями заряда и вынуждающей ЭДС зависят от частоты.

Найдем зависимости  $q_m(\omega)$  и  $\psi(\omega)$ . Для этого возьмем производные от  $q(t)$  по времени:

$$\dot{q}(t) = -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = q_m \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{q}(t) = -q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi) = q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi)$$

и, подставив их в формулу (30.2), получим:

$$q_m \omega^2 \cos(\omega t - \psi + \pi) + q_m 2\beta \omega \cos\left(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right) + q_m \omega_0^2 \cos(\omega t - \psi) = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t. \quad (30.4)$$

Напомним, что в уравнении (30.4) первое слагаемое представляет собой первую производную по времени от силы тока в контуре, второе слагаемое – произведение  $2\beta$  на силу тока, третье слагаемое – произведение  $\omega_0^2$  на заряд конденсатора.

Используем метод векторных диаграмм. Будем изображать амплитуды гармонических функций, стоящих в левой части уравнения (30.4) векторами, модули которых равны  $q_m \omega^2$ ,  $q_m 2\beta \omega$  и  $q_m \omega_0^2$ . Направления этих векторов на векторной диаграмме (рис. 30.2) определяются сдвигом фаз между

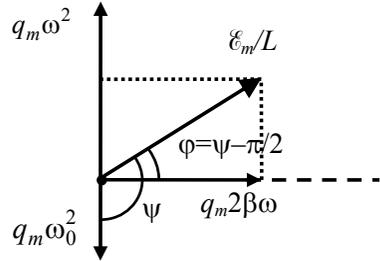


Рис. 30.2

соответствующими слагаемыми уравнения (30.4). Направим вектор, изображающий амплитуду напряжения на резисторе  $q_m 2\beta \omega$ , горизонтально вправо и относительно него отложим два других вектора с учетом их фаз. Вектор, изображающий амплитуду напряжения на конденсаторе  $q_m \omega_0^2$ , отстает от напряжения на резисторе по фазе на  $\pi/2$  – направим его вертикально вниз. Вектор, изображающий амплитуду падения напряжения на катушке индуктивности  $q_m \omega^2$ , опережает напряжение на резисторе по фазе на  $\pi/2$  – направим его вертикально вверх. Результатом сложения этих трех векторов будет вектор, модуль которого равен  $\epsilon_m / L$ .

Из векторной диаграммы на рис. 30.2 находим, что

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Используя теорему Пифагора, найдем амплитуду вынужденных колебаний заряда:

$$q_m = \frac{\epsilon_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (30.5)$$

Разделив заряд  $q_m$  на емкость конденсатора  $C$ , получим амплитуду колебаний напряжения на конденсаторе:

$$U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{\mathcal{E}_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (30.6)$$

Дифференцируя выражение (30.6) по переменной  $\omega$  и приравнявая полученную производную к нулю, определим **резонансную частоту** внешнего воздействия  $\omega = \omega_p$ , при которой амплитуда колебаний заряда или напряжения на конденсаторе достигает максимума:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

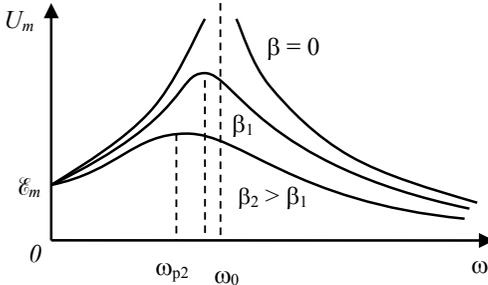


Рис. 30.3

График зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты вынуждающей ЭДС при различных коэффициентах затухания контура  $\beta$  приведен на рис. 30.3.

**Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенной частоте внешнего воздействия называется резонансом.**

При неограниченном возрастании частоты внешнего воздействия ( $\omega \rightarrow \infty$ ) амплитуда колебаний стремится к нулю.

При частоте вынуждающей ЭДС, близкой к частоте собственных гармонических колебаний  $\omega \approx \omega_0$ , из (30.6) можно получить:

$$\frac{U_{Cm}}{\mathcal{E}_m} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q,$$

что совпадает с формулой для добротности (29.19). Таким образом, **добротность контура показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе при резонансе больше амплитуды вынуждающей ЭДС.**

Вернемся к закону колебания силы тока в цепи и исследуем его. Ранее было получено, что

$$i = q'(t) = -q_m \omega \sin(\omega t - \psi) = q_m \omega \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}),$$

откуда следует, что колебания силы тока в цепи опережают по фазе на  $\pi/2$  колебания напряжения на конденсаторе. Амплитуда колебаний силы тока

$$I_m = q_m \omega = \frac{\mathcal{E}_m \omega}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (30.7)$$

Подставив в (30.7) частоту собственных колебаний и коэффициент затухания, выраженные через параметры контура  $R$ ,  $C$  и  $L$ , получим:

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{(X_C - X_L)^2 + R^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}.$$

Величина  $Z$  называется **полным сопротивлением** последовательного контура переменному току;  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  – **емкостным сопротивлением**;  $X_L = \omega L$  – **индуктивным сопротивлением**.

Емкостное и индуктивное сопротивления в сумме дают **реактивное** сопротивление контура, равное  $X_C - X_L$ . Сопротивление резистора  $R$  называется **активным сопротивлением** контура. Такая терминология показывает, что необратимое выделение тепла (т.е. энергетические потери контура) происходит только в резисторе. Смысл реактивного сопротивления заключается в том, что оно просто ограничивает силу в цепи, но не влияет на тепловые потери.

Амплитуда колебаний силы тока в контуре также зависит от частоты вынуждающей ЭДС и величины активного сопротивления. Максимальные значения амплитуды достигаются при одной и той же частоте – частоте собственных гармонических колебаний  $\omega_0$  (рис. 30.4). При частоте

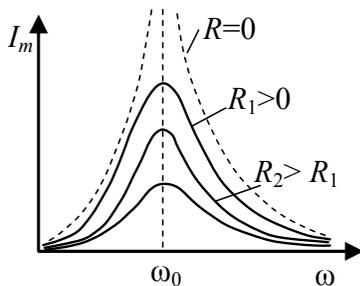


Рис. 30.4

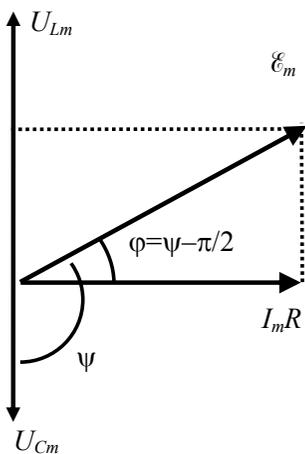


Рис. 30.5

векторы амплитуд напряжений на элементах контура (рис. 30.5). На диаграмме видно, что колебания силы тока в контуре по фазе отстают от колебаний вынуждающей ЭДС на угол  $\varphi = \psi - \pi/2$ , причем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

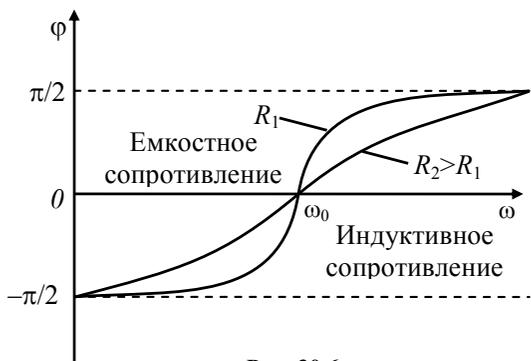


Рис. 30.6

характер, при этом колебания силы тока опережают по фазе колебания вынуждающей ЭДС.

При частоте, большей частоты собственных колебаний, реактивное сопротивление контура имеет индуктивный характер,

вынуждающей ЭДС, равной частоте собственных гармонических колебаний ( $\omega = \omega_0$ ), реактивное сопротивление контура становится равным нулю, а полное сопротивление контура при этих условиях становится равным его активному сопротивлению.

Вернемся к векторной диаграмме (см. рис. 30.2). Умножив изображенные на ней векторы на индуктивность  $L$  катушки, получим

Зависимость фазового сдвига между ЭДС и силой тока от частоты вынуждающей ЭДС приведена на рис. 30.6. При частоте, меньшей частоты собственных колебаний, реактивное сопротивление контура имеет емкостной

при этом колебания силы тока отстают по фазе от колебаний вынуждающей ЭДС. И, наконец, при частоте вынуждающей ЭДС, равной частоте собственных колебаний, сопротивление контура становится чисто активным. При этом сумма падений напряжений на конденсаторе и катушке индуктивности равна нулю. По этой причине явление резонанса в последовательном колебательном контуре называют **резонансом напряжений**.

### **Контрольные вопросы и задания**

1. Напишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и изобразите схему колебательного контура, а котором они возникают.

2. В чем заключается явление резонанса в колебательном контуре?

3. Чему равна резонансная частота колебаний заряда и напряжения на конденсаторе?

4. Чему равна резонансная частота колебаний силы тока в колебательном контуре?

5. От чего зависит фазовый сдвиг между колебаниями силы тока в контуре и вынуждающей ЭДС?

6. Нарисуйте векторную диаграмму напряжений для последовательного колебательного контура в состоянии резонанса.

## **31. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА**

Основы теории электромагнитного поля, сформулированные в работах М. Фарадея, нашли свое математическое завершение в работах Д.К. Максвелла. Развивая идеи Фарадея, он создал теорию электромагнитного поля, оформив ее в виде системы дифференциальных и интегральных уравнений (1863 г.), ввел понятие тока смещения, предсказал существование электромагнитных волн, выдвинул идею электромагнитной природы света.

В теории Максвелла решается основная задача электродинамики: определение характеристик электромагнитного поля

заданной системы электрических зарядов и токов. Эта теория явилась величайшим вкладом в развитие классической физики. Она позволила с единой точки зрения охватить огромный круг явлений, начиная с поля неподвижных зарядов и кончая электромагнитной природой света.

Максвелл не рассматривает молекулярное строение среды и внутренний механизм процессов, происходящих в среде при наличии электромагнитного поля. Он рассматривает макроскопические электромагнитные поля макроскопических зарядов и токов, т.е. таких систем зарядов, пространственные размеры которых значительно больше размеров отдельных атомов и молекул.

Уравнения Максвелла в интегральной форме выражают соотношения, которые справедливы для мысленно проведенных в электромагнитном поле неподвижных замкнутых контуров и поверхностей. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме показывают связь характеристик поля и плотностей электрических зарядов и токов в каждой точке поля. Важно, что каждое из уравнений Максвелла не только имеет определенный математический смысл, но и описывает определенный физический процесс, или постулирует важнейшие физические принципы существования материи в виде поля.

**Первое уравнение Максвелла в интегральной форме.** Согласно теории Фарадея, сущность явления электромагнитной индукции – возникновение электродвижущей силы электромагнитной индукции, обнаружить которую можно по возникновению индукционного тока в замкнутом проводящем контуре. Индукционный ток появляется в контуре при изменениях магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром. Если контур неподвижен, то изменения магнитного потока обусловлены изменением во времени магнитного поля.

Возникновение индукционного тока свидетельствует о том, что изменения магнитного поля вызывают появление в контуре сторонних сил, действующих на носители электрических зарядов. Эти сторонние силы могут быть только силами электрического поля, поскольку не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в контуре. Обозначим напряженность поля сторонних сил  $\vec{E}_{\text{стор}}$ . С одной стороны, электродвижущая сила индукции

равна циркуляции вектора  $\vec{E}_{\text{стор}}$  вдоль замкнутого контура  $L$ :

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}. \text{ С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции}$$

ной индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S},$$

где интеграл берется по произвольной поверхности, ограниченной контуром. Поскольку контур неподвижен, то операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Вектор  $\vec{B}$  зависит как от времени, так и от координат. В правой части уравнения имеется в виду производная по времени от  $\vec{B}$  в неизменной точке поверхности, поэтому в подынтегральном выражении использован символ частной производной по времени.

Из рассмотренных уравнений следует, что

$$\oint_L \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (31.1)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле обуславливает появление в пространстве электрического поля независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Наличие контура лишь позволяет обнаружить электрическое поле по возникновению индукционного тока.

Это поле  $\vec{E}_{\text{стор}}$  существенно отличается от порождаемого неподвижными зарядами поля  $\vec{E}_q$ . Электростатическое поле потенциально, его линии напряженности начинаются и заканчиваются на зарядах. Циркуляция вектора  $\vec{E}_q$  по любому контуру равна нулю. Циркуляция вектора  $\vec{E}_{\text{стор}}$  отлична от нуля, следовательно, поле  $\vec{E}_{\text{стор}}$ , как и магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности вихревого поля замкнуты.

Таким образом, в общем случае электрическое поле может быть как потенциальным, так и вихревым. Для напряженности суммарного поля остается справедливым соотношение

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (31.2)$$

Уравнение (31.2) является первым уравнением Максвелла для электромагнитного поля. Математическая формулировка этого уравнения такова: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному неподвижному замкнутому контуру равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

Обратим внимание, что это уравнение (как и все следующие) записывается в определенном порядке. Поскольку каждое уравнение связано с определенным физическим процессом, то справа от знака равенства указывается причина возникновения этого процесса, а слева – его следствие. Итак, соотношение (31.2) описывает следующий физический процесс: **изменяющееся во**

**времени магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле.**

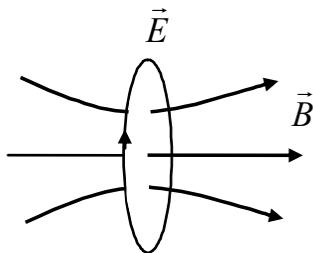


Рис. 31.1

Линии индукции магнитного поля показаны на рис. 31.1. Если модуль магнитной индукции увеличивается, то в пространстве возникает вихревое электрическое поле, силовые линии которого также показаны на рисунке.

**Ток смещения. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме.** Максвелл развил идею Фарадея о взаимозависимости электрического и магнитного полей, предположив определенную симметрию этой взаимозависимости. Если изменяющееся со временем магнитное поле порождает вихревое электрическое, то не может ли изменяющееся со временем электрическое поле порождать вихревое магнитное поле?

Рассмотрим простейший случай изменения со временем однородного электрического поля в плоском конденсаторе, площадь обкладок которого  $S$ , а поверхностная плотность заряда обкладок  $\sigma$  (рис. 31.2). Пусть в цепи существует квазистационарный электрический ток, направление которого показано на рис. 31.2. Сила тока в цепи равна производной заряда конденсатора по времени:

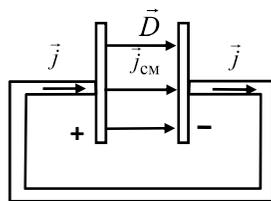


Рис. 31.2

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Движение свободных носителей заряда, т.е. ток проводимости, имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границе обкладок в линии тока, названного им **током смещения**. Плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок определяется выражением

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{S} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{dt} \left( \frac{dq}{S} \right) = \frac{d\sigma}{dt}.$$

Таким образом, плотность тока проводимости равна скорости изменения поверхностной плотности заряда на обкладках конденсатора. В свою очередь поверхностная плотность свободного заряда  $\sigma$  равна проекции вектора электрического смещения на нормаль к поверхности, поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD_n}{dt}.$$

Силовые линии электрического поля в конденсаторе перпендикулярны его обкладкам, поэтому  $D_n = D$ ; отсюда следует

$$j = \frac{dD}{dt}. \quad (31.3)$$

Слева от знака равенства записана плотность тока проводимости, справа – скорость изменения электрического смещения между обкладками конденсатора, там, где токи проводимости су-

существовать не могут. Назовем скорость изменения электрического смещения  $d\vec{D}/dt$  **плотностью тока смещения**. Придадим равенству (31.3) векторный смысл. При зарядке конденсатора его заряд возрастает, производная вектора смещения по времени положительна  $\left(\frac{d\vec{D}}{dt} > 0\right)$  и направлена также как вектор смещения. Вектор плотности тока смещения направлен в этом же направлении. Следовательно, направление вектора плотности тока смещения совпадает с направлением производной вектора электрического смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (31.4)$$

Соотношение (31.4) показывает, что линии тока смещения «продолжают» линии тока проводимости между обкладками конденсатора. Линии тока смещения «замыкают» электрическую цепь (рис. 31.2).

Таким образом, переменное во времени электрическое поле можно уподобить некоторому току, а значит, оно должно создавать магнитное поле. Эксперимент подтвердил эту гипотезу Максвелла: вокруг конденсатора было действительно обнаружено магнитное поле.

Запишем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_{i \text{ макро}}.$$

В правой части равенства записывается сумма всех макроскопических токов, существующих в системе, и сцепленных с выбранным контуром. Согласно приведенным рассуждениям в эту сумму должны войти не только токи проводимости, но и токи смещения:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j} d\vec{S} = \int (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S}.$$

Тогда с учетом (31.4) можно записать

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S} + \int \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}.$$

Если контур  $L$  неподвижен, а поле исследуется в фиксированной области пространства, в последнем слагаемом необходимо взять частную производную по времени:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S} + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (31.5)$$

Уравнение (31.5) является **вторым уравнением Максвелла** для электромагнитного поля.

Итак, токи проводимости и токи смещения эквивалентны в смысле создания ими магнитного поля. Уравнение (31.5) показывает, что циркуляция напряженности магнитного поля будет отлична от нуля и в том случае, когда выбранный контур не будет охватывать токов проводимости, а в пространстве будет существовать только переменное электрическое поле. На рисунке 31.3 показаны линии магнитной индукции магнитного поля, возникающего при условии, что электрическое смещение возрастает

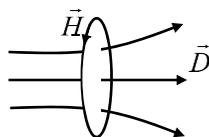


Рис. 31.3

$\left( \frac{dD}{dt} > 0 \right)$ .

Соотношение (31.5) описывает следующий физический процесс: **токи проводимости и изменяющееся во времени электрическое поле создают в пространстве вихревое магнитное поле**. Таким образом, магнитное поле может создаваться как токами проводимости, так и переменным электрическим полем.

Введение Максвеллом понятия тока смещения свело воедино теорию электрических и магнитных явлений. Оказалось, что изменяющееся со временем магнитное поле создает в пространстве вихревое электрическое поле, а изменяющееся со временем электрическое поле создает в свою очередь магнитное поле, которое всегда является вихревым. Такая совокупность взаимосвязанных электрических и магнитных полей называется **электромагнитным полем**. Электромагнитное поле описывается системой фундаментальных уравнений Максвелла для неподвижных сред.

В дополнение к двум уравнениям (31.2) и (31.5) запишем теоремы Остроградского–Гаусса для электрического и магнитного полей и представим систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{уп}} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_V \rho dV; \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{array} \right. \quad (31.6)$$

Напомним, что физический смысл двух последних уравнений системы (31.6) соответственно заключается в следующем: **1) источниками потенциального электрического поля являются неподвижные электрические заряды; 2) неподвижных источников вихревого магнитного поля («магнитных зарядов») не существует.**

Для описания свойств векторных полей широко используются понятия дивергенции и ротора векторного поля. Сравнение теорем Остроградского–Гаусса для электрического поля, записанных в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (31.7)$$

и интегральной форме

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_V \rho dV,$$

приводит к соотношению

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_V \operatorname{div} \vec{D} dV,$$

из которого следует, что **поток векторного поля через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по объему, ограниченному этой поверхностью.** В этом заключается математический смысл теоремы Остроградского, сформулированной им для любого векторного поля.

Поскольку магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю  $\left( \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \right)$ , то дивергенция вектора магнитной индукции также равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (31.8)$$

Уравнения (31.7) и (31.8) являются записью соответственно третьего и четвертого уравнений Максвелла в дифференциальной форме.

Чтобы записать в дифференциальной форме первое и второе уравнения Максвелла, введем понятие **ротора** векторного поля. Для произвольного вихревого поля, характеризуемого в каждой точке вектором  $\vec{A}$ , ротором (*вихрем*) поля называется вектор, равный максимальному значению предела отношения циркуляции поля по произвольному замкнутому контуру к площади поверхности, ограниченной этим контуром, при стремлении последней к нулю (рис. 31.4).

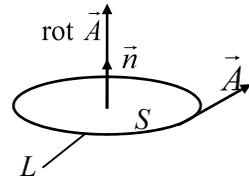


Рис. 31.4

При этом ротор вектора  $\vec{A}$  направлен в сторону единичной нормали к этой поверхности, выбранной в соответствии с направлением вектора  $\vec{A}$  по правилу правого винта. Математически это записывается следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left( \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}{S} \right) \vec{n}. \quad (31.9)$$

Отличие ротора векторного поля от нуля указывает на вихревой характер поля, т.е. на замкнутость его силовых линий.

Вернемся к первому уравнению Максвелла (31.2)

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

и приведем его к дифференциальному виду.

В математике существует теорема Стокса, согласно которой для однозначной и непрерывной векторной функции  $\vec{A}$  справедливо соотношение

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}, \quad (31.10)$$

т.е. циркуляция вектора  $\vec{A}$  по замкнутому контуру  $L$  равна потоку ротора этой функции через поверхность  $S$ , натянутую на контур  $L$ . Ориентация вектора площадки  $d\vec{S}$  должна быть согласована с ориентацией контура  $L$  по правилу правого винта.

Согласно теореме Стокса левая часть первого уравнения Максвелла равна потоку ротора вектора напряженности

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}.$$

Приравнявая правые части первого уравнения Максвелла и теоремы Стокса, имеем:

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Из равенства интегралов следует равенство подынтегральных выражений:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (31.11)$$

Уравнение (31.11) представляет собой первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Отметим, что для потенциального электростатического поля  $\oint \vec{E}_{\text{эл. ст.}} d\vec{l} = 0$  и  $\text{rot } \vec{E}_{\text{эл. ст.}} = 0$ . Равенство нулю ротора вектора напряженности является необходимым и достаточным условием того, чтобы поле являлось потенциальным.

Приведем второе уравнение Максвелла (31.5)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{\text{np}} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

к дифференциальной форме. Применяя теорему Стокса, получаем

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j}_{\text{np}} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S},$$

откуда следует, что

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (31.12)$$

Выражение (31.12) представляет собой второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Уравнения Максвелла, записанные в дифференциальной форме, включают **операторы** дивергенции и операторы ротора векторного поля. Напомним, что оператор дивергенции представляет собой сумму частных производных проекций вектора по соответствующим координатам:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Получим теперь оператор ротора векторного поля  $\vec{A}$ . Поскольку согласно формуле (31.9) ротор – векторная величина, то для его нахождения определим компоненты разложения этого вектора в декартовой системе координат:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (\operatorname{rot} \vec{A})_x \vec{i} + (\operatorname{rot} \vec{A})_y \vec{j} + (\operatorname{rot} \vec{A})_z \vec{k}. \quad (31.13)$$

Каждое из этих слагаемых – вектор, направленный по соответствующей координатной оси. Так как ротор направлен по нормали к площадке, то это означает, что соответствующие площадки для определения компонент ротора должны быть перпендикулярно координатным осям (рис. 31.5). Важно помнить, что площадки, изображенные на рис. 31.5, проходят через ту точку пространства, в которой требуется найти ротор поля.

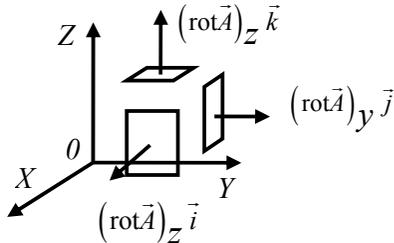


Рис. 31.5

Определим первый компонент ротора из (31.13). Для этого необходимо рассмотреть ту из трех площадок, показанных на рис. 31.5, которая перпендикулярна оси  $OX$ . Эта площадка расположена в плоскости  $ZOY$  (рис. 31.6).

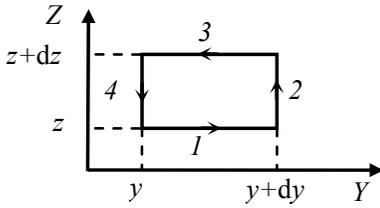


Рис. 31.6

Поскольку вектор  $|\operatorname{rot} \vec{A}|_x \vec{i}$  на этом рисунке направлен из плоскости чертежа «на нас», то направление обхода контура, ограничивающего площадку, должно быть выбрано против часовой стрелки. Тогда циркуляция вектора  $\vec{A}$  по выбранному контуру

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = A_y(z) dy + A_z(y + dy) dz + \\ + A_y(z + dz) dy(-1) + A_z(y) dz(-1),$$

где каждое из слагаемых представляет циркуляцию вектора  $\vec{A}$  по соответствующему элементу контура (они обозначены на рис. 31.6 цифрами 1, 2, 3, 4). Преобразуем полученное соотношение к виду

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = [A_z(y + dy) - A_z(y)] dz - [A_y(z + dz) - A_y(z)] dy.$$

Для получения соответствующего компонента ротора согласно (31.9) необходимо разделить это выражение на площадь, т.е. на произведение  $dzdy$ :

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_x = \frac{A_z(y + dy) - A_z(y)}{dy} - \frac{A_y(z + dz) - A_y(z)}{dz} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Аналогично можно получить две другие проекции ротора:

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (\operatorname{rot} \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

В окончательном виде оператор ротора выглядит так:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (31.14)$$

Запишем систему четырех уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \text{(I)} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \text{(II)} \\ \text{div } \vec{D} = \rho, & \text{(III)} \\ \text{div } \vec{B} = 0. & \text{(IV)} \end{array} \right. \quad (31.15)$$

Эти уравнения, называемые **полевыми**, применимы для описания всех макроскопических явлений. При рассмотрении конкретной ситуации необходимо учесть электромагнитные свойства материальных сред. Свойства среды, учитываются с помощью еще трех уравнений, которые называются **материальными**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \\ \vec{j} = \sigma \vec{E}. \end{array} \right. \quad (31.16)$$

Совокупность семи уравнений (31.15) и (31.16) образуют основу электродинамики покоящихся сред. Физический смысл уравнений Максвелла заключается в следующем. Уравнение (I) выражает закон электромагнитной индукции и указывает на изменяющееся магнитное поле как на один из возможных источников, порождающих электрическое поле. Вторым источником электрического поля являются электрические заряды. Они также порождают электрическое поле, что описывается уравнением (III), выражающим закон Кулона. Уравнение (II) выражает закон, по которому магнитное поле порождается токами проводимости и смещения, являющимися двумя возможными источниками магнитного поля. Уравнение (IV) означает, что нет магнитных зарядов, которые создавали бы магнитное поле подобно тому, как электрические заряды создают электрическое поле. Из уравнений

Максвелла следует, что, если возбудить с помощью колеблющихся зарядов переменное электрическое поле, то в окружающем заряды пространстве возникают взаимные превращения электрического и магнитного полей одного в другое. Эта **совокупность последовательно сменяющих друг друга в пространстве электрического и магнитного полей называется электромагнитным полем.**

### **Контрольные вопросы и задания**

1. Что называется «током смещения»?
2. Какой физический смысл имеют понятия «ротор» и «дивергенция»?
3. Какое поле называется электромагнитным?
4. Какой физический смысл имеет каждое из уравнений Максвелла?
5. Покажите, что в однородной среде при отсутствии сторонних токов и зарядов однородное переменное магнитное поле порождает неоднородное электрическое поле.
6. Покажите, что в однородной среде при отсутствии сторонних токов и зарядов однородное переменное электрическое поле порождает неоднородное магнитное поле.

## **32. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ИХ СВОЙСТВА**

В предыдущем разделе мы установили, что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле. Это переменное магнитное поле в свою очередь порождает электрическое поле. Если возбудить с помощью движущихся зарядов или переменного тока переменное электрическое или магнитное поле (электромагнитные колебания), то в окружающем пространстве

возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Электромагнитные колебания, распространяющиеся в пространстве, называются **электромагнитной волной**.

Вывод о существовании электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла. Из системы уравнений Максвелла получим дифференциальные уравнения, в левой и правой частях которых будут содержаться производные по времени и координатам только напряженности электрического или только напряженности магнитного поля. Эти уравнения называют **волновыми уравнениями** – их решениями являются **уравнения электромагнитной волны**. На основе анализа этих уравнений сформулируем свойства электромагнитных волн. Рассмотрим вопросы переноса энергии электромагнитной волной и особенности излучения электромагнитных волн электрическим диполем.

Ранее мы рассмотрели элементы теории электрических и механических колебаний. Были получены дифференциальные уравнения свободных, затухающих и вынужденных колебаний, а также их решения. Сравнение этих выражений показывает, что характер гармонического колебательного процесса и его причина никак не влияет на вид математического закона, описывающего отклонение колеблющейся величины от положения равновесия. Колебательные процессы в различных системах подчиняются одним и тем же закономерностям. Главное при рассмотрении колебаний – определить, что в какой-либо точке пространства происходит периодическое изменение рассматриваемой физической величины. Если отклонение параметра колебаний начинает передаваться в другие точки пространства, то говорят о возникновении волнового процесса. Следовательно, **волна** – это физический процесс распространения колебаний, т.е. передачи **волнового возмущения** из одной точки пространства в другую.

С точки зрения характера колебаний, передаваемых волной, все волновые процессы делятся на два основных класса: поперечные волны и продольные волны. Волна является **поперечной**, если колебания физической величины, переносимые волной, проис-

ходят в плоскости, перпендикулярной направлению движения волны. Примером таких механических волн может быть волна, передающая вдоль шнура его колебания в направлении, перпендикулярном оси шнура.

Волна является **продольной**, если колебания физической величины, переносимые волной, происходят в плоскости, параллельной направлению движения волны. Пример продольных механических волн – звуковая волна в упругой среде, передающая флуктуации плотности вещества. Упругие колебания частиц вещества в областях повышенной плотности вещества совершаются в направлении движения звуковой волны.

Итак, назовем **волновым возмущением**  $S$  отклонение физической величины от равновесного состояния, передающееся волной в пространстве от одной точки в другую. **Длиной волны**  $\lambda$  называется расстояние, на которое распространятся волновое возмущение за время, равное периоду колебаний  $T$ . Если волновое возмущение распространяется со скоростью  $v$ , то справедливы следующие соотношения:

$$\lambda = vT; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \lambda = \frac{2\pi v}{\omega}. \quad (32.1)$$

Среди различных точек пространства, до которых дошло волновое возмущение, всегда найдутся такие точки, колебания в которых совпадают по фазе. Геометрическое место точек, колебательный процесс в которых происходит в одной фазе, образует **волновую поверхность**.

По виду этой поверхности волны разделяют на плоские, сферические и т.д. Среди всех волновых поверхностей всегда существует самая внешняя (самая дальняя от источника волны), т.е. волновая поверхность, за которую волновое возмущение еще не распространилось. Эта волновая поверхность называется **фронтом волны**. Следовательно, волновой процесс можно представить переносом фронта волны во времени и пространстве с некоторой скоростью.

Рассмотрим плоскую волну, переносящую колебания вдоль некоторой оси  $Ox$  (рис. 32.1). Фронт такой волны представляет собой плоскость, параллельную плоскости  $zOy$ . Пусть фронт движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v$ . Допустим, что источник волны располагается в начале координат. Тогда в этой точке совершаются колебания по закону

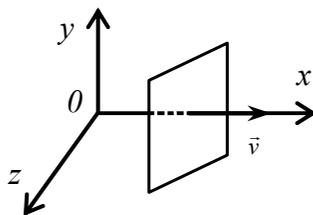


Рис. 32.1

$$S(t) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

где  $A$  – амплитуда колебаний, а  $\omega$  – их частота. В точке, отстоящей от начала координат на расстояние  $x$  вдоль оси  $Ox$ , колебания начнутся позже, чем в источнике. Задержка во времени составит  $\Delta t = \frac{x}{v}$ . Следовательно, закон колебаний в этой точке примет вид

$$S(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \alpha \right]. \quad (32.2)$$

Видно, что волновое возмущение в различных точках пространства зависит от времени, а в фиксированный момент времени различно в разных точках. Поэтому выражение (32.2) описывает не просто колебания, а волновой процесс. Соотношение (32.2) называется **уравнением плоской волны**, бегущей вдоль оси  $Ox$ . Нетрудно получить, что для волны, бегущей против оси  $Ox$ , уравнение имеет вид

$$S(x, t) = E \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + \alpha \right].$$

Выражение, служащее аргументом гармонической функции, называется **фазой волны**. Скорость распространения волнового фронта называется **фазовой скоростью волны**. Поскольку волновой

фронт – совокупность точек с постоянной фазой, то для него  $\omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha = \text{const}$ . Если фазу продифференцировать по времени, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \omega(t - \frac{x}{v}) + \alpha \right] = \omega(d t - \frac{1}{v} dx) = 0,$$

откуда  $v = \frac{dx}{dt}$ .

Преобразуем (32.2) с учетом (32.1):

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha) = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (32.3)$$

где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (32.4)$$

называется **волновым числом**.

Если сравнить соотношения  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  и  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , то можно сделать вывод, что  $\lambda$  – это «пространственный период» волны, а  $T$  – «временной период». Если частота  $\omega$  показывает число колебаний, которые совершаются за время  $2\pi$  секунд, то волновое число показывает, сколько длин волн укладывается на длине  $2\pi$  метров. Между этими параметрами волны существует следующая связь:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (32.5)$$

Из соотношения (32.3) видно, что если расстояние между двумя точками пространства равно  $\lambda$ , то фазы волны в этих точках одинаковы. Поэтому можно дать еще одно определение длины волны: это минимальное расстояние между точками, колебания в которых совершаются в одной фазе. Верно и такое определение: длина волны – это расстояние, на которое смещается волновой фронт за время, равное периоду колебаний.

Соотношение (32.3) записано для случая, когда ось  $X$  совпадает с направлением распространения волны. От этого ограничения можно освободиться с помощью волнового вектора  $\vec{k}$ , который направлен вдоль распространения волны.

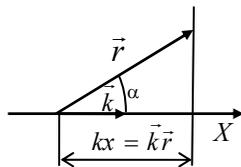


Рис. 32.2

Пусть  $\vec{r}$  – радиус-вектор некоторой точки на плоскости постоянной фазы. Очевидно,  $\vec{k}\vec{r} = kx$  (рис. 32.2) и вместо (32.3) можно записать

$$S(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

Дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение волны, называется **волновым уравнением**. Если при анализе какого-либо физического процесса мы получим уравнение, по своей форме соответствующее волновому уравнению, значит исследуемый нами физический процесс имеет волновой характер.

Рассмотрим плоскую волну, которая определяется уравнением (32.3).

Найдем первые и вторые частные производные функции  $S(x, t)$  по времени и координате:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = A k \sin(\omega t - kx + \alpha); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -A k^2 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -k^2 S;$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -A \omega \sin(\omega t - kx + \alpha); \quad \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -A \omega^2 \cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2 S.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Если учесть выражение (32.5), то можно получить

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (32.6)$$

В общем случае, если волна не плоская, а распространяется по всем направлениям прямоугольной системы координат, то уравнение (32.6) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (32.7)$$

Полученное соотношение (32.7) называется **волновым уравнением**. Его принято записывать в сокращенной форме, учитывая, что в левой части уравнения стоит оператор Лапласа:

$$\Delta S = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений Максвелла и решим ее, получив законы изменения напряженностей магнитного и электрического полей. Для простоты рассмотрим существование электрического и магнитного полей в отсутствии свободных зарядов и токов проводимости. В таком случае  $\text{div} \vec{E} = 0$  и  $\vec{j}_{\text{пр}} = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{array} \right. \quad (32.8)$$

Метод решения данной системы уравнений заключается в их объединении. Выберем четвертое уравнение системы и продифференцируем его по времени:

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right).$$

Поскольку смешанная производная не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные, то

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial t} \right).$$

Теперь в правую часть уравнения подставим  $\frac{\partial H_z}{\partial t}$  и  $\frac{\partial H_y}{\partial t}$ ,

взяв их из третьего и второго уравнений системы (32.8):

$$\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \frac{1}{\mu\mu_0} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \frac{1}{\mu\mu_0} = \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся седьмым уравнением системы (32.8) и получим

$$\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\mu_0} \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right).$$

Это уравнение можно записать таким образом:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} \Delta E_x.$$

Аналогичные уравнения можно получить и для других проекций напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \Delta E_y; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} \Delta E_z.$$

Обобщая три последних соотношения, запишем

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (32.9)$$

Аналогично можно получить

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (32.10)$$

Полученные уравнения по своему виду соответствуют волновому уравнению (32.7). А поэтому **из уравнений Максвелла следует, что электромагнитное поле, т.е. совокупность переменных электрического и магнитного полей, распространяется в пространстве в виде волны со скоростью**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (32.11)$$

Распространяющееся в пространстве электромагнитное поле называется **электромагнитной волной**. Такая волна переносит из одной точки пространства в другие колебания напряженностей электрического и магнитного полей.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, бегущую вдоль оси  $Ox$ . Следовательно, в плоскости фронта волны (она параллельна плоскости  $zOy$ ) значения напряженностей полей не зависят от координат  $y$  и  $z$ . Это означает, что часть уравнений системы (32.8) и часть слагаемых в них исчезнут. Среди производных по координатам должны остаться только те компоненты системы, которые описывают изменение напряженностей полей вдоль оси  $Ox$ . В оставшихся уравнениях остаются только производные по координате  $x$ , т.е.  $\frac{\partial}{\partial x}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \\ 0 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (32.12)$$

Выберем теперь из этой системы третье и пятое уравнения. Продифференцируем их еще раз по  $x$  и по  $t$ :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t}; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t}; \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Теперь подставим эти уравнения друг в друга:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Сравнивая эти соотношения с выражением (32.6), можно записать

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}.$$

На основании последних уравнений сделаем вывод: уравнений плоской электромагнитной волны, бегущей вдоль оси  $Ox$ , выражается системой:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_э), \\ H_z(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_м). \end{cases} \quad (32.13)$$

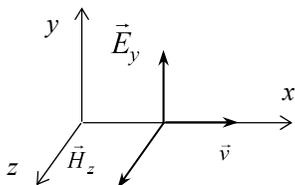


Рис. 32.3

Мы получили результат: если волна распространяется вдоль оси  $Ox$ , то напряженности электрического и магнитного полей в ней направлены по осям  $Oy$  и  $Oz$  соответственно (рис. 32.3). Если при выводе системы уравнений плоской волны из системы (32.12) воспользоваться вторым и шестым уравнениями, то получим

$$\begin{cases} E_z(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_э), \\ H_y(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_м). \end{cases}$$

В любом случае мы получаем, что **колебания векторов напряженностей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т.е. перпендикулярной скорости волны.** Следовательно, электромагнитная волна является поперечной.

Рассмотрим первое, четвертое, седьмое и восьмое уравнения системы (32.12). Проанализируем выводы, которые можно получить с их помощью.

Из первого и восьмого уравнений получаем:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

Это означает, что если существует компонента напряженности магнитного поля, направленная по оси  $Ox$ , то она не изменяется во времени и по координате  $x$ :

$$H_x = \text{const}(x, t).$$

Из четвертого и седьмого уравнений получаем:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

Это означает, что если существует компонента напряженности электрического поля, направленная по оси  $Ox$ , то она не изменяется во времени и по координате  $x$ :

$$E_x = \text{const}(x, t).$$

Итак, уравнения Максвелла допускают суперпозицию плоской электромагнитной волны и стационарных электрических и магнитных полей.

В случае, если такие поля отсутствуют, т.е.  $H_x = E_x = 0$ , то взаимное расположение векторов  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{v}$  в некоторый момент времени изображено на рис. 32.3. Видно, что выполняется следующее соотношение:

$$\vec{v} = v \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{EH}. \quad (32.14)$$

Проанализируем выражение (32.11), которое мы получили для скорости электромагнитной волны:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}.$$

Поскольку  $\epsilon$  и  $\mu$  – безразмерные величины, то размерность скорости волны определится так:

$$[v] = \frac{1}{\sqrt{[\epsilon_0 \mu_0]}}.$$

Ранее мы указывали, что  $[\epsilon_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$  и  $[\mu_0] = \text{Н} \cdot \text{А}^{-2}$ .

Это означает, что  $[\epsilon_0 \mu_0] = \text{Кл}^2 \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$ . Если учесть, что  $\text{Кл} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{c}$ , то после преобразований получим

$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Таким образом, выражение (32.11) действительно соответствует скорости. Более того, если вычислить значение скорости электромагнитной волны в вакууме ( $\varepsilon = 1, \mu = 1$ ), то

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Полученное выражение строго совпадает с экспериментально измеренной скоростью распространения света в вакууме. Следовательно, скорость света в вакууме определяется как

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (32.15)$$

Таким образом, уравнения Максвелла предсказали электромагнитную природу света. В любой среде, отличной от вакуума по своим электрическим и магнитным свойствам, т.е. если  $\varepsilon \neq 1$  или  $\mu \neq 1$ , электромагнитная волна распространяется со скоростью, меньшей чем в вакууме в  $n$  раз:

$$v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad (32.16)$$

где величина  $n$  – показатель преломления среды.

Уравнения Максвелла показывают взаимозависимость электрического и магнитного полей, которые возбуждают друг друга в электромагнитной волне. Возникает вопрос: как связаны между собой амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей? Кроме того, получив соотношение (32.13), мы доказали, что электрическое и магнитное поле в волне изменяются с одинаковыми частотами, а также с одинаковыми «пространственными периодами»  $\lambda$ . Необходимо рассмотреть связь: каково отличие фаз электрической и магнитной составляющей электромагнитной волны? Объединим выражения (32.13) и пятое уравнение системы (32.12) в одну систему:

$$\begin{cases} E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_e), \\ H_z(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_m), \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{cases}$$

Подставим первое и второе уравнения в третье:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_3), \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -H_0 k \sin(\omega t - kx + \alpha_M),$$

$$H_0 k \sin(\omega t - kx + \alpha_M) = \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx + \alpha_3). \quad (32.17)$$

Соотношение (32.17) будет выполняться только, если  $\alpha_M = \alpha_3$  (откуда следует, что фазы колебаний электрической и магнитной компонент волны совпадают), а, кроме того, если  $H_0 k = \varepsilon \varepsilon_0 E_0 \omega$ .

Воспользуемся теперь выражениями (32.5) и (32.11):

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_0 = H_0 \frac{k}{\omega} = H_0 \frac{1}{v} = H_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде:

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E_0 = H_0 \sqrt{\mu \mu_0}. \quad (32.18)$$

Графически изобразить наблюдаемые колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  можно, если зафиксировать их направления и модули в различных точках пространства в некоторый момент времени (см. рис. 32.4).

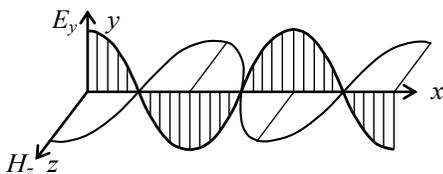


Рис. 32.4

Электромагнитная волна переносит энергию. Для описания процесса переноса энергии вводится векторная величина, называемая **плотностью потока энергии**. Он численно равен энергии, переносимой в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса энергии.

Плотность энергии электромагнитного поля  $w$  складывается из плотности энергии электрического и плотности энергии магнитного полей:

$$w = w_3 + w_M = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}. \quad (32.19)$$

Учитывая, что в данной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в одной фазе, соотношение между амплитудными значениями определяется равенством (32.18), что справедливо и для мгновенных значений:

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}. \quad (32.20)$$

Поэтому формулу (32.19) можно переписать:

$$w = 2w_3 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2.$$

Воспользовавшись соотношением (32.20), выражению для плотности энергии электромагнитной волны можно придать вид

$$w = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} EH. \quad (32.21)$$

Рассмотрим перенос энергии через площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  (рис. 32.5). За время  $\Delta t$  через площадку осуществляется перенос энергии, заключенной в

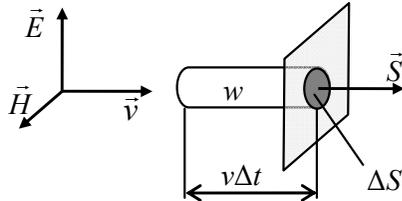


Рис. 32.5

объеме цилиндра с площадью основания  $\Delta S$  и длиной  $v\Delta t$ :  $W = w\Delta S v\Delta t$ . Подставив в последнее выражение формулу для объемной плотности энергии (32.21), и учитывая (32.11), имеем:

$$W = \Delta S \Delta t EH. \quad (32.22)$$

Разделив левую и правую части соотношения (32.22) на  $\Delta S \Delta t$ , получим выражение для плотности потока энергии, которую обозначим символом  $S$ :  $S = EH$ .

**Плотность потока энергии** – это векторная величина, численно равная энергии, переносимой электромагнитной волной через единицу площади поверхности за единицу времени. Учитывая, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  образуют правовинтовую систему, вектор плотности потока энергии  $\vec{S}$  представим в виде векторного произведения

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (32.23)$$

Вектор  $\vec{S}$  называется **вектором Пойнтинга**.

### Контрольные вопросы и задания

1. Напишите уравнение плоской электромагнитной волны.
2. Что называется фазой электромагнитной волны, что она характеризует?
3. Сформулируйте основные свойства электромагнитных волн.
4. Объясните физический смысл вектора Пойнтинга.