

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

---

# КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

*Под редакцией Д.А. Иванова*

Москва  
Издательство МЭИ  
2021

УДК 53  
ББК 22.3  
К 937

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»  
в качестве учебного издания*

Рецензенты: О.С. Еркович, канд. физ.-мат. наук, доц. каф.  
физики МГТУ им. Н.Э. Баумана;  
В.С. Булыгин, канд. техн. наук, проф. каф.  
общей физики МФТИ

**Авторы:** М.К. Губкин, А.В. Дедов, Д.А. Иванов,  
И.В. Иванова, В.В. Манухин, В.С. Спивак

К 937 Курс общей физики: учеб. пособие / М.К. Губкин, А.В. Дедов, Д.А. Иванов и др.; под ред. Д.А. Иванова. – М.: Издательство МЭИ, 2021. – 512 с.

ISBN 978-5-7046-2429-5

В пособии изложено развернутое и расширенное содержание лекций, которые читаются по курсу общей физики в НИУ «МЭИ».

Для аудиторных и самостоятельных занятий студентов младших курсов, а также для самостоятельных занятий студентов, обучающихся по дистанционной форме. Может быть полезно преподавателям при подготовке к проведению лекционных и практических занятий.

**УДК 53  
ББК 22.3**

ISBN 978-5-7046-2429-5

© Национальный исследовательский университет «МЭИ», 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	7
Введение .....	8
Часть I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА .....	11
1. Кинематика поступательного движения материальной точки... ..	11
2. Динамика поступательного движения твердого тела.....	22
3. Работа и энергия в механике поступательного движения... ..	33
4. Кинематика и динамика вращательного движения твердого тела .....	44
5. Работа по вращению тела и кинетическая энергия вращения... ..	57
6. Собственные свободные и затухающие механические колебания .....	65
7. Вынужденные механические колебания. Резонанс.....	75
8. Элементы специальной теории относительности.....	79
9. Основные понятия молекулярной физики макросистем. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.....	93
10. Элементы статистической физики.....	104
11. Первое начало термодинамики.....	115
12. Понятие теплоемкости. Применение первого начала тер- модинамики для идеального газа .....	119
13. Тепловые машины. Цикл Карно.....	128
14. Второе начало термодинамики. Энтропия.....	133
15. Явления переноса в газах .....	138
16. Реальные газы.....	150
Часть II. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.....	161
17. Электростатическое поле в вакууме. Напряженность поля.....	161
18. Работа сил электростатического поля. Разность потенци- алов. Потенциал.....	170
19. Теорема Остроградского–Гаусса для электростатического поля в вакууме .....	176
20. Электрическое поле в диэлектриках.....	188
21. Проводники в электростатическом поле. Энергия элект- ростатического поля .....	203
22. Постоянный электрический ток.....	219
23. Магнитное поле постоянного тока. Магнитная индукция и способы ее расчета .....	232
24. Действие магнитного поля на движущийся заряд и про- водник с током .....	249
25. Электромагнитная индукция .....	263

26. Явления самоиндукции и взаимной индукции. Энергия магнитного поля .....	272
27. Магнитное поле в веществе. Напряженность магнитного поля.....	281
28. Диа-, пара- и ферромагнетики .....	289
29. Собственные свободные и затухающие электромагнитные колебания в контуре.....	302
30. Вынужденные электромагнитные колебания в контуре. Резонанс напряжений .....	311
31. Уравнения Максвелла .....	317
32. Электромагнитные волны и их свойства.....	330
<b>Часть III. ОПТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ.....</b>	<b>345</b>
33. Интерференция.....	345
34. Полосы равной толщины и полосы равного наклона.....	355
35. Дифракция Френеля.....	361
36. Дифракция Фраунгофера.....	374
37. Дифракционная решетка.....	382
38. Поляризация .....	393
39. Оптическая анизотропия.....	403
40. Интерференция поляризованного света .....	414
41. Дисперсия и поглощение света .....	422
42. Распространение сигналов в среде с дисперсией.....	433
43. Тепловое излучение.....	444
44. Квантовые свойства света.....	456
45. Волны де Бройля .....	465
46. Квантовая механика.....	476
47. Бозоны и фермионы .....	487
48. Ядерная физика .....	498
Физические константы.....	509
Список рекомендуемой литературы.....	510

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой второе издание «Курса общей физики», разработанного на кафедре общей физики и ядерного синтеза (ОФиЯС) Национального исследовательского университета «МЭИ». Изучаемый материал представлен в книге в виде 48 разделов, скомпонованных в соответствии с действующей программой курса общей физики для технических университетов и охватывающих все основные темы этой программы. Изложение теоретического материала дополнено множеством примеров, иллюстрирующих основные физические законы, соотношения и правила, используемые для описания физических явлений. Некоторые из этих примеров и задач входили в ранее изданные издательством МЭИ учебные пособия и задачки по отдельным разделам курса общей физики. Каждый раздел завершается списком контрольных вопросов, поиск ответов на которые поможет студенту глубже усвоить изучаемый материал.

Книга рассчитана в первую очередь на студентов 1–2 курсов и может быть широко использована для самостоятельной работы.

Предыдущее издание «Курса общей физики» вышло в свет в 2010 г. Настоящее издание существенно переработано и дополнено с учетом 40-летнего опыта преподавания физики на кафедре ОФиЯС. Названия изучаемых тем и разделов максимально соответствуют программе проведения лекционных и практических занятий по курсу. Существенно переработано содержание теоретического материала, уточнены формулировки законов, определения и обозначения физических величин. Приведены новые примеры решения задач.

Издание может оказаться полезным не только студентам энергетических вузов, но и других учебных заведений и технических университетов. Обсуждение содержания всех разделов сборника задач на методических семинарах кафедры помогло сформировать комплексный и логически непротиворечивый целостный подход к изложению курса общей физики на таком уровне подачи материала, который выделяет главные, фундаментальные основы физических явлений и законов, описывающих эти явления, и способствует наилучшему закреплению полученных знаний.

*Авторы*

## ВВЕДЕНИЕ

Физика – одна из основных фундаментальных наук, составляющих основу теоретической подготовки инженеров. Кроме того, физика играет роль базы, без которой невозможна успешная деятельность инженера в любой области современной техники. На протяжении последних трех столетий развитие техники неразрывно связано с физической наукой, которая научно обосновывала принципиально новые направления в технике. Фундаментальные законы, лежащие в основе физической науки, являются общими для описания всех наблюдаемых в природе и технике физических явлений.

С одной стороны, одна из важнейших задач курса общей физики состоит в формировании у студентов представлений о современной физической картине мира. С другой стороны, физика явилась научным фундаментом, на котором выросли такие новые области техники, как электро- и радиотехника, космическая техника и приборостроение, электронная и вычислительная техника, теплоэнергетика и ядерная энергетика. С третьей стороны, именно технические потребности общества создали предпосылки для развития отдельных областей физической науки: механики, термодинамики, оптики.

Важность и необходимость изучения курса общей физики в техническом университете можно определить следующим образом:

1) изучение курса важно для формирования представлений о явлениях и процессах, происходящих в природе, т.е. для выработки научного мировоззрения;

2) физика является базовой дисциплиной для большинства общеинженерных и специализирующих дисциплин;

3) развитие любой отрасли современного производства неразрывно переплетается с физикой, поэтому инженер любого профиля должен владеть физикой в такой степени, чтобы быть в состоянии активно и со знанием дела применять достижения научно-технического прогресса в своей деятельности.

Программа курса общей физики в технических университетах соответствует тем целям и задачам, которые возникли в современном инженерном образовании в связи с развитием совре-

менной техники. В результате изучения курса общей физики студент должен научиться постановке и выбору алгоритмов решения конкретных задач из различных физических областей, приобрести начальные навыки для самостоятельного овладения новыми методами и теориями, необходимыми в практической деятельности современного специалиста. Знания, умения и навыки, полученные при успешном освоении курса общей физики, являются основой и базой для последующего изучения теоретической механики, динамики и прочности машин, прикладной механики, электротехники и электроники, технической термодинамики, теории тепло- и массообмена, механики жидкости и газа. Безусловно, подготовка современного грамотного специалиста в области теплоэнергетики и теплотехники, обладающего необходимыми компетенциями в сфере своей профессиональной деятельности, невозможна без успешного освоения курса общей физики.

В современных условиях техническое образование должно рассматриваться не только и не столько как овладение необходимым объемом учебной информации, а как развитие у студентов в процессе обучения потребностей и способностей к самостоятельному получению новых общих и профессиональных знаний и умений при использовании многообразных источников информации.

Кафедра общей физики и ядерного синтеза Национального исследовательского университета «МЭИ» ведет преподавание курса общей физики более 40 лет. За это время на кафедре сложилась устойчивая научно-методическая система преподавания дисциплины и накоплен большой опыт организации лекционных, практических и лабораторных занятий. Для методического сопровождения учебного процесса на кафедре разработан и успешно используется учебно-методический комплекс по курсу общей физики для студентов, обучающихся по образовательным программам в области энергетики. Основу комплекса составляют учебные пособия, посвященные изучению теоретических основ дисциплины, выполнению лабораторного практикума и получению практических навыков по решению задач.

Предлагаемый «Курс общей физики» – составной элемент учебно-методического комплекса, во многом рассчитанный на самостоятельную работу. Цель пособия – помочь студенту в глу-

боком усвоении основных положений курса общей физики. Как показывает практика, большие трудности в правильном усвоении многих разделов курса общей физики возникают не из-за сложности в понимании дисциплины «физика» как таковой, а в следствие отсутствия навыков самостоятельного анализа изучаемых явлений, исходя из их комплексного рассмотрения.

Предлагаемая книга состоит из 48 разделов, посвященных рассмотрению физических законов, явлений и процессов, которые входят в программу изучения трех основных частей курса общей физики: «Механика. Молекулярная физика и термодинамика», «Электричество и магнетизм», «Оптика и элементы квантовой физики».

В каждом разделе авторы стремились дать последовательное изложение основных положений теории, опираясь на которые обучающийся сможет научиться отвечать на вопросы, связанные с пониманием и объяснением явлений окружающего мира, и решать основные типы задач по физике. Примеры и задачи с решениями, приводимые одновременно с изложением теоретических основ, позволят обучающемуся обратить внимание на важнейшие аспекты этого материала, в том числе на факты и соотношения, которые при первом чтении понимаются недостаточно глубоко. Приводимые в каждом разделе контрольные вопросы необходимы для усвоения и понимания изученного материала. Основной своей задачей авторы считали такое изложение курса общей физики, которое вызывает минимальные трудности при самостоятельной работе студента.

## ОПТИКА И ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

### 33. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

**Сложение колебаний.** Если необходимо определить сумму нескольких гармонических колебаний, происходящих с одинаковой циклической частотой  $\omega$ , причем каждое последующее слагаемое суммы имеет фазовый сдвиг  $\varphi_0$  относительно предыдущего:

$$S = \sum_{i=1}^N A \cos[\omega t + (i-1)\varphi_0],$$

то удобно воспользоваться **методом векторных диаграмм**. Суть этого метода проста и заключается в следующем: **проекция** суммарного вектора на произвольную ось равна сумме проекций на эту ось всех векторов – слагаемых. Колеблующуюся величину можно представить **вектором**, длина которого равна **амплитуде** колебания, а угол между вектором и выбранной осью  $x$  – **фазе** колебания (см. рис. 33.1). В этом случае результирующее колебание найдем, сложив сначала векторы, представляющие колебания-слагаемые, определив амплитуду – модуль суммарного колебания и фазу – угол между вектором суммарного колебания и выбранной осью  $x$ .

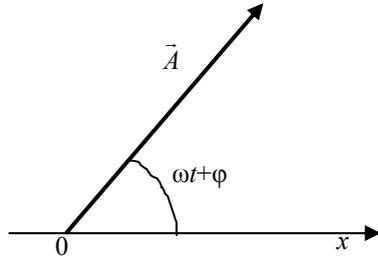


Рис. 33.1

Покажем на рисунке векторную диаграмму сложения трех колеблющихся величин:

$$S = A \cos \omega t + A \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\omega t + 2\varphi_0).$$

Изобразим на рисунке векторы  $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ , представляющие слагаемые суммы (рис. 33.2).

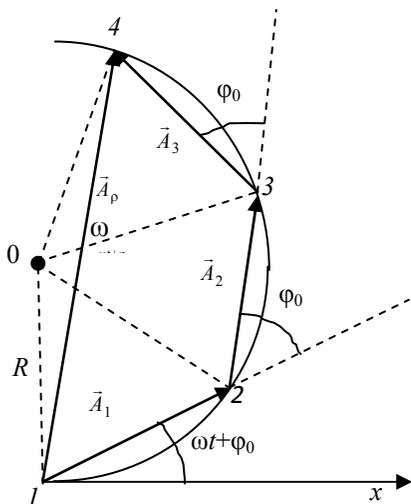


Рис. 33.2

Сложение векторов выполним по правилу треугольника. Обозначив радиус окружности, проходящей через точки 1, 2, 3 и 4 как  $R$ , получим из треугольников 012 и 014 формулы:

$$\frac{A}{R} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \text{ и } \frac{A_p}{R} = \sin \frac{3\varphi_0}{2}.$$

Из рисунка видно, что вектор  $\vec{A}_p$ , определяющий **резльтирующее** колебание  $S$ , образует с осью абсцисс угол  $\psi$ , равный:

$$\psi = \frac{N-1}{2} \varphi_0 = \varphi_0$$

(у нас число колебаний  $N=3$ ). Результат сложения позволяет определить результирующее колебание  $S$  формулой:

$$S = A \frac{\sin \frac{3\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \cos \left( \omega t + \frac{2\varphi_0}{2} \right).$$

Обобщая полученный результат на случай, когда число складываемых колебаний равно  $N$ , приходим к формуле:

$$S = \sum_{i=1}^N A \cos[\omega t + (i-1)\varphi_0] = A \frac{\sin \frac{N\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \cos \left( \omega t + \frac{N-1}{2} \varphi_0 \right).$$

Здесь множитель  $A \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} \right|$  является **амплитудой** резуль-

тирующего колебания, а выражение  $\left( \omega t + \frac{N-1}{2} \varphi_0 \right)$  представляет его **фазу**.

Представляет интерес случай, когда складываются **два** колебания одинаковой частоты и равной амплитуды. В этом случае амплитуда результирующего колебания равна  $2A \cdot \left| \cos \frac{\varphi_0}{2} \right|$ , и можно сделать вывод: при условии  $\varphi_0 = 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) происходит максимальное **усиление** складываемых колебаний (результатирующее колебание имеет двойную амплитуду и учетверенную интенсивность по сравнению с каждым из складываемых колебаний); если выполнено условие  $\varphi_0 = \pi(2n - 1)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то амплитуда результирующего колебания равна нулю, т.е. происходит полное **гашение** одного колебания другим. Зависимость результирующей амплитуды и интенсивности от угла  $\varphi_0$  показана на рис. 33.3.

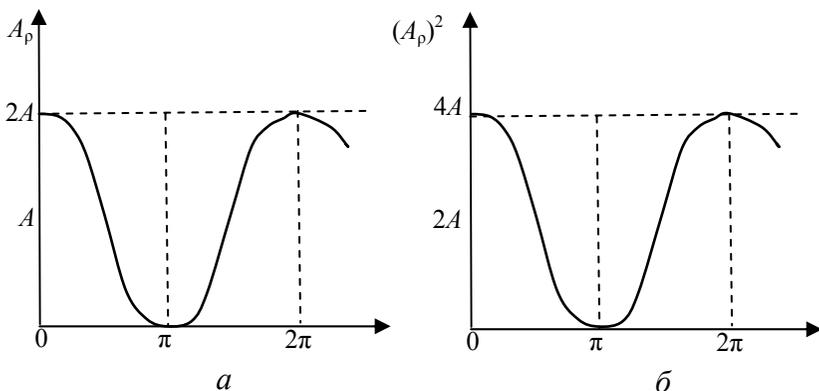


Рис. 33.3

**Когерентность.** Когерентностью называется **согласованное** протекание волновых или колебательных процессов. Две волны будут когерентными, если в любой точке пространства встречи волн **частоты** соответствующих колебаний будут **одинаковыми**, а **разность фаз** этих колебаний **не будет зависеть от времени**. В частности, две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль оси  $x$  и описываемые уравнениями

$$E_1 = A \cos(\omega t - kx),$$

$$E_2 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

будут когерентными.

**Интерференция.** **Интерференцией** называют явление **наложения** нескольких когерентных волн, в результате которого электромагнитные колебания в одних точках усиливаются, а в других точках ослабляются. Картина чередования светлых и темных участков на некоторой поверхности называется **интерференционной**. Интерференционная картина может быть расположена как в районе самой системы, создающей когерентные волны, так и удалена от этой системы очень далеко.

Что необходимо для наблюдения интерференции? Ответ прост: два независимых источника когерентных волн. Однако в природе таких источников не существует. Более того, излучение каждого источника представляет собой огромное число несогласованных актов: каждый возбужденный атом, переходя в состояние с меньшей энергией, излучает за время  $\Delta t \sim 10^{-8}$  с т.н. **волновой цуг** (группу элементарных волн) пространственной протяженностью около трех метров. В дальнейшем излученный атомом волновой цуг получил название **светового кванта – фотона**. Два фотона, излученные атомами-соседями в принципе не являются когерентными друг с другом.

Великая идея интерференции, принадлежащая Френелю, заключена в следующем: с помощью той или иной **схемы** «разделить» каждый волновой цуг на две (может быть, неравные) «половинки» и затем предоставить им возможность встречи на экране. Таких схем существует несколько: это схема Юнга, бипризмы Френеля, схема Ньютона, стеклянная пластинка и клин. О них речь пойдет несколько дальше.

**Разность хода.** Перейдем к расчету интерференционной картины от **двух** когерентных источников – светящихся нитей  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 33.4). В точку  $D$  экрана с координатой  $x$  приходят две когерентные волны, поэтому результирующее колебание дается формулой:

$$E_p = A \cos(\omega t - kl_1) + A \cos(\omega t - kl_2).$$

Чтобы воспользоваться результатом предыдущих рассуждений, введем обозначение

$$\delta \equiv |l_1 - l_2|,$$

где величину  $\delta$  назовем **геометрической разностью хода** интерферирующих волн. В этом случае разность фаз колебаний в точке  $x$  будет равна

$$\varphi_0 = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta,$$

а координаты точек максимумов и минимумов интерференционной картины на экране дадут условия  $\varphi_0 = 2\pi n$  (максимумы) и  $\varphi_0 = \pi(2n - 1)$  (минимумы). На рисунке 33.4. Запишем для треугольников  $S_1DB$  и  $S_2AD$  теорему Пифагора:

$$l_1^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b^2;$$

$$l_2^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2.$$

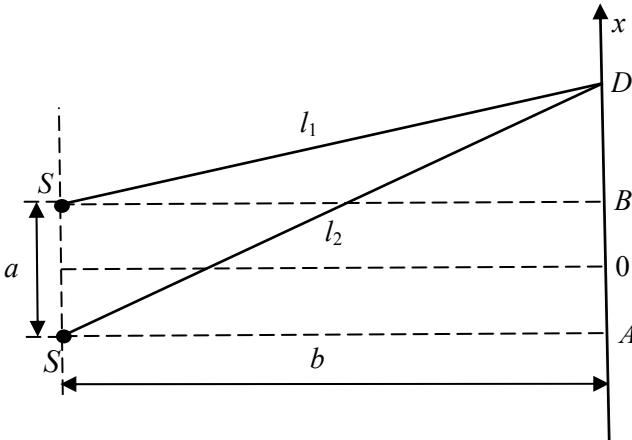


Рис. 33.4

С учетом условий проведения опыта ( $b \gg a \gg x$ ), почленное вычитание равенств даст формулу:

$$(l_1^2 - l_2^2) = (l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = \delta \cdot 2b = 2ax.$$

Следовательно,  $\delta = \frac{ax}{b}$ . Подставляя в условие интерференционных максимумов и минимумов, получим формулы:

1) максимумы:  $\delta = n\lambda$  и  $x_n = \frac{b\lambda}{a} \cdot n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ );

2) минимумы:  $\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$  и  $x_n = \frac{b\lambda}{a} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Здесь мы указали как условия образования интерференционных максимумов и минимумов, так и координаты светлых и темных полосок на экране.

Как известно, **показатель преломления** прозрачной среды равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в этой среде:

$$n = \frac{c_0}{c}.$$

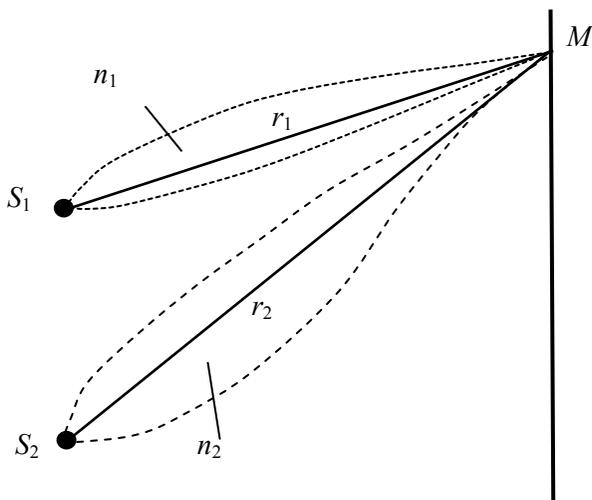


Рис. 33.5

Это обстоятельство приводит к тому, что волна движется в среде **медленнее**, чем в вакууме, и между интерферирующими волнами возникает **дополнительное запаздывание**, связанное с этим явлением. **Оптическим путем**  $S_{\text{опт}}$  называют произведение длины обычного пути луча на показатель преломления среды (см. рис. 33.5):

$$S_{\text{опт}} = nS.$$

С учетом этого, условия интерференционных максимумов и минимумов приобретают вид:

$$\delta_{\text{опт}} = n\lambda, (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ (max) и}$$

$$\delta_{\text{опт}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ (min)}.$$

Здесь  $\delta_{\text{опт}}$  – оптическая разность хода волн, равная  $\delta_{\text{опт}} = |S_{\text{опт}2} - S_{\text{опт}1}|$ .

Важную роль в рассмотрении явления интерференции играет так называемая «**потеря полуволны**» при отражении света от границы двух прозрачных сред. Если свет падает из среды с меньшим показателем преломления  $n_1$  на границу среды с большим показателем преломления  $n_2$ , то отраженный луч мгновенно изменяет фазу на  $\pi$ , что эквивалентно дополнительному оптическому пути, равному половине длины волны.

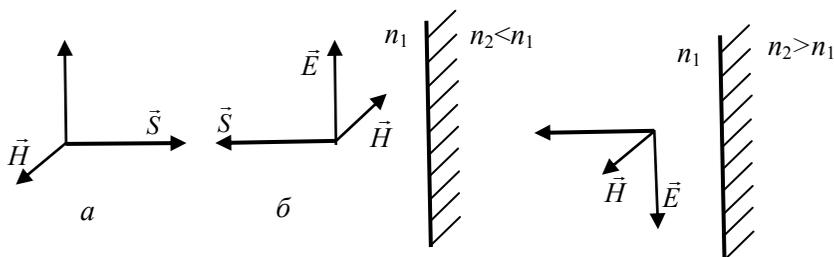


Рис. 33.6

Среду с большим показателем преломления называют **оптически более плотной**. Поясним сказанное рис. 33.6. **Вектор Пойнтинга**  $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$  направлен в сторону переноса волновой энергии. Поскольку направление этого вектора в падающей и отраженной волнах противоположны, из свойства векторного произведения следует, что **один** из векторов-сомножителей  $\vec{E}, \vec{H}$  при отражении должен изменить направление на **противоположное**.

Оказывается, что при отражении от **оптически более плотной** среды изменяет направление на **противоположное** вектор  $\vec{E}$ , а в противном случае происходит изменение направления вектора  $\vec{H}$ . Физиологически **человеческий глаз** устроен так, что видимый им свет связан с **напряженностью**  $\vec{E}$  электромагнитного поля волны. Далее в конкретных интерференционных схемах с явлением «потери полуволны» мы еще встретимся.

**Интерференционные схемы.** Каждая **интерференционная схема**, образно говоря, раздваивает излучение на два когерентных пучка, идущих от двух мнимых, но **когерентных** источников волн. Приведем несколько примеров интерференционных схем.

**Пример 1.** Два зеркала, образующих друг с другом угол, близкий к  $180^\circ$  (рис. 33.7), называются **бизеркалами Френеля**. Интерферирующие друг с другом лучи, отраженные от зеркал, когерентны. Все происходит так, будто есть два источника когерентных волн, расположенных симметрично источнику  $S$  относительно зеркал (мнимые источники  $S'$  и  $S''$ ).

**Пример 2.** Сделанная из одной заготовки стекла **бипризма Френеля** (рис. 33.8) имеет очень маленькие преломляющие углы  $\theta$ . Призмы преобразуют лучи от источника  $S$  так, что на экран приходят когерентные излучения, будто бы посланные когерентными источниками  $S'$  и  $S''$ .

**Пример 3.** В **схеме Юнга** (рис. 33.9) источник света (длинная нить  $S$ ) посылает излучение на экран, в котором есть две длинные узкие щели. Эти щели  $S'$  и  $S''$  можно рассматривать как два самостоятельных источника когерентных волн.

**Пример 4.** **Схема Ллойда** (рис. 33.10) позволяет наблюдать интерференцию лучей, попавших от источника  $S$  на экран напрямую с лучами, отраженными от зеркала и пришедшими на экран. Отметим «потерю полуволны» лучом 2. Именно поэтому граница экрана с зеркалом будет темной – на ней расположен интерференционный минимум.

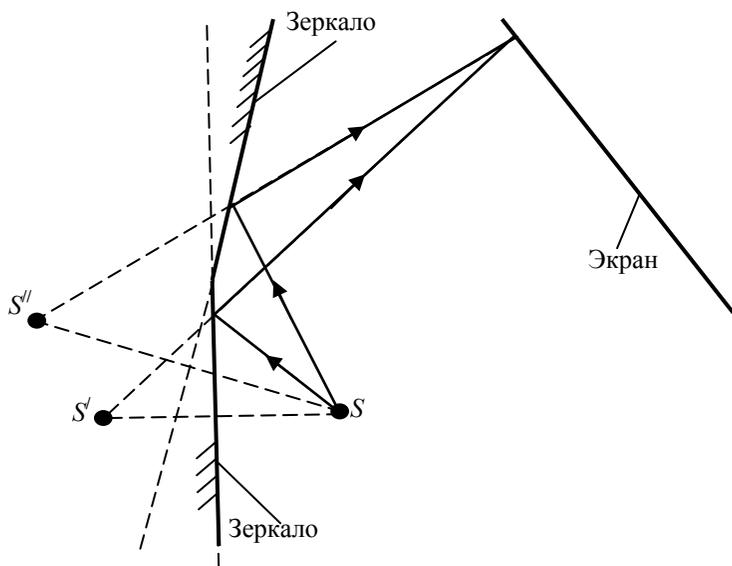


Рис. 33.7

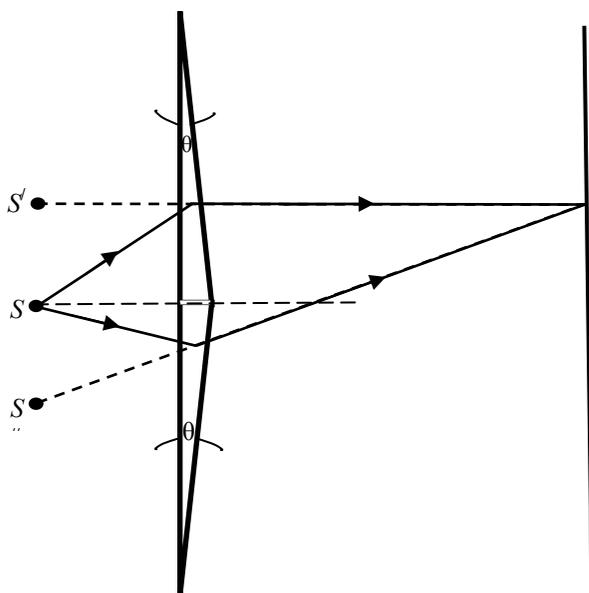


Рис. 33.8

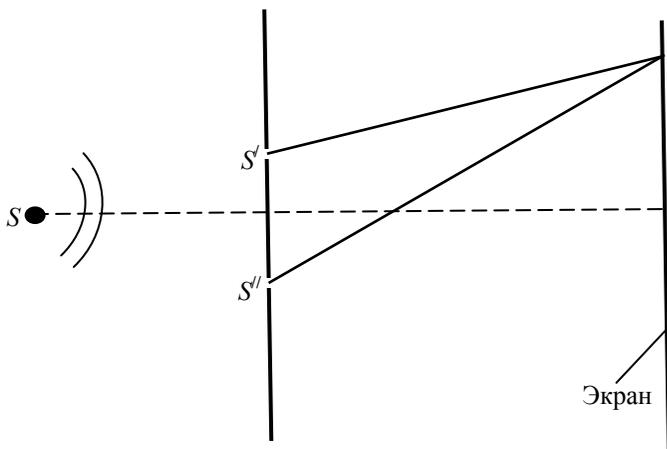


Рис. 33.9

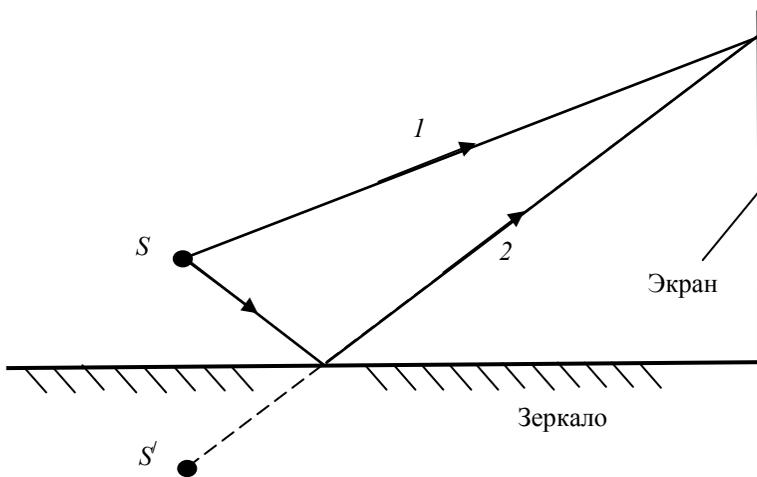


Рис. 33.10

## Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит метод векторных диаграмм?
2. Какие волны называются когерентными?
3. Какое физическое явление называется интерференцией?
4. Что такое волновой цуг?
5. Каким образом удастся наблюдать интерференцию когерентных волн, если таких волн нет в природе?
6. Чем отличается оптическая разность хода от геометрической?
7. Сформулируйте условия максимума и минимума для интерференции двух когерентных волн.
8. С чем связана «потеря полуволны» при отражении от оптически более плотной среды?
9. Что такое «интерференционные схемы»?
10. Нарисуйте ход лучей в известных вам интерференционных схемах.

## 34. ПОЛОСЫ РАВНОЙ ТОЛЩИНЫ И ПОЛОСЫ РАВНОГО НАКЛОНА

Рассмотрим **стеклянный клин** с углом при вершине  $\varphi$ , на поверхность которого нормально падает монохроматическая электромагнитная волна, длина которой равна  $\lambda$ . Угол клина  $\varphi$  для наблюдения интерференции необходимо взять очень малым (длина волны видимого света лежит в пределах от 0,4 мкм до 0,8 мкм), в противном случае полосы на поверхности клина будут малоразличимы. Обратимся к рисунку 34.1. Оптическая разность хода лучей 1 (отраженного от нижней поверхности клина) и 2 (отраженного от верхней грани клина) будет равна

$$\delta_{\text{опт}} = 2x\varphi - \frac{\lambda}{2}.$$

Здесь мы учли «потерю полуволны» лучом 2 при отражении от стекла. Следовательно, условия максимумов и минимумов приобретут вид

$$\text{max: } \delta_{\text{опт}} = n\lambda \text{ и } x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2\varphi}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{min: } \delta_{\text{опт}} = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda \text{ и } x_m = \frac{m\lambda}{2\varphi}, \text{ где } m = 1, 2, 3 \dots$$

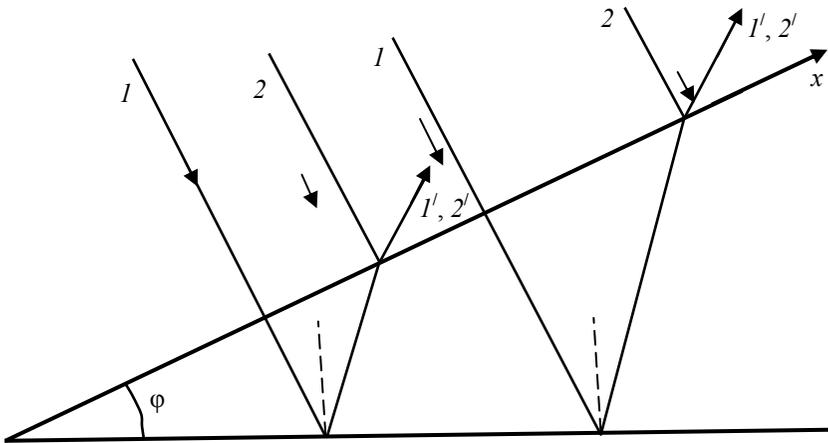


Рис. 34.1

Из этих формул следует, что сама интерференционная картина расположена практически на верхней поверхности клина, а сам угол клина (точка с координатой  $x=0$ ) в отраженном свете будет казаться темным. Наблюдаемые на поверхности клина интерференционные полосы называются **полосами равной толщины**.

**Полосы равной толщины.** Установка «Кольца Ньютона» показана на рис. 34.2. Монохроматический свет падает на плоскую поверхность **линзы** радиусом  $R$  вертикально вниз, а интерференционная картина (чередование темных и светлых колец), расположенная практически на нижней поверхности линзы, наблюдается в отраженном свете с помощью микроскопа.

Определим разность хода интерферирующих лучей – луча  $1$ , отраженного от стеклянной пластинки, и луча  $2$ , отраженного от границы стеклянной сферы с воздухом, в точке их встречи. Оптическая разность хода этих лучей равна

$$\delta_{\text{опт}} = 2d - \frac{\lambda}{2}.$$

Применяя теорему Пифагора

$$R^2 = (R-d)^2 + r^2,$$

получим (пренебрегая малым слагаемым  $d^2$ ) выражение:

$$r^2 = 2Rd.$$

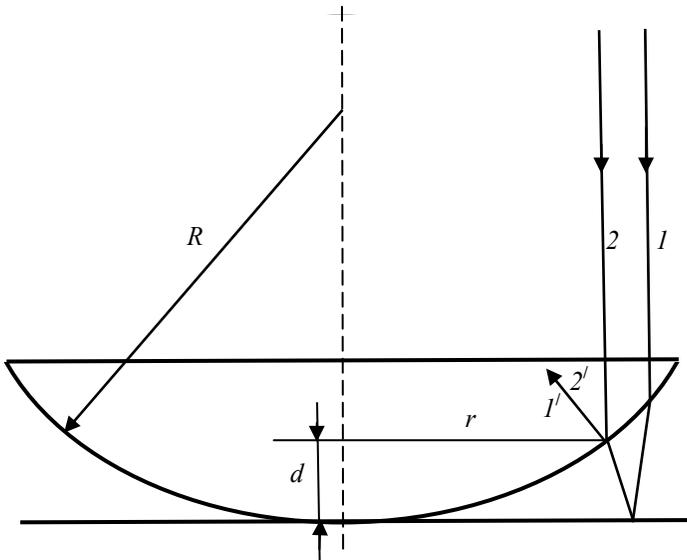


Рис. 34.2

Оптическая разность хода лучей оказывается равной

$$\delta_{\text{опт}} = \frac{r^2}{R} - \frac{\lambda}{2}.$$

Использование условий интерференционных максимумов и минимумов дает формулы для радиусов светлых и темных колец Ньютона в виде:

$$\text{Светлые кольца } r_m = \sqrt{\frac{R\lambda}{2}(2m-1)}, \text{ где } m=1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Темные кольца } r_n = \sqrt{R\lambda n}, \text{ где } n=0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, расположенная практически на сферической поверхности линзы система полос равной толщины представляет собой набор концентрических темных и светлых колец, причем центр картины оказывается темным, что обусловлено «потерей полуволны» лучом  $I$ .

**Полосы равного наклона.** Рассмотрим плоскую монохроматическую волну длиной  $\lambda$ , падающую на прозрачную **стеклянную пластинку** толщиной  $d$  под углом  $i$  (рис. 34.3). Показатель преломления стекла равен  $n$ . Часть волны отразится от границы

воздух-стекло; показатель преломления воздуха практически равен единице. Выделим в двух отраженных пучках по одному лучу (лучи 1 и 2) и определим оптическую разность хода между ними. Обозначим длины сторон треугольников  $ADC$  и  $ABC$  следующим образом: длину стороны  $AD$  как  $l_1$  и длину стороны  $AB$  как  $l_2$ .

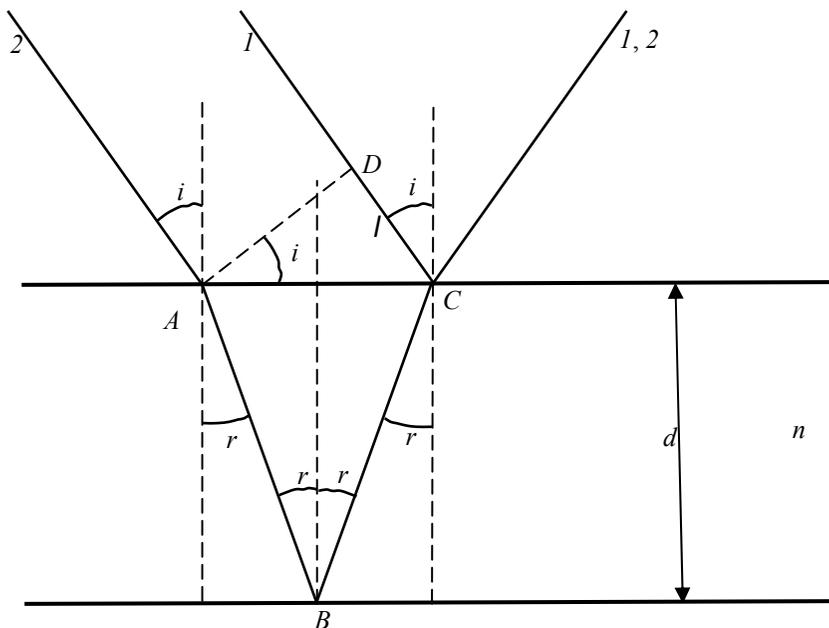


Рис. 34.3

При расчете оптической разности хода лучей 1 и 2 необходимо учесть «потерю полуволны» лучом 1 при отражении от оптически более плотной среды (стекла) и то обстоятельство, что луч 2 проходит расстояние, равное  $2l_2$  в оптической среде – стекле – с показателем преломления  $n$ . Тогда оптическую разность хода лучей 1 и 2 можно записать в виде:

$$\delta_{\text{опт}} = 2nl_2 - l_1 - \frac{\lambda}{2}.$$

Закон преломления света дает соотношение:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Соотношение сторон прямоугольного треугольника  $ADC$  и равнобедренного треугольника  $ABC$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{2} &= \frac{d}{\cos r}; \\ l_1 &= 2d \cdot \operatorname{tg} r \cdot \sin i. \end{aligned}$$

В силу этих формул после алгебраических преобразований получает формулу для оптической разности хода лучей  $1$  и  $2$ :

$$\delta_{\text{опт}} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}.$$

Используя условия интерференционных максимумов и минимумов, получим формулы для углов падения волн, при которых в отраженном свете пластинка будет казаться светлой (максимумы) или темной (минимумы):

$$\text{максимум: } 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m} = \lambda \left( m + \frac{1}{2} \right), \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{минимум: } 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_m} = m\lambda, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда на прозрачную пластинку падает под **различными** углами  $i$  множество монохроматических световых пучков (рис. 34.4). В этом случае в отраженном свете интерференционную картину можно наблюдать, поставив на пути отраженных лучей тонкую линзу. Такие линзы **таутохронны** (они не вносят дополнительной разности хода для параллельных лучей, падающих на линзу). Кроме этого, линза собирает параллельные лучи в своей фокальной плоскости. Если в этой плоскости поместить экран, то именно на нем можно наблюдать чередование темных и светлых полос. Такая интерференционная картина получила название **полос равного наклона**.

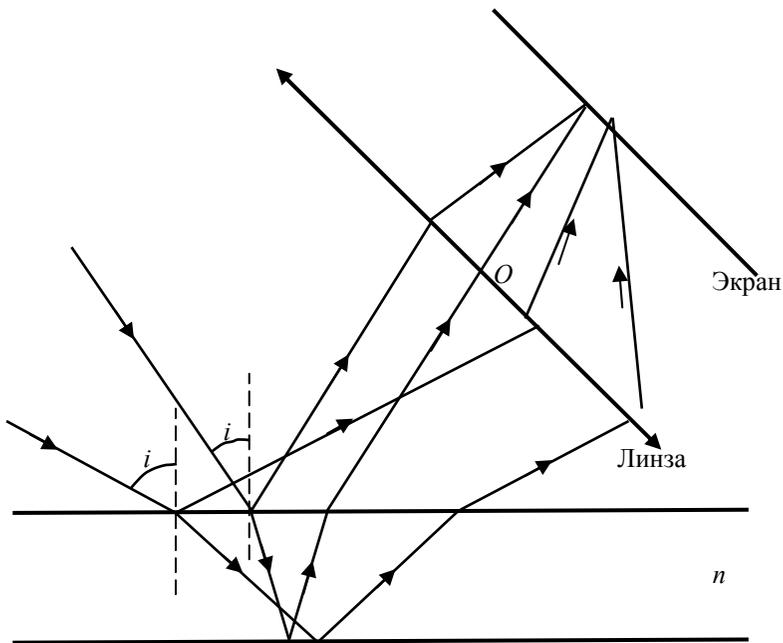


Рис. 34.4

### Контрольные вопросы и задания

1. Нарисуйте ход лучей в стеклянном клине. Чему равна разность хода между интерферирующими лучами?
2. О какой «толщине» идет речь, когда говорят о полосах равной толщины?
3. Как образуются кольца Ньютона?
4. Нарисуйте ход лучей в опыте по наблюдению колец Ньютона.
5. Почему при наблюдении колец Ньютона в отраженном свете центральное пятно интерференционной картины является темным?
6. Как изменятся радиусы темных колец, если воздушный промежуток между линзой и стеклянной пластиной заполнить прозрачной жидкостью с коэффициентом преломления  $n > n_{\text{ст}}$ ?

7. Можно ли наблюдать картину интерференции «кольца Ньютона» в проходящем свете?

8. Нарисуйте ход лучей в плоскопараллельной пластинке. Чему равна разность хода между интерферирующими лучами?

9. О каком «наклоне» идет речь, когда говорят о полосах равного наклона?

## 35. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ

**Дифракцией** называется совокупность явлений, связанных с распространением света в среде с резкими **неоднородностями** (препятствиями). Если свет в такой среде встречает препятствие, то он **отклоняется** от распространения прямолинейно и **проникает в область геометрической тени**. При выполнении определенных условий можно наблюдать явление дифракции в виде **дифракционной** (интерференционной) **картины**. Эта картина представляет собой для монохроматического света систему чередующихся в зависимости от формы препятствия светлых и темных колец или систему светлых и темных параллельных полос. Под препятствиями понимаются прозрачные (в виде отверстий) и непрозрачные (в виде преград) образования малых линейных размеров.

Между дифракцией и интерференцией нет существенного физического различия. Оба явления заключаются в перераспределении энергии в результате суперпозиции волн. Перераспределение энергии, возникающее в результате суперпозиции волн, возбуждаемых конечным числом дискретных когерентных источников, принято называть интерференцией волн. Перераспределение энергии, возникающее вследствие суперпозиции волн, возбуждаемых когерентными источниками, расположенными непрерывно, принято называть дифракцией волн.

Формально возникновение дифракции можно объяснить с помощью **принципа Гюйгенса** (Х. Гюйгенс (1629–1695)): **всякая точка среды, до которой доходит волновое возмущение становится источником вторичных сферических волн. Огибающая всех этих сферических волн дает фронт волны** в каждый данный

момент времени. Нормали к фронту волны (**световые лучи**) показывают направление распространения световой волны. Световая волна, попадая в отверстие в экране, проникает в область геометрической тени, нарушая закон прямолинейного распространения.

Принцип Гюйгенса в его первоначальном виде позволял находить только положения волновых фронтов в последующие моменты времени, т.е. определять **направление** распространения волны и ничего не говорил об **интенсивности** света, распространяющегося в различных направлениях. Гипотезу Гюйгенса об огибающей вторичных волн О. Френель (1788–1827) дополнил идеей **интерференции**, согласно которой **волны от вторичных источников интерферируют, распространяясь вперед**. Этот «усовершенствованный» принцип получил название **принципа Гюйгенса-Френеля**.

Пусть поверхность  $F$  является волновой поверхностью света, распространяющегося от некоторого точечного источника. Разобьем волновую поверхность на **элементарные источники**  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Эти источники будут **когерентными**, так как они порождаются одной и той же волной и представляют собой элементы разбиения данной волновой поверхности. Результирующее колебание в некоторой точке  $P$  есть результат **интерференции** всех вторичных волн, приходящих от этих источников в точку  $P$  с учетом их амплитуды и фазы. При этом стоит учитывать только те элементы волновой поверхности, которые не загорожены каким-либо препятствием.

Способы разбиения волновой поверхности на элементарные источники зависят от характера задачи. Френель предложил оригинальный метод разбиения волновой поверхности на зоны (**зоны Френеля**).

Рассмотрим следующий пример. Поместим точечный монохроматический источник света  $S$  в фокус слева от собирающей линзы  $L$  (рис. 35.1). Справа от линзы образуется плоская монохроматическая световая волна. Выделим на ней произвольную плоскую волновую поверхность  $F$ , и разобьем волновую поверхность на элементарные источники – зоны Френеля. Для этого с центром в точке наблюдения  $P$ , лежащей на оси симметрии, проведем ряд концентрических сфер.

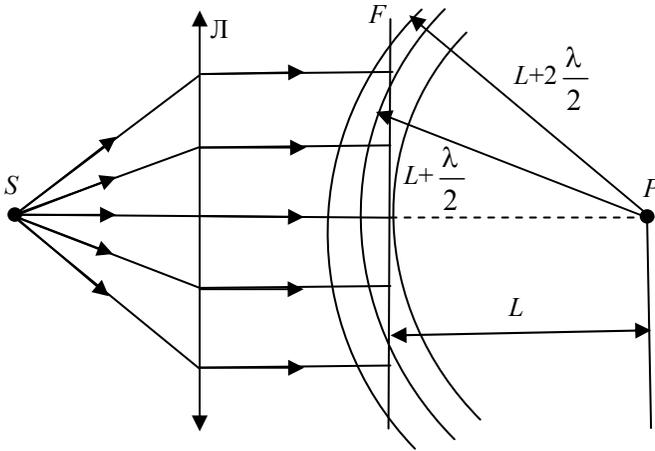


Рис. 35.1

Первая сфера с наименьшим радиусом  $L$ , равным расстоянию от точки  $P$  до волновой поверхности, должна коснуться этой поверхности. Все остальные пересекают волновую поверхность, при этом **радиус** каждой последующей сферы должен отличаться от радиуса предыдущей на **половину длины волны**  $\lambda/2$ . Со стороны точки наблюдения  $P$  границы зон на волновой поверхности представляют собой линии пересечения сфер и волновой поверхности в виде концентрических окружностей (рис. 35.2). Поэтому все зоны за исключением первой – круга, являются кольцами. На рисунке 35.2  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  являются радиусами соответствующих зон Френеля, а  $R$  – радиусом отверстия (радиус вводится тогда, когда на пути параллельного пучка лучей – плоской волны, полученной с помощью собирающей линзы, ставится непрозрачный плоский экран с круглым отверстием радиусом  $R$ . Правда, этот пример не предполагает наличия экрана).

С помощью рис. 35.3 определим радиусы границ зон Френеля (расчет аналогичен вычислению радиусов колец Ньютона). Радиус  $m$ -го кольца  $\rho_m$  находится из соотношения

$$\rho_m^2 = \left( L + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - L^2 = L^2 + Lm\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} - L^2, \quad (35.1)$$

где  $\lambda$  – длина световой волны. Или (с учетом, что  $\lambda^2 \ll L$ ):

$$\rho_m = \sqrt{mL\lambda}. \quad (35.2)$$

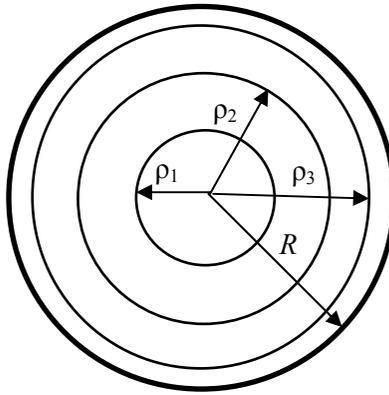


Рис. 35.2

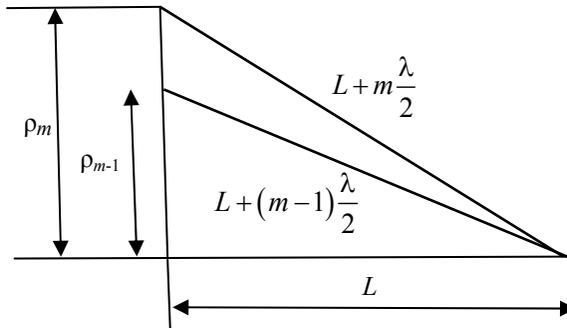


Рис. 35.3

При наличии экрана с отверстием радиуса  $R$  радиус последней зоны Френеля, укладываемый на отверстию, равен радиусу отверстия.

Откуда следует, что радиусы некоторых зон Френеля могут быть представлены следующим образом

$$\rho_1 = \sqrt{L\lambda}, \quad \rho_2 = \sqrt{2L\lambda}, \quad \rho_m = \sqrt{mL\lambda}, \quad \rho_{m-1} = \sqrt{(m-1)L\lambda}.$$

Легко показать, что площади всех зон одинаковы. Действительно,

$$S_m = \pi\rho_m^2 - \pi\rho_{m-1}^2 = \pi\lambda L.$$

В это выражение не входит номер зоны, поэтому  $S_1 = S_2 = \dots S_m$ .

Одинаковые по площади зоны должны были бы возбуждать в точке **наблюдения**  $P$  колебания с **одинаковой амплитудой**. Однако **расстояние** от каждой последующей зоны Френеля с большим номером до точки наблюдения **возрастает**.

Френель, высказывал предположение (подтвержденное опытом), что амплитуда колебаний, приходящих в точку наблюдения, от все более удаленных зон **уменьшается**, хотя и незначительно:  $A_1 > A_2 > A_3 \dots > A_m$ , где  $A_m$  – амплитуда колебаний, вызванных  $m$ -й зоной. Это означает, что с увеличением номера зоны  $m$  наблюдается монотонный спад амплитуд колебаний, приходящих в точку  $P$ . Зависимость  $A = f(m)$  можно изобразить в виде графика, представленного на рис. 35.4.

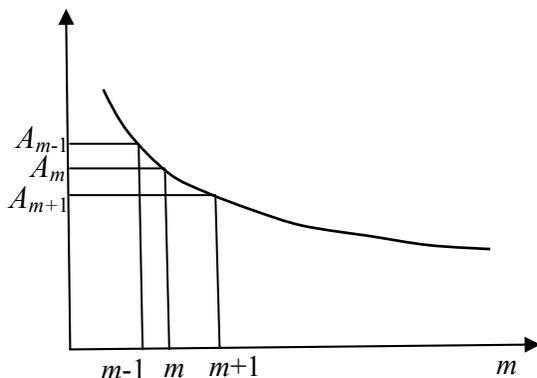


Рис. 35.4

С хорошим приближением можно считать, что амплитуда колебаний, вызываемых некоторой зоной, равна среднему арифметическому из амплитуд колебаний, вызываемых двумя соседними зонами, т.е.

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Так как расстояния от двух **соседних** зон до точки наблюдения отличаются на  $\lambda/2$ , то возбуждаемые этими зонами колебания приходят в эту точку **в противофазе**. Поэтому волны от любых

двух соседних зон почти гасят друг друга. Суммарная амплитуда в точке наблюдения, в отсутствии какой-либо преграды на пути лучей:

$$\begin{aligned}
 A &= A_0 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots = \\
 &= \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2} \cdot m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}. \quad (35.3)
 \end{aligned}$$

(Из закона монотонного спада амплитуд следует, что слагаемые, стоящие в скобках, обращаются в нуль). Таким образом, **вся** волновая поверхность оказывает в точке наблюдения действие практически равное **половине** действия **первой** зоны Френеля.

Если изготовить плоский непрозрачный экран, который оставлял бы открытыми только несколько нечетных (или только четных) зон, то амплитуда колебаний резко **возрастает**. Если отверстие в непрозрачном экране оставляет открытой только первую зону Френеля, то амплитуда колебаний в точке наблюдения возрастает в 2 раза (а интенсивность в 4 раза) по сравнению с действием невозмущенной волны  $I_0$ . Если открыты 1, 3 и 5 зон, то  $A = 6A_0$ ,  $I = 36 I_0$ .

Такие пластинки, закрывающие отдельные зоны Френеля и обладающие свойством фокусировать свет, называются **зонными пластинками**.

Оценим **размеры зон Френеля**. Пусть на пути плоской монохроматической волны находится препятствие в виде круглого отверстия; а дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии  $L = 1$  м от отверстия. Длина волны  $\lambda = 600$  нм (красный свет). Тогда радиус первой зоны Френеля  $\rho_1 = \sqrt{L\lambda} \cong 0,77$  мм.

Таким образом, в оптическом диапазоне вследствие малости длины волны размер зон Френеля оказывается достаточно малым. Дифракционные явления при описанной постановке эксперимента проявляются наиболее отчетливо, когда на препятствии укладывается лишь **небольшое** число зон:

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \geq 1, \text{ или } R^2 \geq L\lambda, \quad (35.4)$$

где  $R$  – радиус отверстия. Если же формальный расчет по формуле (35.4) дает  $m \ll 1$ , дифракционные явления также **наблюдаются**.

Число  $m$  в (35.4) можно рассматривать, как **критерий наблюдения дифракции**. Обычно различают два вида дифракции. Если расчет по формуле (35.4) дает  $m \geq 1$  говорят о дифракции в **сходящихся** лучах, или **дифракции Френеля**. Если  $m \ll 1$ , то говорят о дифракции в **параллельных** лучах, или **дифракции Фраунгофера**.

Если число зон Френеля, укладывающихся на препятствии, становится **очень большим**, то дифракционные явления практически **незаметны**:

$$m = \frac{R^2}{L\lambda} \gg 1, \text{ или } R^2 \gg L\lambda.$$

Это неравенство определяет **границу применимости геометрической оптики**. Узкий пучок света, который в геометрической оптике называется лучом, может быть сформирован только при этом условии. На экране в этом случае наблюдается **четкая граница тени**, а яркость области света **не зависит от размеров препятствия** (см. (35.3)). Таким образом, геометрическая оптика является предельным случаем волновой.

**Дифракция Френеля на круглом отверстии.** Дифракцию Френеля рассмотрим для случая сферических волн. Частный случай плоских волн получается из рассматриваемого устремлением расстояния до источника в бесконечность. Сферическая волна получается в том случае, если точечный источник света находится на **конечном** расстоянии от препятствия (**круглого** отверстия) и, следовательно, на самом препятствии волновая поверхность представляет собой часть сферической поверхности. В отличие от рассмотренного ранее случая дифракции от удаленного источника геометрия задачи усложняется, так как зоны Френеля теперь нужно строить не на плоской, а на сферической поверхности (рис. 35.5).

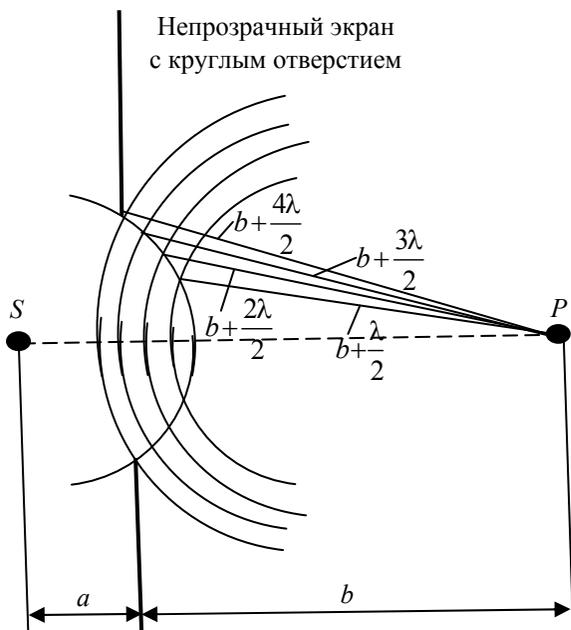


Рис. 35.5

Расчет приводит к следующему выражению для радиуса  $m$ -ой зоны Френеля (см. **Пример 1**):

$$\rho_m = \sqrt{m \frac{ab}{a+b} \lambda}. \quad (35.5)$$

Все выводы изложенной выше теории Френеля остаются справедливыми и в этом случае.

Мы ограничимся рассмотрением двух случаев дифракции сферических волн: **дифракция от круглого отверстия** и **дифракция от круглого диска**.

А. Пусть отверстие для данной точки наблюдения открывает небольшое **нечетное** число зон Френеля например, 3 зоны.

Б. Пусть отверстие для данной точки наблюдения открывает небольшое **четное** число зон Френеля – например, 2 зоны.

Точка наблюдения  $P$  находится на перпендикуляре, возведенном к плоскости отверстия в его центре (см. рис. 35.5). Отверстие вырезает на волновой поверхности сегмент.

Для трех зон результирующая амплитуда колебания в точке  $P$ :

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\text{рез}} &= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 \\ A_{\text{рез}} &= A_1 - A_2 + A_3 = \\ &= \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \\ &+ \frac{A_3}{2} = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{2}.\end{aligned}$$

Это значит, что в точке  $P$  наблюдается **максимум** дифракционной картины – пятно получается светлым. Причем яркость этого пятна будет большей, чем в том случае, если бы препятствия не было вообще.

Для двух зон результирующая амплитуда колебаний в точке  $P$ :

$$\begin{aligned}\vec{A}_{\text{рез}} &= \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \\ A_{\text{рез}} &= A_1 - A_2 = \\ &= \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_2}{2} \right) - \\ &- \frac{A_2}{2} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} < \frac{A_1}{2}.\end{aligned}$$

В точке  $P$  наблюдается **минимум** дифракционной картины – пятно получается темным. В минимуме дифракционной картины яркость пятна получается меньшей, чем в том случае, если бы препятствие отсутствовало.

Таким образом, при перемещении вдоль перпендикуляра к плоскости отверстия глаз наблюдателя будет видеть чередование светлых и темных пятен. Причем освещенность этих пятен будет уменьшаться по мере приближения к отверстию. Так как, чем ближе точка наблюдения находится к отверстию, тем больше для данной точки  $P$  вырезается зон Френеля этим отверстием и тем меньше освещенность (яркость) в этой точке будет отличаться от той, которая была бы, если бы препятствия не было вообще (а это и есть случай геометрической оптики).

На экране, параллельном плоскости отверстия и проходящем через точку  $P$  будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередующихся светлых и темных concentрических колец с темным ( $m$  четное) или светлым ( $m$  нечетное) пятном в центре в зависимости от удаленности экрана от отверстия. Если отверстие открывает большое число зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически постоянной, не зависящей от размеров отверстия и расстояния до него, что соответствует приближению геометрической оптики.

**Дифракция Френеля на круглом диске.** Предположим, что точка наблюдения  $P$  выбрана таким образом, что **диск** для нее закрывает на волновой поверхности одну зону Френеля (рис. 35.6). В этом случае результирующая амплитуда колебаний в точке  $P$  будет определяться половиной амплитуды колебаний первой открытой зоны. А первой открытой зоной является вторая. Поэтому в точке  $P$  наблюдается максимум дифракции с амплитудой

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_2}{2}.$$

Если диском закрыты две зоны Френеля, то по аналогии с предшествующим

$$A_{\text{рез}} = \frac{A_3}{2},$$

и в точке  $P$  вновь наблюдается максимум дифракции.

Таким образом, независимо от того, четное или нечетное число зон Френеля закрывается диском, на нормали к центру диска **всегда** будет присутствовать **максимум** дифракционной картины (светлое пятно). Оно носит название пятна Пуассона (С. Пуассон (1781–1840)). Интенсивность максимума ( $\text{max}$ ) убывает по мере приближения к диску, что условно показано на рис. 35.7 в виде уменьшающихся по размеру точек.

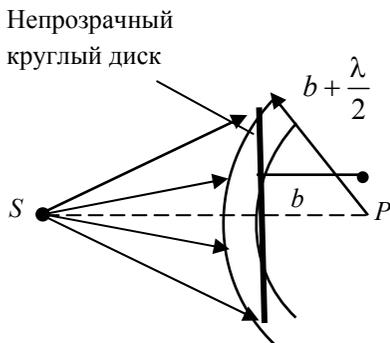


Рис. 35.6

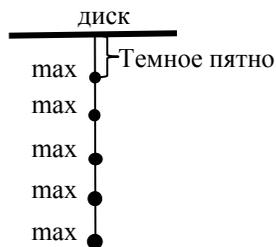


Рис. 35.7

**Вблизи** диска на нормали образуется темное пятно. Это вызвано тем, что для близких к непрозрачному, круглому диску точек  $P$  диск закрывает **большое** число зон Френеля. Тогда первой открытой является дальняя (с большим номером  $m$ ) зона Френеля, а она посылает свет в точки наблюдения очень малой интенсивности, и все эти точки видятся темными.

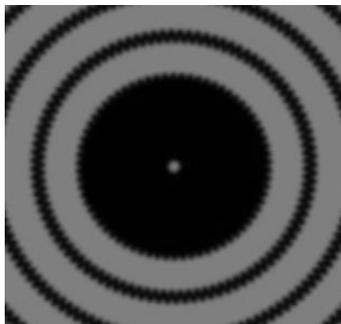


Рис. 35.8

На экране, расположенном перпендикулярно диску на достаточном удалении от него, наблюдается картина, представленная на рис. 35.8. В центре этой картины наблюдается пятно Пуассона.

**Пример 1.** Точечный источник света  $S$  с длиной волны  $\lambda = 500$  нм расположен на расстоянии  $a = 1$  м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом  $R = 1$  мм. Найдите расстояние  $b$  от диафрагмы до точки наблюдения  $P$ , для которой отверстие вырезает на волновой поверхности  $m = 3$  зоны Френеля. Докажите, что площади всех зон Френеля одинаковы.

На рисунке 35.9 представлено отверстие в диафрагме, на которое падает свет от точечного источника  $S$ . Радиус отверстия  $R$  равен радиусу  $\rho_m$  последней  $m$ -ой зоны Френеля, укладываемойся на отверстии. Точка наблюдения  $P$  находится справа от отверстия на расстоянии  $b$ . Рассмотрим  $\Delta$

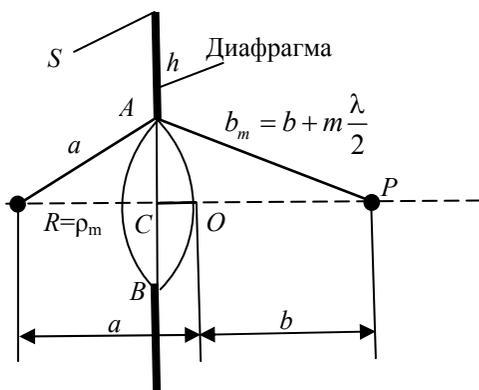


Рис. 35.9

и  $\Delta$  SAC и  $\Delta$  CAP на рис. 35.9. Из  $\Delta$  SAC имеем

$$\rho_m^2 = a^2 - (a - h)^2. \quad (35.6)$$

Из  $\Delta$  САР следует, что

$$\rho_m^2 = \left( b + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - (b + h)^2. \quad (35.7)$$

Вычтем из уравнения (35.7) уравнение (35.6):

$$a^2 - (a - h)^2 = \left( b + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - (b + h)^2. \quad (35.8)$$

Раскроем скобки и приведем уравнение (35.8) к виду

$$h = \frac{bm\lambda + \left( m \frac{\lambda}{2} \right)^2}{2(a + b)}.$$

Поскольку длина волны  $\lambda$  мала, то слагаемое  $\left( \frac{m\lambda}{2} \right)^2$  является величиной второго порядка малости, и им можно пренебречь. В результате

$$h = \frac{mb\lambda}{2(a + b)}. \quad (35.9)$$

Преобразуем уравнение (35.6) к виду  $\rho_m^2 = 2ah - h^2$ . Пренебрежем членом  $h^2$  в силу малости значения  $h$   $\rho_m^2 = 2ah$ , или, с учетом (35.4), имеем:

$$\rho_m^2 = \frac{mba\lambda}{a + b}. \quad (35.10)$$

Откуда  $b = \frac{a\rho_m}{am\lambda - \rho_m^2} = \frac{aR^2}{am\lambda - R^2} \cong 2$  м.

Как следует из уравнения (35.10) радиус  $m$ -й зоны  $\rho_m = \sqrt{\frac{mba\lambda}{a + b}}$ , радиус  $(m-1)$ -й зоны  $\rho_{m-1} = \sqrt{\frac{(m-1)ba\lambda}{a + b}}$ .

Соответственно площади  $m$ -й и  $(m-1)$ -й зон запишутся в виде

$$S_m = \pi\rho_m^2 - \pi\rho_{m-1}^2 = \pi \frac{ba\lambda}{a + b}; \quad S_{m-1} = \pi\rho_{m-1}^2 - \pi\rho_{m-2}^2 = \pi \frac{ba\lambda}{a + b}.$$

Как видно из полученных выражений для  $S_m$  и  $S_{m-1}$ , площадь  $m$ -й зоны равна площади  $(m-1)$ -й. Это означает, что площади всех зон Френеля одинаковы, так как в выражение для  $S$  не входит номер зоны

$$S_1 = S_2 = \dots = S_m.$$

**Пример 2.** Между точечным источником света и экраном помещают диафрагму с круглым отверстием, радиус которого  $R$  можно менять в процессе опыта. Расстояние от диафрагмы до источника и экрана соответственно  $a = 100$  см и  $b = 125$  см. Определите длину световой волны, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при  $R_1 = 1,00$  мм и следующий максимум при  $R_2 = 1,29$  мм.

Как следует из условия задачи, в центре картины должен наблюдаться максимум освещенности. Это происходит в том случае, если отверстие на волновой поверхности вырезает нечетное число зон Френеля. Предположим, что на отверстии радиусом  $R_2$  уложилось  $(2m+1)$  зон Френеля, а на отверстии радиусом  $R_1$  —  $(2m+1)$  зон.

Тогда формулы для определения радиусов соответствующих зон запишутся в следующем виде (см. **Пример 1**)

$$\rho_{2m+1} = R_2 = \sqrt{\frac{(2m+1)ba\lambda}{a+b}} \quad (35.11)$$

и

$$\rho_{2m-1} = R_1 = \sqrt{\frac{(2m-1)ba\lambda}{a+b}}. \quad (35.12)$$

Возведем правые и левые части уравнений (35.11) и (35.12) в квадрат и вычтем из первого уравнения второе. Имеем

$$R_2^2 - R_1^2 = \frac{2ba\lambda}{a+b}, \text{ откуда}$$

$$\lambda = \frac{(a+b)(R_2^2 - R_1^2)}{2ab} = 600 \text{ нм.}$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается принцип Гюйгенса-Френеля от принципа Гюйгенса?
2. Что такое «зона Френеля»?
3. Нарисуйте картину построения зон Френеля на примере круглого отверстия.
4. Сравните площади различных зон Френеля, построенных для круглого отверстия.
5. Что такое зонные пластинки?
6. От каких параметров зависит число зон Френеля в случае круглого отверстия?
7. Как определяется результирующая амплитуда волны в точке наблюдения, из которой построено бесконечное число зон Френеля?
8. Каковы особенности дифракции на диске?
9. Сформулируйте основные приближения, необходимы для объяснения дифракции Френеля, дифракции Фраунгофера и геометрической оптики.
10. Что называют пятном Пуассона?

## 36. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА

Дифракция Фраунгофера (дифракция в **параллельных** лучах) наблюдается на **удаленном** экране при падении **плоских** волн на небольшое препятствие (отверстие). В этом случае падающие на экран лучи можно считать почти параллельными. Вместо удаленного экрана можно использовать экран, расположенный в фокусе собирающей **линзы**: из дифрагирующих лучей линза «отберет» параллельные.

Принципиально дифракция плоских волн не отличается от дифракции сферических волн, но при дифракции плоских волн дифракционная картина получается более отчетливой. Поэтому дифракция плоских волн находит более широкое практическое применение. В связи с этим наибольший интерес представляет собой в качестве препятствия отверстие в виде длинной узкой

прямоугольной щели  $l \gg b$  ( $l$  – длина,  $b$  – ширина), так как такая щель является элементом дифракционной решетки – основного дифракционного прибора.

Предположим, что на **прямоугольную щель** падает плоская волна. Рассмотрим световые лучи (рис. 36.1), которые дифрагируют на щели под углом  $\varphi$ . Эти лучи идут параллельно друг другу и поэтому «пересекаются» в бесконечности.

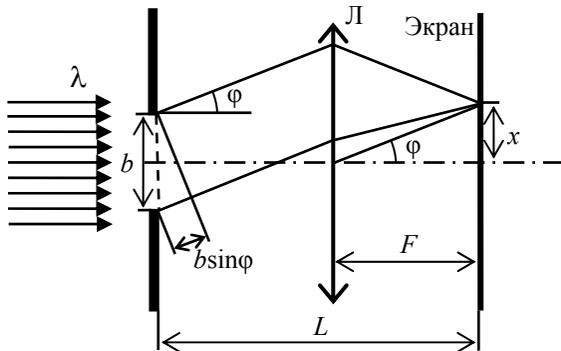


Рис. 36.1

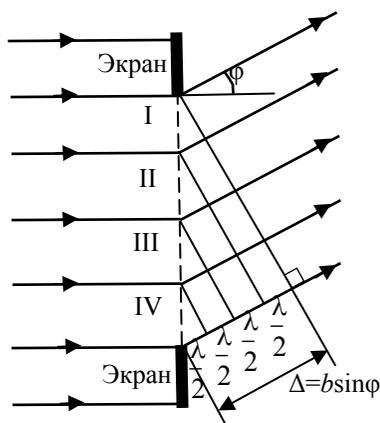


Рис. 36.2

Как сказано выше, для разбиения щели на зоны Френеля (как и для круглого отверстия) нужно построить сферы. Центры таких сфер лежат бесконечно далеко от щели. Их радиусы бесконечно велики. По существу, такие сферы являются плоскостями. И, следовательно, такими параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на  $\frac{\lambda}{2}$ , щель разбивается на зоны Френеля I, II, III, IV (рис. 36.2). Для данной точки

наблюдения, лежащей в бесконечности, плоскости должны быть перпендикулярны дифрагирующим лучам, направленным именно в эту точку.

Ширина зоны Френеля зависит от угла дифракции. Чем **больше** угол дифракции, тем больше зон укладывается на щели и тем **уже** по ширине каждая из зон. Площади всех зон Френеля одинаковы.

Лучи, идущие от щели, собираются линзой Л на экране, расположенным в фокальной плоскости линзы. На нем наблюдается дифракционная картина.

В случае дифракции плоских волн амплитуды колебаний, посылаемых каждой отдельной зоной в данную точку на экране, будут одинаковы, так как эти зоны занимают совершенно одинаковое положение по отношению к углу дифракции.

Поэтому результат дифракции определяется формулой

$$\vec{A}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^n \vec{A}_i .$$

Максимумы дифракции наблюдаются для таких направлений дифрагирующих лучей, для которых на данной щели укладывается нечетное число зон Френеля. Например, для трех зон:

$$A_{\text{рез}} = A - A + A = A; \quad I = A^2 .$$

Эта амплитуда в точке наблюдения почти в два раза больше той, чем в случае дифракции на отверстии сферических волн

$$\left( A > \frac{A_1}{2} \right) .$$

Условие **максимума**:

$$\Delta = b \sin \varphi_{\text{max}} = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (36.12)$$

где  $m = 1, 2, 3 \dots$

Если для данного угла дифракции на щели укладывается четное число зон

Френеля, выполняется условие **минимума**:

$$\Delta = b \sin \varphi_{\text{max}} = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (36.13)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$  При этом результирующая амплитуда (для двух зон)

$$A_{\text{рез}} = A - A = 0; \quad I = 0 .$$

1. При дифракции плоских и сферических волн **максимум** дифракции в данной точке наблюдения присутствует тогда, когда для данной точки наблюдения отверстие вырезает на волновой поверхности световой волны **нечетное** число зон Френеля. Если отверстие вырезает **четное** число зон, в точке  $P$  наблюдается **минимум**.

2. При дифракции плоских волн дифракционная картина (рис. 36.3) получается более отчетливой, чем при дифракции сферических волн. Действительно в местах расположения минимумов наблюдается не просто ослабление интенсивности, а волны полностью гасят друг друга, и результирующая интенсивность равна нулю. В местах расположения максимумов интенсивность получается большей, чем при дифракции сферических волн.

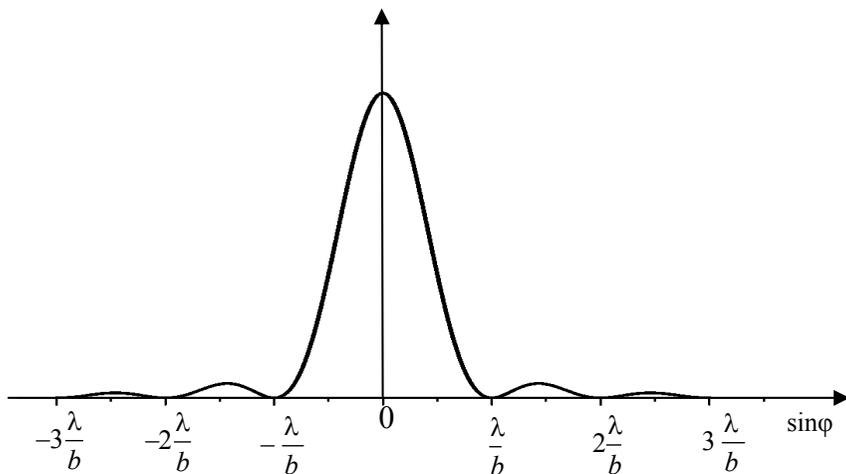


Рис. 36.3

Проведем анализ полученных результатов для случая **одной щели**.

1. **На щель падает монохроматический свет.** Число максимумов и минимумов дифракционной картины при дифракции на щели ограничено условием

$$|\sin \varphi| \leq 1, \text{ то есть } \varphi_{\min} = \frac{k\lambda}{b} \leq 1.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

А. Если ширина щели  $b$  много меньше длины волны  $\lambda$  света, то дифракционная картина в виде полос не наблюдается, а щель работает, как точечный источник света. Экран равномерно освещен светом этого источника.

Б. Если  $b = \lambda$ , то  $\sin \varphi_{\min} = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\varphi_{\min} = \frac{\pi}{2}$ . Дифракционная картина в виде полос отсутствует. Интенсивность света монотонно спадает от центра экрана к его краям.

В. Если, например,  $b = 5\lambda$ , то  $\sin \varphi_{\min} = \frac{k}{5}$ , где  $k$  принимает целочисленные значения, причем  $|\sin \varphi_{\min}| < 1$ . Дифракционная картина есть. На ней отчетливо просматриваются несколько максимумов и минимумов (по обе стороны от центра экрана).

Г. Если  $b = 100\lambda$ , то  $\sin \varphi_{\min} = \frac{k}{100}$ . Теоретически в такой дифракционной картине присутствуют около 100 максимумов и 100 минимумов, как по одну, так и по другую сторону от центра экрана. Угловое расстояние между соседними максимумами и минимумами столь мало, что соседние максимумы будут очень узкими, и будут практически вплотную примыкать друг к другу. Поэтому для получения более отчетливой дифракционной картины нужно, чтобы ширина щели значительно не превышала длину монохроматической световой волны.

Все сказанное при анализе полученных результатов справедливо, но с некоторым уточнением: для оценки характера дифракционной картины нужно знать не только отношение  $\frac{b}{\lambda}$ , но и расстояние  $L$ , на котором наблюдается дифракционная картина. Поэтому в случае с дифракцией на щели, по аналогии с формулой (36.4) вводится отношение  $\frac{b^2}{L\lambda}$ . Оно приближенно равно числу открытых зон Френеля  $m$  для точки лежащей против середины щели:  $m = \frac{b^2}{L\lambda}$ .

При небольших расстояниях экрана от щели (когда  $m \gg 1$ ) картина подчиняется зонам геометрической оптики – на экране получается равномерно освещенное изображение щели.

Если щель открывает **малую долю первой зоны Френеля** ( $m \ll 1$ , что соответствует случаю (в)) наблюдается дифракция Фраунгофера.

Если щель открывает небольшое число зон Френеля ( $m \sim 1$ , то есть, каждое из отношений  $\frac{b}{\lambda}$  и  $\frac{L}{b}$  равно 100, что соответствует случаю (г)), на экране присутствует изображение щели. На краю изображения наблюдаются очень узкие чередующиеся светлые и темные полосы.

**2. На щель падает белый свет.** В этом случае каждый максимум дифракционной картины кроме центрального представляет собой **спектр**, в котором ближе к центру всей картины наблюдаются цвета, соответствующие более коротким длинам волн видимого диапазона. На ближнем к центру краю максимума присутствует фиолетовый цвет, на дальнем – красный.

**Пример.** На щель шириной  $b = 0,15$  мм падает нормально плоская волна ( $\lambda = 450$  нм). С помощью линзы, оптическая сила которой  $D = 5$  дптр, дифракционная картина проецируется на экран, находящийся в фокальной плоскости линзы. Определите ширину центрального максимума и угловое положение первого максимума. Какое число максимумов теоретически включает дифракционная картина и какое число из них практически возможно наблюдать?

Из рисунка 36.4 *a* видно, что дифрагирующие под углом  $\varphi$  лучи ВD и ЕК параллельны друг другу и побочной оси СА. Именно под этим углом  $\varphi$  в точке А наблюдается первый максимум, интенсивность которого равна  $I_1$ . В общем случае положение максимума при дифракции на щели определяет формула (36.12):

$b \sin \varphi = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ , где по условию задачи  $m = 1$ . Поэтому

$\sin \varphi = \frac{3\lambda}{2b}$  (находим положение максимума по одну сторону от центрального максимума – максимума нулевого порядка поэтому знак « $\rightarrow$ » в формуле (36.12) опускаем) или

$$\varphi = \arcsin \frac{3\lambda}{2b} = 0,26^\circ.$$

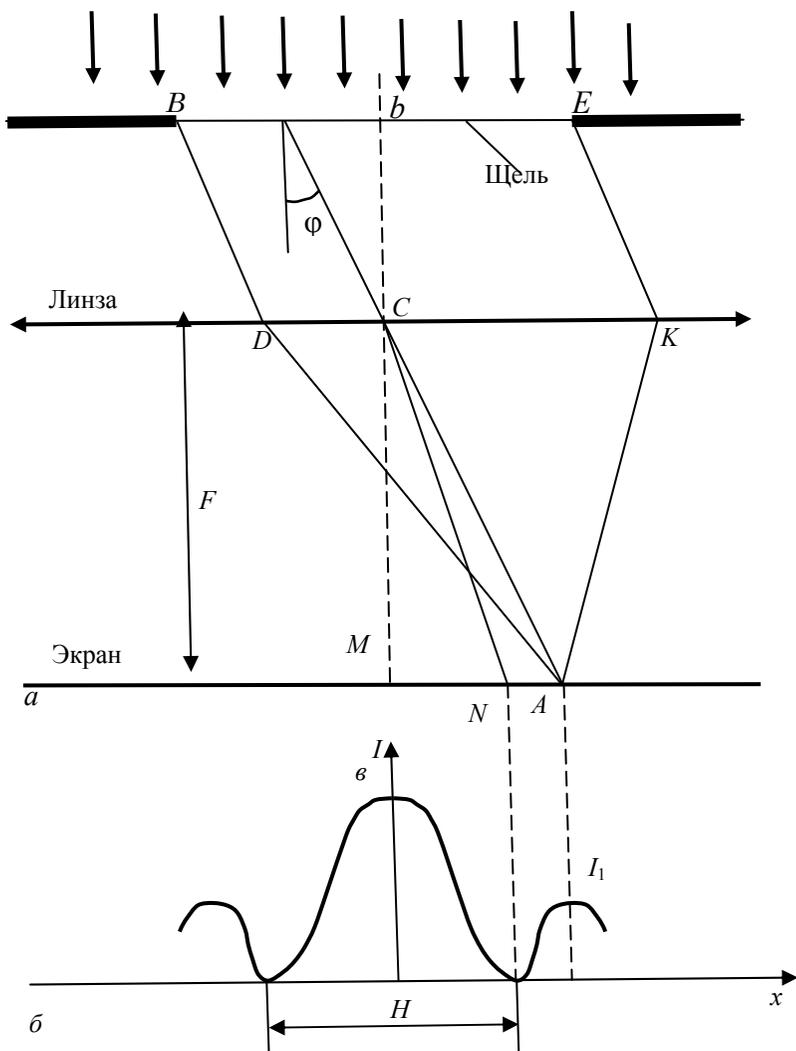


Рис. 36.4

Полное число максимумов, которое теоретически можно получить из формулы (36.12) при условии, что  $|\sin \varphi| = 1$ :

$$m = \frac{b}{\lambda} - \frac{1}{2} \approx 333.$$

Но практически наблюдать их все невозможно, так как уже интенсивность третьего максимума составляет  $\frac{8}{1000}$  от интенсивности центрального максимума (рис. 36.33 (б))  $I_0 : I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 0,045 : 0,016 : 0,008$ , где  $I_0, I_1, I_2, I_3$  соответственно интенсивности центрального, первого, второго и третьего максимумов.

Для определения ширины центрального максимума  $H$  рассмотрим  $\Delta MCN$  (рис. 36.33 (а)). Из треугольника получаем  $h = F \operatorname{tg} \varphi_1$ , где  $F$  – фокусное расстояние собирающей линзы (предполагается, что линза вплотную располагается к щели, поэтому  $F$  является одновременно и расстоянием от щели до экрана, а угол  $\varphi_1$ , является углом, под которым наблюдается первый минимум).

В силу симметрии картины

$$H = 2h = 2F \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (36.16)$$

Для малых углов дифракции

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \approx \sin \varphi_1. \quad (36.17)$$

Условием минимума является соотношение (36.13):

$$b \sin \varphi_1 = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \text{ здесь по условию } k = 1.$$

Из уравнений (36.16), (36.17) и (36.13) с учетом, что  $F = \frac{1}{D}$ ,

имеем (знак «минус» в формуле (36.13) опускаем):  $H = \frac{2\lambda}{bD} = 1,2 \text{ мм.}$

## Контрольные вопросы и задания

1. Какое физическое явление называется «дифракцией»?
2. При каком соотношении между размером отверстия и расстоянием до экрана наблюдается дифракция Фраунгофера?
3. Какой вид имеют зоны Френеля, которые необходимо построить для объяснения дифракции Фраунгофера на щели?
4. Выведите условие образования дифракционных минимумов для случая нормального падения на узкую щель плоской монохроматической волны. Поясните свой вывод рисунком.
5. Выведите условие образования дифракционных максимумов для случая нормального падения на узкую щель плоской монохроматической волны. Поясните свой вывод рисунком.
6. Как определить угловую ширину центрального дифракционного максимума?
7. Параллельный пучок белого света падает нормально на узкую щель. Объясните наблюдаемый на экране результат дифракции.

## 37. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

Прозрачная дифракционная решетка, работающая на пропускание света, представляет собой чередование большого числа прозрачных и непрозрачных промежутков-щелей (рис. 37.34). Расстояние между серединами соседних, прозрачных щелей называется **периодом** решетки  $d$ .

Предположим, что на дифракционную решетку падает плоская монохроматическая волна. Рассмотрим соответственные лучи, дифрагирующие под углом  $\varphi$  и идущие от одинаковых точек щелей. Эти лучи собираются линзой на экране в точке наблюдения  $P$ . Так как колебания, приходящие в точку наблюдения являются **когерентными**, то дифракция от  $N$  щелей не является простой суммой дифракционных картин от каждой щели в отдельности. Для расчета такой картины необходимо учитывать взаимную **интерференцию** колебаний, приходящих от разных щелей.

**Главные максимумы** дифракционной картины отвечают таким углам дифракции, при которых соответственные лучи,

идушие от разных щелей, приводят к перераспределению интенсивности в сторону ее увеличения (колебания взаимно «усиливают» друг друга). Поэтому результирующая амплитуда колебания в данной точке на экране:

$$\bar{A}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^N \bar{A}_i ,$$

где амплитуда  $A_i$  соответствует колебанию, приходящему от одной щели. Так как все щели занимают по отношению к углу дифракции совершенно одинаковое положение, то

$$A_1 = A_2 = \dots = A_N = A, \text{ и } A_{\text{рез}} = NA.$$

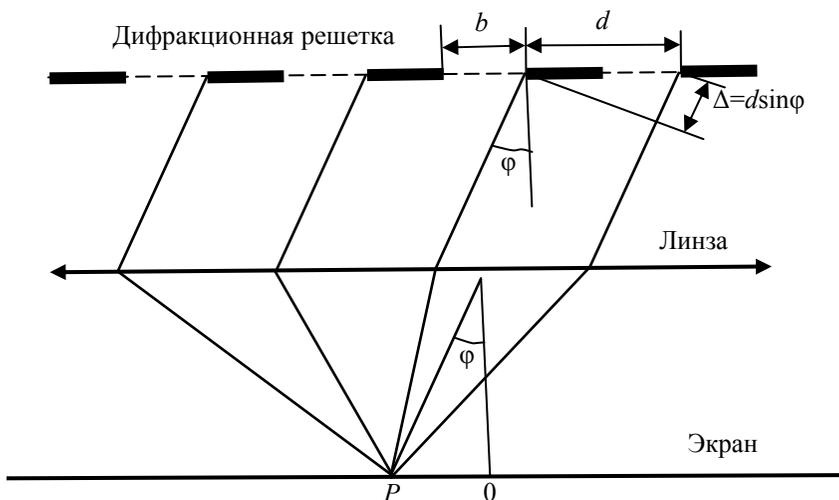


Рис. 37.1

Поэтому:  $I_{\text{рез}} = N^2 I$ , где  $I$  – интенсивность, создаваемая одной щелью. Таким образом, интенсивность главного максимума картины наблюдаемой, от дифракционной решетки, в  $N^2$  раз больше интенсивности максимума картины от одной щели.

Разность фаз колебаний  $\delta$  связана с разностью хода  $\Delta$  соотношением  $\delta = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$ , где  $\lambda$  – длина световой волны.

Из рисунка 37.1 видно, что  $\Delta = d \sin \varphi$ . Подставим это выражение в последнюю формулу и учтем, что в максимумах интенсивности колебания должны происходить синфазно. То есть  $\delta = \pm 2m\pi$ , где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  Как результат имеем

$$\pm 2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi \text{ или}$$

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad (37.18)$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  Условие (37.18) определяет положения главных максимумов интенсивности.

**Главные минимумы** соответствуют таким направлениям дифрагирующих лучей, при которых получается условие минимума для одной щели (см. (37.13)).

$$b \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (37.19)$$

где  $b$  – ширина щели,  $k = 1, 2, 3, \dots$  Дело в том, что главные минимумы соответствуют результату интерференции лучей в пределах каждой отдельной щели. И если каждая щель в данном направлении света не посылает, то и от  $N$  щелей в этом направлении света не будет.

**Добавочные минимумы** соответствуют таким углам, при которых в данном направлении каждая щель свет посылает. Но вследствие интерференции колебаний, приходящих от разных щелей, результирующая амплитуда оказывается равной нулю. Эти колебания взаимно гасят друг друга и  $I_{\text{рез}} = 0$ . Воспользуемся графическим методом сложения амплитуд. Сложим этим методом амплитуды  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  двух колебаний по правилу параллелограмма (рис. 37.2).

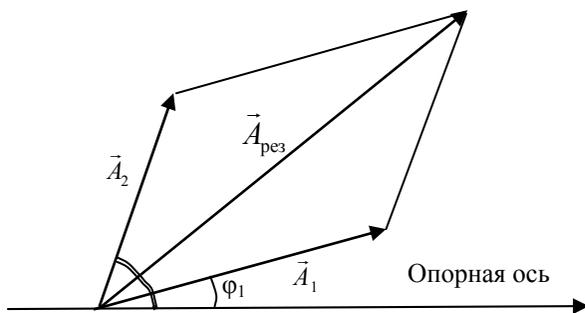


Рис. 37.2

Из рисунка видно, что  $\vec{A}_{\text{рез}} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$  ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  начальные фазы соответственно первого и второго колебательных процессов). Но совершенно аналогично  $\vec{A}_{\text{рез}}$  можно получить из сложения тех же амплитуд по правилу треугольника (рис. 37.3). На рисунке  $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$  является разностью фаз колебаний.

Если колебаний не два, а  $N$  (от  $N$  щелей), причем с одинаковыми амплитудами  $A_1 = A_2 = \dots = A_N = A$ , то картина сложения амплитуд представляется рис. 37.4.

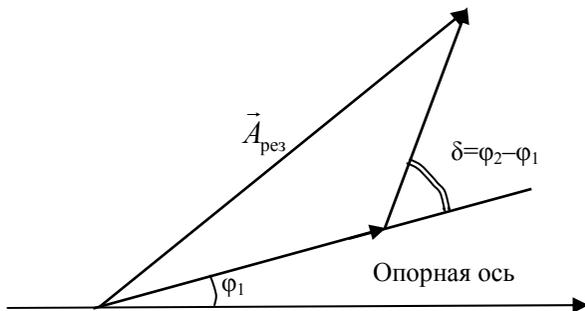


Рис. 37.3

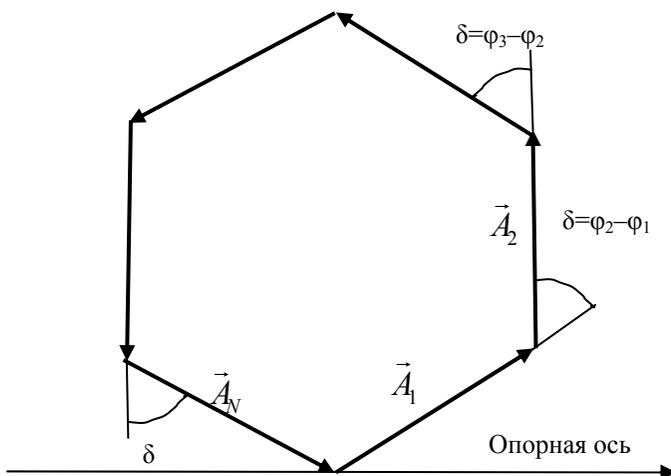


Рис. 37.4

Из рисунка 37.4 видно, что для получения минимума дифракции ( $\vec{A}_{\text{рез}} = 0$ ) нужно, чтобы амплитуды складывались в виде замкнутого многоугольника. Между любыми соседними векторами амплитуд должен быть одинаковый угол  $\delta$ . Этот угол равен разности фаз этих колебаний. Таким образом  $\delta = \frac{2\pi}{N}$ , но, с другой стороны,  $\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$ . И, следовательно,  $\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$  и  $\Delta = \frac{\lambda}{N}$ . Но  $\Delta = d \sin \varphi$ , поэтому  $d \sin \varphi = \frac{\lambda}{N}$ .

В дифракционной картине наблюдается не один минимум, и для нахождения остальных нужно обойти многоугольник 2 раза, 3 раза и т.д.:

$\Delta = d \sin \varphi = \frac{\lambda}{N}; \frac{2\lambda}{N}; \frac{3\lambda}{N}; \dots$  То есть  $d \sin \varphi = k' \frac{\lambda}{N}$ , где  $k' = 1, 2, 3, \dots (N-1), (N+1), \dots$

При  $m = 0, N, 2N, \dots$  наблюдаются главные максимумы, поэтому эти значения исключаются. Таким образом, между двумя главными максимумами, соответствующими условию  $d \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m = 0, N, 2N, \dots$  лежат по  $N-1$  добавочных минимумов, определяемых разностью хода

$$d \sin \varphi = m\lambda + \frac{k''\lambda}{N}, \quad (37.20)$$

где  $k''$  пробегает значение от 1 до  $N-1$  ( $k'' \neq N$ ). Между добавочными минимумами располагаются вторичные максимумы. Число таких максимумов, приходящееся на промежуток между главными соседними максимумами, равно  $N-2$ . Интенсивность вторичных максимумов очень мала. Самое большое, она составляет  $\frac{1}{22}$  интенсивности ближайшего главного максимума.

На рисунке 37.5 приведен график функции  $I = f(\sin \varphi)$  для  $N = 5$  и  $\frac{d}{b} \approx 2,6$ . Пунктирная кривая, соответствует излучению любой из щелей. Из формул (37.18) и (37.19) вытекает, что если

главный максимум  $m$ -го порядка приходится на  $k$ -й минимум излучения от одной щели, то есть, если будет выполнено условие

$$\frac{m}{d} = \frac{k}{b}, \text{ или } \frac{m}{k} = \frac{d}{b}, \text{ то } m\text{-й главный максимум } \mathbf{пропадает}.$$

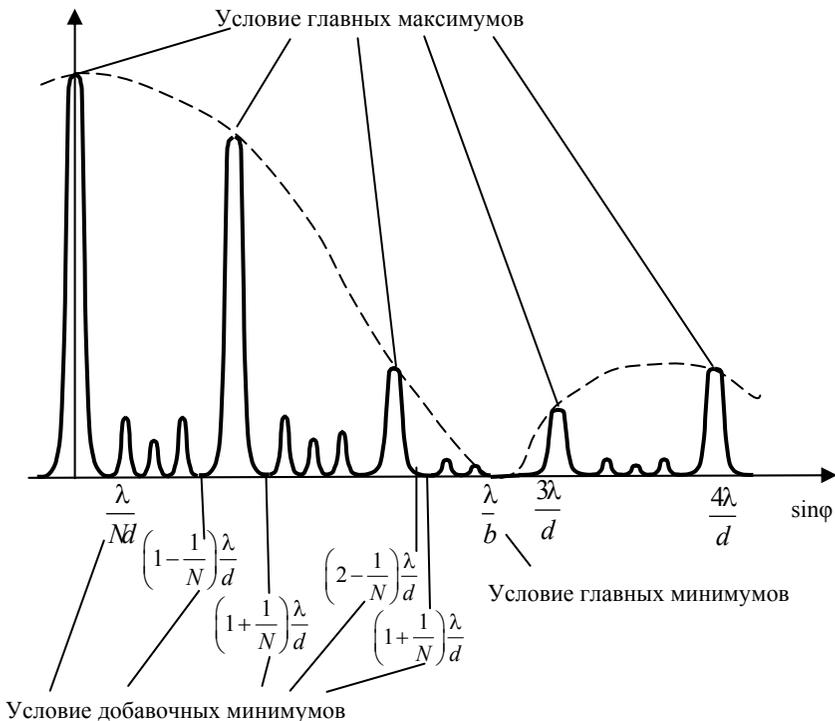


Рис. 37.5

Это возможно, если  $\frac{d}{b}$  равно отношению двух целых чисел.

Тогда главные максимумы с номерами равными  $\frac{d}{b}$ ,  $2 \frac{d}{b}$ ,  $3 \frac{d}{b}$  и т.д. пропадают.

Положение главных максимумов зависит от длины волны  $\lambda$ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разложатся в **спектр**. Фиолетовый конец каждого максимума обращен к центру дифракционной картины, красный – к периферии.

Из анализа формулы дифракционной решетки для главных максимумов вытекает, что модуль  $\sin \varphi$  не может превысить единицу. То есть  $|\sin \varphi| = \frac{m\lambda}{d} \leq 1$ .

Отсюда следует, что дифракционная картина будет отсутствовать, если  $d < \lambda$ .

Если  $d \gg \lambda$ , картины перестает быть отчетливой, так как угловое расстояние между соседними максимумами станет столь малым, что они начнут перекрываться. Наилучшие результаты получаются тогда, когда  $d$  незначительно превышает  $\lambda$ .

Чтобы максимумы близких длин волн **различались как разные максимумы (разрешались)** нужно, чтобы выполнялся **критерий (условие) Рэлея** (Д.У. Релей (1842–1919)). Согласно этому условию, максимумы (спектральные линии) считаются полностью разрешенными, если **середица** одного максимума совпадает с **краем** другого, то есть два близких максимума воспринимаются глазом раздельно, если интенсивность в промежутке между ними составляет не более 80% от интенсивности максимума.

На рисунке 37.6 представлены два варианта взаимного расположения двух соседних максимумов. В варианте (а) они сливаются для глаза, в варианте (б) считаются полностью разрешенными. Для варианта (б) запишем условия, дающие положения максимумов  $m$ -го порядка для волн с  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$d \sin \varphi'_{\max} = m\lambda_1, \text{ здесь } \lambda = \lambda_1;$$

$$d \sin \varphi''_{\max} = m\lambda_2, \text{ где } \lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda.$$

Для перехода от  $m$ -го максимума для длины волны  $\lambda_1$  к соответствующему минимуму (краю максимума) необходимо изменить направление дифрагирующего луча так, чтобы разность изменилась на  $\frac{\lambda_1}{N}$ , где  $N$  – число штрихов решетки. Таким образом, минимум для света с длиной волны  $\lambda_1$  наблюдается в направлении  $\varphi_{\min}$ .

Согласно условию Рэлея  $\varphi''_{\max} = \varphi_{\min}$ , откуда

$m\lambda_2 = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$ , или  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = mN$ . Так как  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  отличаются

на  $\delta\lambda$ , то

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN, \quad (37.21)$$

где  $R$  называется **разрешающей силой** дифракционной решетки и является одной из основных характеристик дифракционной решетки.

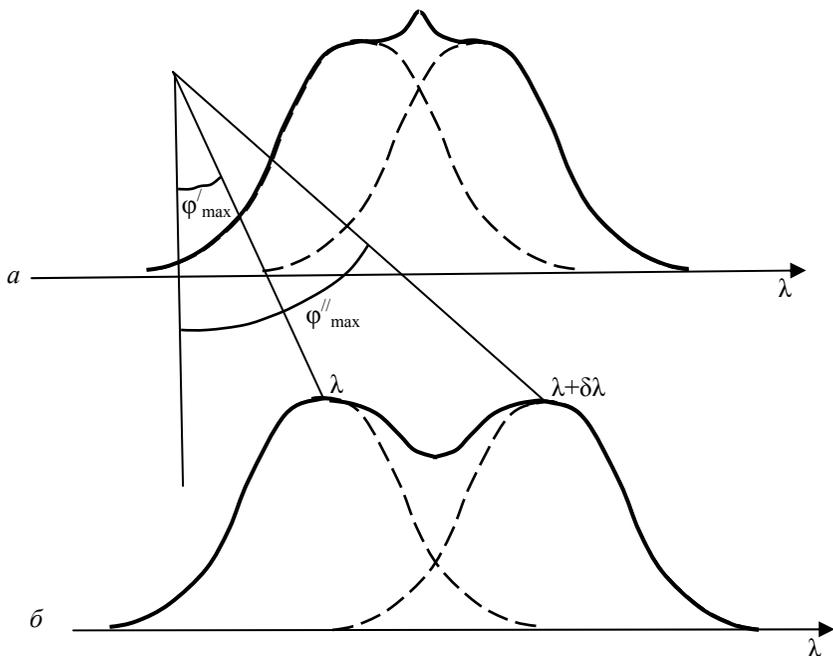


Рис. 37.6

Разрешающая сила равна произведению порядка дифракционного максимума на полное число штрихов решетки. Для данной дифракционной решетки разрешающая сила тем больше, чем больше **порядок** дифракционного максимума. Для данного максимума разрешающая сила тем больше, чем больше **число штрихов**  $N$ . Итак, как следует из формулы (37.21), разрешающая сила определяет минимальную разность длин волн  $\delta\lambda$ , при которой две линии воспринимаются в спектре раздельно.

Другой важнейшей характеристикой дифракционной решетки является **угловая дисперсия**:

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda},$$

где  $\delta\varphi$  – угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $\delta\lambda$ .

Взяв производную от левой и правой частей уравнения, выражающего условие главных максимумов для дифракционной решетки (37.18), получим

$$d \cos \varphi \delta\varphi = m \delta\lambda. \text{ Откуда } D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \text{ Для } \mathbf{\text{небольших}}$$

углов дифракции  $\cos \varphi \approx 1$ , поэтому  $D \approx \frac{m}{d}$ .

Таким образом, чем больше порядок максимума  $m$ , тем больше дисперсия, то есть угловое расстояние между двумя спектральными линиями в этом порядке  $m$  больше по сравнению с угловым расстоянием между теми же по цвету линиями в максимуме меньшего порядка (максимумы становятся шире с увеличением номера порядка  $m$ ). Дисперсия зависит и от периода решетки  $d$ : с увеличением периода она уменьшается.

**Линейной дисперсией** называется величина  $D = \frac{\delta l}{\delta\lambda}$ , где  $\delta l$  – линейное расстояние на экране между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $\delta\lambda$ .

Линейная дисперсия связана с фокусным расстоянием  $f$  линзы собирающей дифрагирующие лучи на экране, и угловой дисперсией  $D$  (при небольших углах  $\varphi$ ) соотношением

$$D_{\text{лин}} = fD \text{ или } D_{\text{лин}} = f \frac{m}{d}.$$

Современные технологии позволяют изготавливать дифракционные решетки с очень большим числом штрихов на 1 мм длины решетки. Например,  $500 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$ ,  $600 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$ ,  $1200 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$ . Решетка с

$N_1 = 1200 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$  обладает прекрасной разрешающей силой. Второй

порядок от такой решетки не наблюдается. Действительно,  $d \sin \varphi = m\lambda$ , где  $d = \frac{1}{N_1}$ . Положим  $m = 2$  и  $\lambda = 500$  нм. Тогда

$$\sin \varphi = m\lambda N_1 = 2 \cdot 50 \cdot 10^{-9} \cdot 1200 \frac{1}{10^{-3}} = 1,2. \quad \text{Но } \sin \varphi \leq 1, \text{ следова-}$$

тельно, второго порядка нет и вся дифракционная картина представляет собой два максимума первого порядка, симметрично расположенных относительно максимума нулевого порядка.

Выше была рассмотрена, так называемая, **одномерная** дифракционная решетка, работающая на пропускание света. Существуют более сложные решетки – двумерные и трехмерные (**пространственные**). Для образования двумерной решетки нужно сложить две одномерные так, чтобы их щели были взаимно перпендикулярны. Для каждой из этих решеток условия наблюдения главных максимумов предстанут в виде двух уравнений:

$$d_1 \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda; \quad (m_1 = 0, 1, 2, \dots); \quad (37.22)$$

$$d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda; \quad (m_2 = 0, 1, 2, \dots). \quad (37.23)$$

Измерив углы дифракции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и зная длину волны  $\lambda$ , можно найти по формулам (37.22), (37.23) периоды двумерной решетки  $d_1$  и  $d_2$ . Подобная двумерная структура дает дифракционную картину в виде симметрично расположенных пятен, каждому из которых соответствует два целочисленных значения  $m_1$  и  $m_2$ .

Набор равноотстоящих и параллельных друг другу двумерных решеток представляет собой трехмерную пространственную решетку. Такими естественными пространственными решетками являются все **кристаллические** тела. Период кристаллической решетки  $d$  (расстояние между соседними атомами) составляет около  $10^{-10}$  м (0,1 нм). Для наблюдения дифракции на решетке должно выполняться условие  $d > \lambda$ . Поэтому видимый свет с диапазоном длин волн 400÷750 нм на кристаллической решетке не дифрагирует. Условие  $d > \lambda$  выполняется только для **рентгеновских** лучей. Впервые дифракция рентгеновских лучей от кристаллов наблюдалась в 1913 г. в опыте М. фон Лауэ (1879–1960), В. Фридриха (1883–1968) и П. Книппинга (1883–1935).

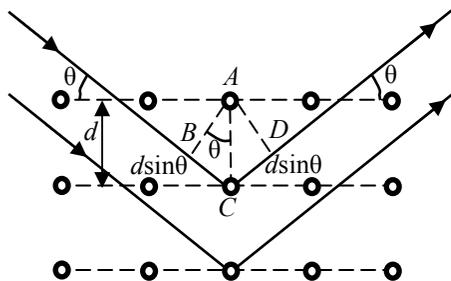


Рис. 37.7

Метод Ю.В. Вульфа (1863–1925), У.Г. Брэгга (1862–1942) и У.Л. Брэгга (1890–1971) позволяет рассчитать дифракционную картину от кристаллической решетки.

Рассечем кристалл рядом параллельных кристаллических плоскостей, расстояние между которыми  $d$  приблизительно равно  $10^{-10}$  м (рис. 37.7). Направим на кристалл плоскую электромагнитную волну под углом скольжения  $\theta$ . Отразившиеся от кристаллических плоскостей вторичные волны будут интерферировать, так как являются когерентными волнами. Разность хода между двумя лучами 1 и 2, отразившимися от соседних кристаллических плоскостей может быть найдена из  $\Delta ABC$ :  $BC = d \sin \theta$ , и, следовательно, разность хода  $BCD = 2d \sin \theta$ .

Поэтому направления, для которых получаются дифракционные максимумы, определяются условием:  $2d \sin \theta = \pm m \lambda$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Это соотношение называется **формулой Брэгга-Вульфа**.

Дифракция рентгеновских лучей позволяет решить две фундаментальные задачи:

1) изучение структуры кристалла – **рентгеноструктурный анализ**, то есть, изучая дифракцию рентгеновских лучей известной длины волны на кристаллических решетках неизвестной структуры, можно определить период решетки и изучить расположение атомов в кристалле;

2) исследование спектрального состава рентгеновского излучения – **рентгеноспектроскопия**, то есть, изучая дифракцию рентгеновского излучения неизвестной длины волны на кристаллах известной структуры, можно определять длины волн рентгеновского излучения.

## Контрольные вопросы и задания

1. Что такое дифракционная решетка? Для каких целей она используется?
2. Как зависит вид дифракционной картины от числа освещенных щелей решетки?
3. Что такое угловая дисперсия дифракционной решетки? От чего она зависит?
4. Сформулируйте критерий Рэлея для разрешающей способности дифракционной решетки.
5. Что определяет наибольший порядок главного максимума, который можно наблюдать на дифракционной решетке?
6. Поясните рисунком понятие кристаллических плоскостей. Покажите на нем межплоскостные расстояния.
7. Выведете формулу Вульфа–Брэгга.
8. Что такое рентгеноструктурный анализ?
9. Что такое рентгеноспектроскопия?

## 38. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Естественные источники света такие, например, как лампы накаливания, излучают **естественный** (неполяризованный свет). Действительно, под действием тока спираль лампы накаливания нагревается до высокой температуры. Электроны атомов материала спирали приобретают дополнительную энергию и переходят в атомах на более высокие энергетические уровни. Вновь возвращаясь на невозбужденные уровни, электроны излучают световые волны. Процесс излучения отдельного атома длится около  $10^{-8}$  с. Излучения огромного числа отдельных атомов накладываются друг на друга, образуя результирующую волну, в которой колебания светового вектора  $\vec{E}$  различных направлений перпендикулярны скорости распространения волны. Эти колебания равноправны и равновероятны (рис. 38.1). Такой свет называется **естественным**. В отличие от естественного света, **поляризован-**

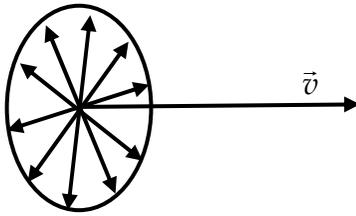


Рис. 38.1

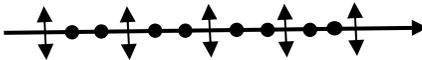


Рис. 38.2

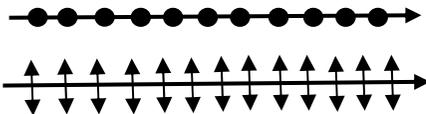


Рис. 38.3

**ным** называется свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом. В частности, в **частично поляризованном** свете колебание вектора  $\vec{E}$  совершается преимущественно в одном направлении.

На рисунке 38.2 представлен луч света, в котором преобладают колебания, перпендикулярные плоскости чертежа. Они обозначаются точками. Колебания в плоскости чертежа изображены двухсторонними стрелками.

**Плоскополяризованным**, или **линейнополяризованным** называется свет только с **одним** направлением колебания вектора  $\vec{E}$  (рис. 38.3).

Упорядоченность колебаний может проявляться в том, что вектор  $\vec{E}$  в процессе колебаний **поворачивается** вокруг луча. В результате конец вектора  $\vec{E}$  описывает эллипс или окружность. Тогда свет соответственно называется **эллиптически** поляризованным или поляризованным **по кругу**.

Плоскополяризованный свет из естественного можно получить с помощью приборов, называемых **поляризаторами**. Поляризаторы свободно пропускают колебания вдоль плоскости, которая называется **плоскостью поляризатора**, и задерживают свет с колебаниями светового вектора, перпендикулярными плоскости поляризатора.

На выходе из несовершенного поляризатора получается свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений. Такой свет называется **частично поляризованным**. Его можно рассматривать как **смесь** естественного и плоскополяризованного.

Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении поляризатора вокруг направления распространения света интенсивность прошедшего света будет изменяться в пределах от  $I_{\max}$  до  $I_{\min}$ , причем переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол, равный  $\frac{\pi}{2}$  (за один полный поворот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значение интенсивности).  
Выражение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (38.1)$$

называется **степенью поляризации**. Для плоскополяризованного света  $I_{\min} = 0$  и  $P = 1$ , для естественного  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ .

Пусть на пути распространения естественного света располагаются два совершенно одинаковых поляризатора  $P$  и  $P'$  (рис. 38.4). В такой схеме последовательного расположения поляризаторов второй поляризатор  $P'$  называется **анализатором**, так как он предназначен для анализа поляризованного света, прошедшего через первый поляризатор.

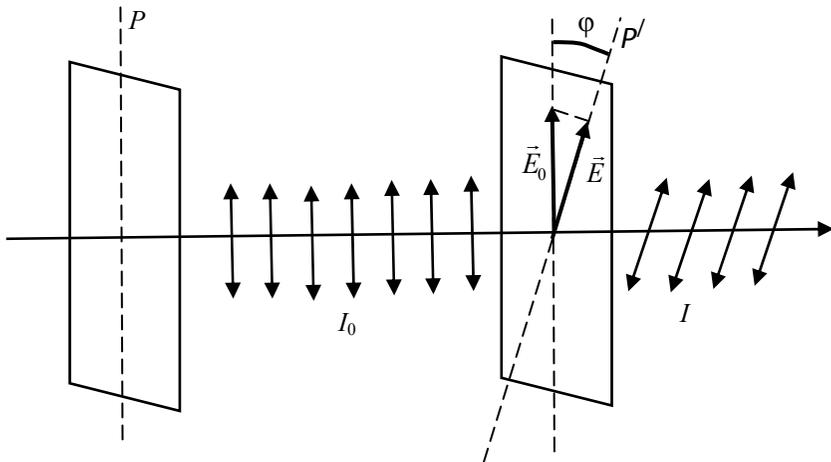


Рис. 38.4

В луче света, прошедшем через поляризатор  $P$ , будут присутствовать колебания светового вектора только в плоскости, параллельной плоскости этого поляризатора. А в луче света, прошедшем через анализатор  $P'$ , колебания вектора  $\vec{E}$  будут осуществляться в плоскости, параллельной плоскости анализатора. Предположим, что плоскости этих двух поляризаторов составляют между собой угол  $\varphi$  (рис. 38.5). Тогда амплитуда  $E$  колебания, прошедшего через анализатор будет связана с амплитудой  $E_0$  колебания, прошедшего через поляризатор  $P$ , соотношением:

$$E = E_0 \cos \varphi. \quad (38.2)$$

Здесь  $E$  является проекцией  $\vec{E}_0$  на направление плоскости пропускания анализатора. Возведем левую и правую части уравнения (38.2) в квадрат:

$$E^2 = E_0^2 \cos^2 \varphi.$$

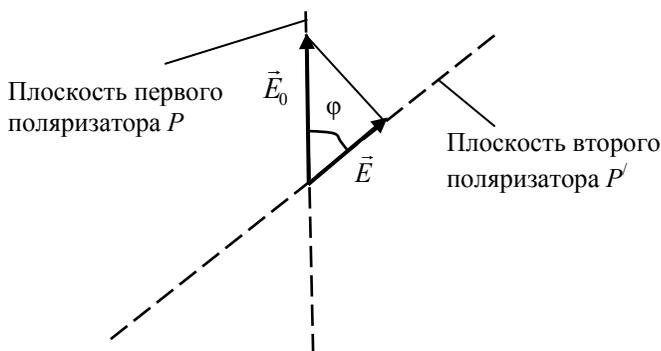


Рис. 38.5

С учетом, что интенсивность света  $I$  пропорциональна квадрату амплитуды волны, имеем

$$I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (38.3)$$

Соотношение (38.4) носит название **закона Малюса** (Э.Л. Малюс (1775–1812)). Закон Малюса гласит, что интенсивность света  $I$ , прошедшего анализатор, равна интенсивности света  $I_0$ , падающего на анализатор, умноженной на квадрат косинуса угла  $\varphi$  между плоскостями пропускания поляризаторов. Напоминаем, что  $I_0$  характеризует интенсивность плоскополяризованного света.

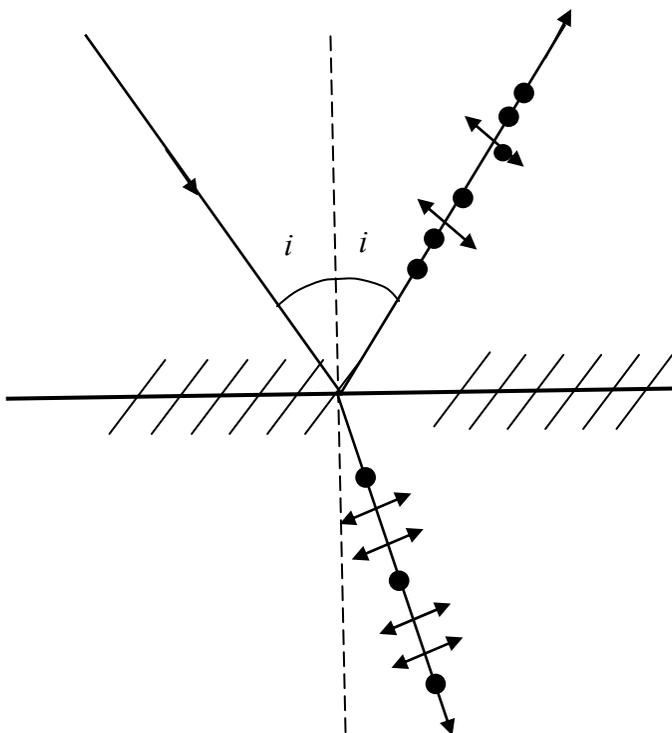


Рис. 38.6

### Отражение и преломление света на границе раздела двух диэлектриков

Предположим, что естественный свет падает на границу раздела двух любых диэлектрических сред под углом  $i$  (рис. 38.7). Свет частично отражается и частично преломляется. Причем оба луча – отраженный и преломленный в общем случае будут частично поляризованы. В отраженном луче будут преобладать колебания вектора  $\vec{E}$  перпендикулярные плоскости падения луча, в преломленном – в плоскости падения. Физически это объясняется характером взаимодействия света с веществом. Световая волна, попадая во вторую среду, вызывает вынужденные колебания электронов вещества.

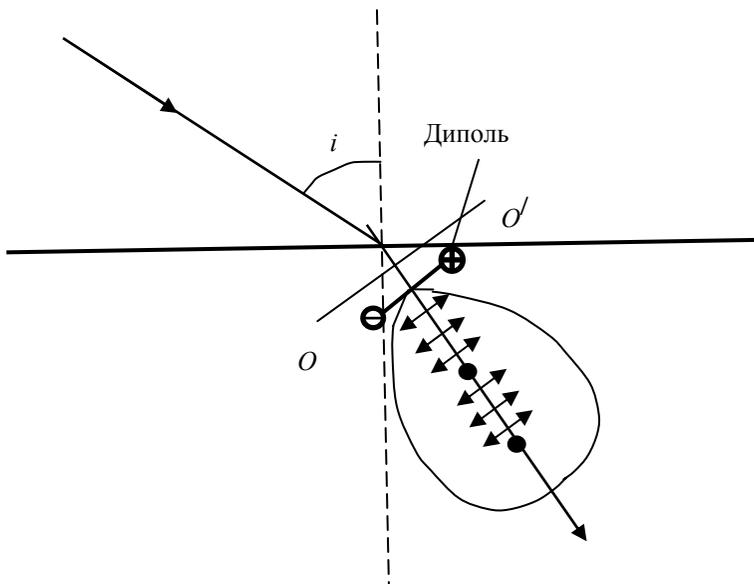


Рис. 38.7

Составляющая вектора  $\vec{E}$ , лежащая в плоскости падения, вызывает коллинеарные ей колебания. В результате возникают диполи, плечо которых лежит в плоскости падения (рис. 38.8). Эти диполи будут изучать волну с колебаниями вектора  $\vec{E}$  также в плоскости падения в направлении преломленного луча. Диполь, как известно, имеет диаграмму направленности, изображенную на рис. 38.9 и представляющую зависимость интенсивности излучения от угла  $\varphi$ . То есть, как видно из рис. 38.10, диполь в основном излучает в направлении, перпендикулярном оси диполя. В направлении, совпадающем с осью, диполь не излучает. Таким образом, внутри диэлектрика вторичные волны складываются с первичной (падающей) волной. Результирующая первичной и вторичной волн дает преломленную волну. Ось диполей, лежащих в плоскости падения  $OO'$ , должна быть перпендикулярна преломленному лучу. Максимальную энергию эти диполи будут излучать в направлении преломленного луча. Излучать в направлении отраженного луча они практически не будут, так как ось диполей составляет с этим направлением очень малый угол.

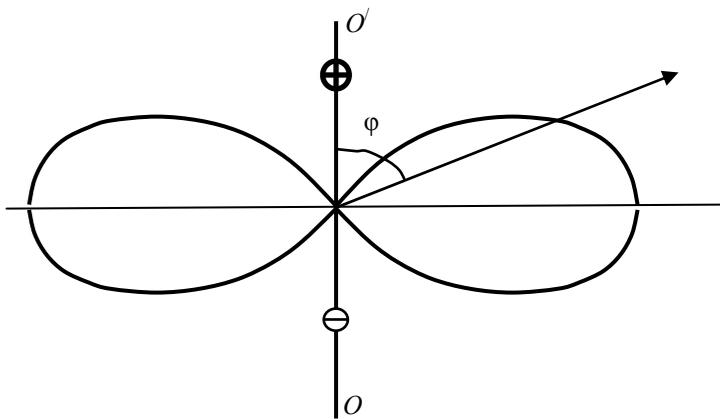


Рис. 38.8

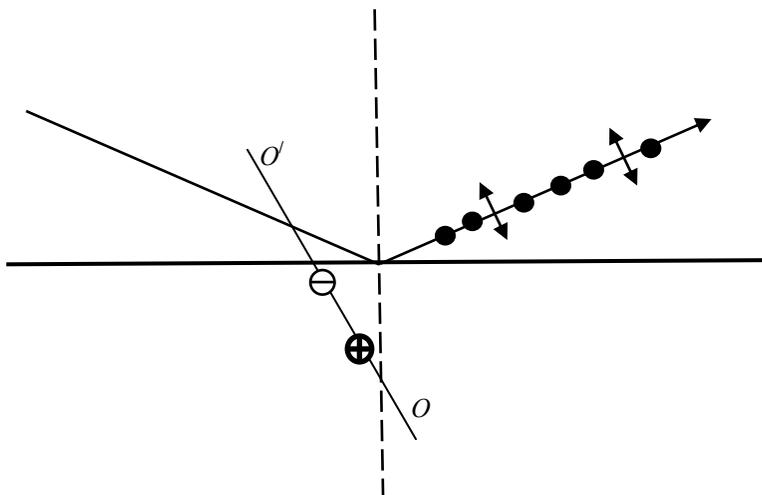


Рис. 38.9

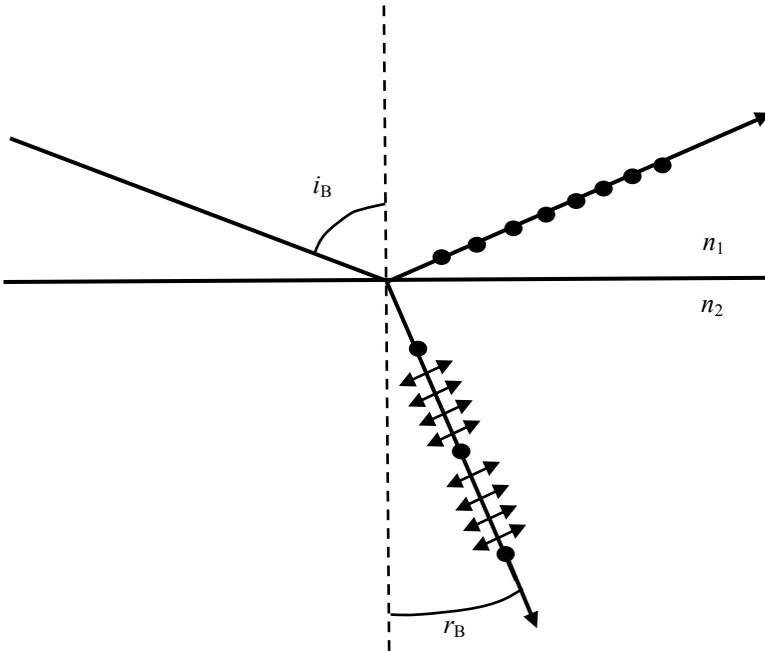


Рис. 38.10

Составляющая вектора  $\vec{E}$  падающей на диэлектрик волны, перпендикулярная плоскости падения, вызывает колебания зарядов в этой же плоскости. Ось  $OO'$  возникших диполей будет перпендикулярна плоскости падения луча (рис. 38.11). Такие диполи станут излучать в направлении отраженного луча. В падающем луче естественного света интенсивность различных колебаний одинакова.

Энергия этих колебаний распределяется между отраженной и преломленной волной. Поэтому, если в преломленном луче будет больше интенсивность колебания одного направления, то в силу закона сохранения энергии в отраженном луче должна быть больше интенсивность колебаний другого направления. Отсюда следует, что отраженный луч будет частично поляризован.

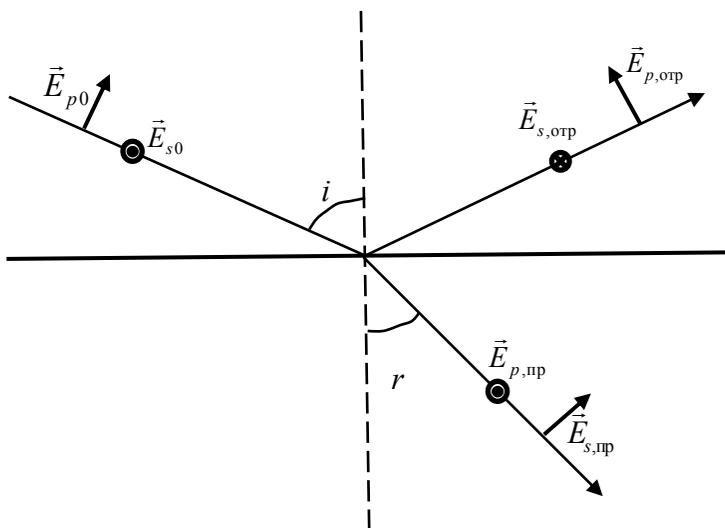


Рис. 38.11

**Закон Брюстера.** Как показывает опыт, свет, отраженный от границы, раздела двух диэлектрических сред, оказывается плоскополяризованным при таком угле падения  $i_B$ , при котором отраженный и преломленный лучи будут взаимно перпендикулярны (рис. 38.11). Это условие приводит к равенству:

$$i_B + r_B + \frac{\pi}{2} = \pi$$

или

$$i_B + r_B = \frac{\pi}{2}, \quad (38.4)$$

здесь  $r_B$  является углом преломления.

Из закона В. Снеллиуса (1580–1613)  $\frac{\sin i_B}{\sin r_B} = n_{12}$ , где

$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$  – относительный показатель преломления второй среды

относительно первой, и равенства (38.4) имеем

$$\frac{\sin i_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right)} = n_{12},$$

или

$$\operatorname{tg} i_B = n_{12}. \quad (38.5)$$

Уравнение (38.5) называется **законом Брюстера** (Д. Брюстер (1781–1868)).

**Формулы Френеля.** Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно получить с помощью **формул Френеля**. Они устанавливают соотношения между амплитудами падающей, преломленной и отраженной волн.

Всякую плоскую монохроматическую волну можно представить как совокупность двух плоских монохроматических волн той же частоты, в которых векторы  $\vec{E}$  колеблются вдоль двух **взаимно перпендикулярных** направлений

$$E_y = A_1 \sin(\omega t - kx + \alpha_1);$$

$$E_z = A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha_2).$$

Поэтому для нахождения закономерностей отражения и преломления рассмотрим колебания вектора  $\vec{E}$  в плоскости падения ( $p$ -волна) и в плоскости перпендикулярной плоскости падения ( $S$ -волна) (рис. 38.11).

Обозначим амплитуды напряженности для падающей, отраженной и преломленной  $p$ - и  $S$ -волн в точках поверхности раздела соответственно  $E_{p0}$ ;  $E_{p \text{ отр}}$ ;  $E_{p \text{ пр}}$ ;  $E_{S0}$ ;  $E_{S \text{ отр}}$ ;  $E_{S \text{ пр}}$ . Тогда формулы Френеля запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_{p \text{ отр}} &= E_{p0} \frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)} \\ E_{p \text{ пр}} &= E_{p0} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i+r)} \\ E_{S \text{ отр}} &= -E_{S0} \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \\ E_{S \text{ пр}} &= E_{S0} \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \end{aligned} \right\} \quad (38.4)$$

## Контрольные вопросы и задания

1. Какое физическое явление называется «поляризация света»?
2. Как отличить естественный свет от линейно поляризованного света?
3. Изобразите на рисунке диаграмму направленности излучения гармонического осциллятора.
4. Объясните поляризацию света, отраженного под углом Брюстера.
5. Как поляризован свет, отраженного под углом Брюстера?
6. Какие величины связывают между собой формулы Френеля?

## 39. ОПТИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ

**Двойное лучепреломление.** При прохождении светового луча через **анизотропные** тела – кристаллы, механические, электрические, оптические и другие свойства которых зависят от **направления** внутри кристалла, световой луч разбивается на два. Это явление получило название **двойного лучепреломления**. По выходе из кристалла эти два луча оказываются пространственно разделенными и поляризованными в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 39.1). Для одного из них при изменении угла падения отношение  $\frac{\sin i}{\sin r}$  остается постоянным ( $n_o = \text{const}$ ). Такой луч называется **обыкновенным** ( $o$ ). Плоскость колебания светового вектора в обыкновенном луче перпендикулярна **главному сечению** кристалла.

Для другого – **необыкновенного** – луча ( $e$ ), при изменении угла падения отношение  $\frac{\sin i}{\sin r}$  не остается постоянным ( $n_e \neq \text{const}$ ). Плоскость колебания вектора  $\vec{E}$  для этого луча лежит в плоскости

главного сечения кристалла. Главным сечением кристалла для данного светового луча называется плоскость, содержащая световой луч и **оптическую ось** кристалла. Оптической осью называется направление в кристалле, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи идут не разделяясь. Следует помнить, что через кристалл можно провести бесчисленное множество главных сечений. Существуют кристаллы, имеющие очень сложную структуру.

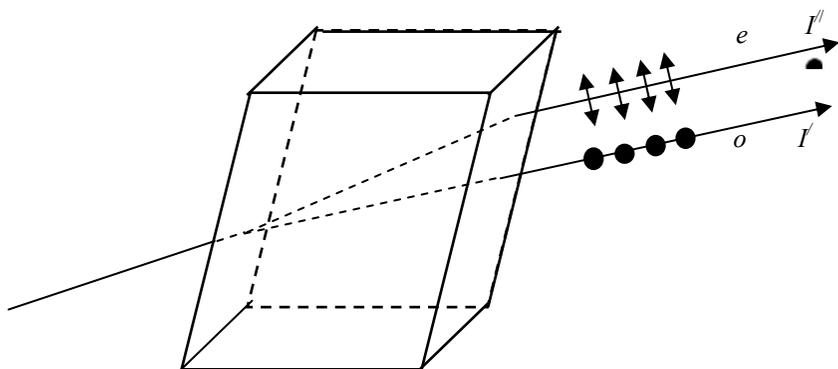


Рис. 39.1

В настоящем разделе рассматриваются лишь те кристаллы, которые имеют только **одно** направление, вдоль которого не происходит двойного лучепреломления. Такие кристаллы называются **одноосными**.

Типичными представителями одноосных кристаллов являются исландский шпат и кварц. В большинстве одноосных кристаллов яркость обыкновенного и необыкновенного лучей одинакова. Однако в кристалле турмалина толщиной около 1 мм обыкновенный луч практически полностью поглощается. Такое различное поглощение называется **дихроизмом**. Это свойство турмалина используется для получения поляризованного света.

Явление двойного лучепреломления объясняется исключительно **анизотропией** кристалла. В естественном луче света, падающем на кристалл, все направления колебания вектора  $\vec{E}$  равноценны и равновероятны. Составляющая светового вектора, перпендикулярная главному сечению кристалла, вызывает колебания электронов вещества ей коллинеарные. Образующиеся диполи излучают вторичные волны, у которых вектор  $\vec{E}$  также перпендикулярен главному сечению кристалла. Эти вторичные волны, интерферируя между собой и с составляющей проходящего луча, имеющей то же направление вектора  $\vec{E}$ , образуют обыкновенный луч. В этом луче вектор  $\vec{E}$ , будучи перпендикулярен главному сечению кристалла, будет перпендикулярен и оптической оси независимо от направления его распространения внутри кристалла. В одноосных кристаллах все направления, перпендикулярные оптической оси, равноценны, поэтому на обыкновенном луче анизотропные свойства кристалла не сказываются. Поэтому он распространяется внутри кристалла с некоторой постоянной скоростью ( $v=\text{const}$ ,  $n_o=\text{const}$ ). Рисунок 39.2 показывает, что обыкновенный луч, распространяясь в трех различных (1,2,3) направлениях, проходит за одно и то же время одинаковые расстояния. Колебания вектора  $\vec{E}$ , в нем изображены точками. Таким образом, волновой поверхностью обыкновенного луча является **сфера А** (рис. 39.2).

Составляющая вектора  $\vec{E}$ , лежащая в плоскости главного сечения вызывает колебания диполей в этой же плоскости. Диполи излучают волны с колебанием светового вектора в плоскости главного сечения кристалла. Эти волны, интерферируя с проходящей волной, образуют необыкновенный луч. Колебания вектора  $\vec{E}$ , в необыкновенном луче в зависимости от направления распространения в кристалле составляют различный угол с оптической осью. Поэтому в различных направлениях этот луч будет распространяться с различной скоростью. В частности, для **положительного** кристалла (рис. 39.2), (в котором скорость необыкновенного луча **меньше** скорости обыкновенного:  $v_e < v_o$ , и показатель преломления необыкновенного луча больше показателя преломления обыкновенного луча:  $n_e > n_o$ ), скорость необыкновенного луча будет наибольшей для направления 1 и наименьшей для

направления 3 ( $v_e \neq \text{const}$ ,  $v_o \neq \text{const}$ ). Колебания светового вектора в необыкновенном луче изображены на рис. 39.2 двухсторонними стрелками. Волновой поверхностью для необыкновенного луча является **эллипсоид** вращения  $B$  (рис. 39.2). Для положительного кристалла эллипсоид вращения  $B$  вписан в сферу  $A$ . Для отрицательного кристалла, в котором  $v_e > v_o$  ( $n_e < n_o$ ), наоборот, сфера вписывается в эллипсоид.

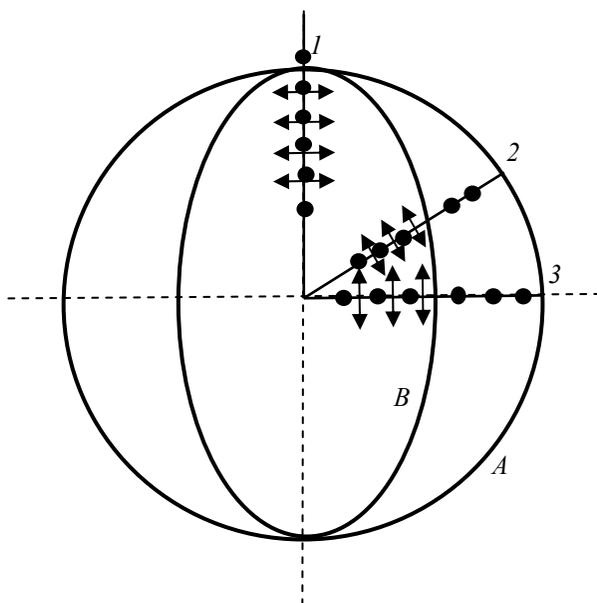


Рис. 39.2

Таким образом, из-за различия скоростей, а, следовательно, и показателей преломления  $n_o = c/v_o$ ,  $n_e = c/v_e$  у обыкновенного и необыкновенного лучей при их распространении внутри кристалла, оба этих луча оказываются пространственно разделенными. Возникает явление двойного лучепреломления. И только вдоль оптической оси они распространяются с одинаковой скоростью, не разделяясь, так как колебания вектора  $\vec{E}$  в том и другом луче перпендикулярны оптической оси кристалла. Следует подчеркнуть, что именно «необыкновенные» свойства необыкновенного луча приводят к явлению двойного лучепреломления. Именно на этом луче сказываются анизотропные свойства кристалла.

Ход обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле можно изобразить на основе принципа Гюйгенса. Пусть на положительный кристалл с **оптической осью  $AA'$ , лежащей в плоскости рисунка**, падает плоская волна (рис. 39.3). Фронт волны  $AB$  сначала возбуждает в кристалле в точке  $A$  вторичные волны, и в кристалле начинают распространяться два луча  $e$  и  $o$ , соответственно с волновыми поверхностями в виде эллипсоида и сферы. К тому времени, когда фронт волны достигнет поверхности кристалла в точке  $C$ , волновые поверхности лучей, распространяющихся из точки  $A$  примут вид, изображенный на рис. 39.3. Около всех точек, промежуточных между  $A$  и  $C$ , возникнут также волновые поверхности, но меньших размеров. Согласно принципу Гюйгенса огибающая всех вторичных волн показывает новое направление распространения волны. Огибающими вторичных волн в примере являются две плоскости, перпендикулярные плоскости рисунка со следами на нем  $EC$  и  $DC$ . Эти плоскости являются касательными к волновым поверхностям соответственно необыкновенной и обыкновенной волны и являются фронтами этих преломленных волн. Линия, проведенная через точки  $A$  и  $E$ , показывает направление распространения необыкновенного луча, а линия, проведенная через точки  $A$  и  $D$  ход обыкновенного луча. Луч  $AE$  в настоящем примере не нормален к волновому фронту.

**Для случая, когда оптическая ось  $AA'$  параллельна преломляющей грани кристалла и перпендикулярна к плоскости падения**, картина построения хода обыкновенного и необыкновенного лучей представлена на рис. 39.4. Волновыми поверхностями соответственно необыкновенного и обыкновенного лучей являются эллипсоид и сфера. Следы пересечения этих фигур с плоскостью рисунка дают две окружности: меньшего диаметра для положительного кристалла – след эллипсоида, большего – сферы. По аналогии с предшествующим примером касательные  $EC$  и  $DC$  к двум окружностям дают точки  $E$  и  $D$ , через которые проводятся два луча необыкновенный –  $e$  и обыкновенный –  $o$ .

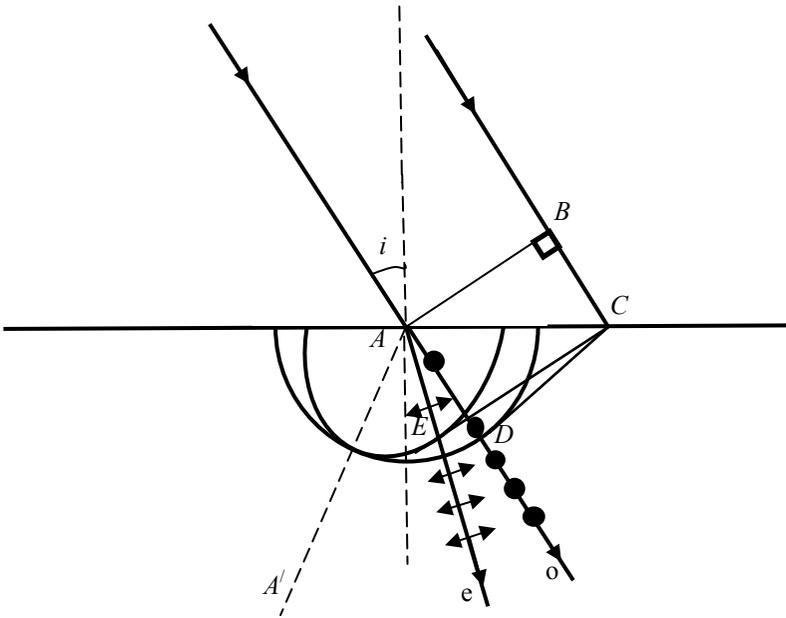


Рис. 39.3

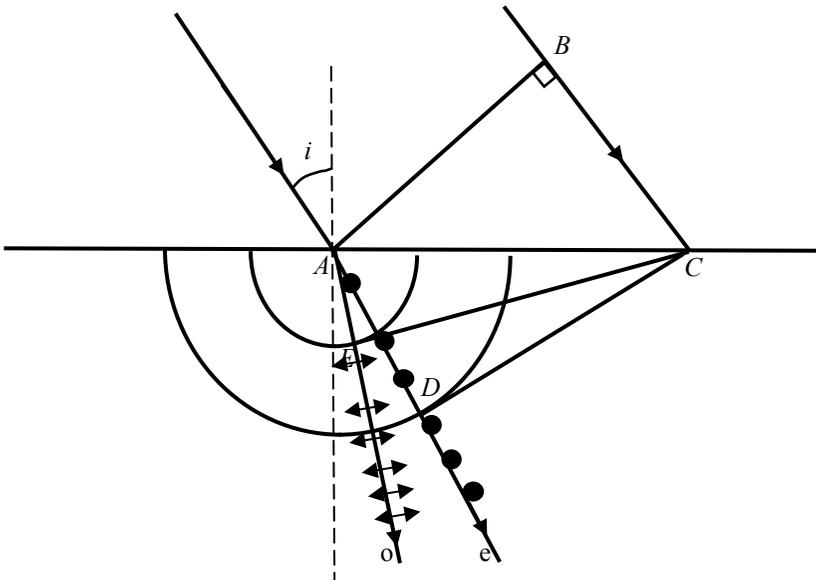


Рис. 39.4

Для **получения** из естественного света **плоскополяризованного** света можно воспользоваться либо поляризацией при отражении под углом Брюстера, либо двойным лучепреломлением в кристалле. Плоскополяризованный свет при отражении под углом Брюстера мало интенсивен. При двойном лучепреломлении при небольшой толщине кристалла расхождение плоскополяризованных лучей мало. Поэтому для получения плоскополяризованного света пользуются более сложными системами кристаллов, в частности, **призмой Николя**.

У. Николь изобрел призму в 1828 г. Она вырезается из кристалла **исландского шпата** и в поперечном сечении имеет форму ромба (рис. 39.5). По плоскостям  $BD$  призма разрезается и склеивается **канадским бальзамом**, показатель преломления которого ( $n_{к.б.} = 1,550$ ) имеет **промежуточное** значение между показателями преломления для необыкновенного ( $n_e = 1,515$ ) и обыкновенного ( $n_o = 1,658$ ) лучей ( $n_e < n_{к.б.} < n_o$ ). Благодаря такому значению показателя преломления канадского бальзама и специальной ромбоидальной конструкции призмы, обыкновенный луч испытывает полное внутреннее отражение на поверхности канадского бальзама и поглощается в оправе призмы. Необыкновенный луч свободно проходит через слой канадского бальзама и после преломления на грани  $CD$  выходит из призмы.

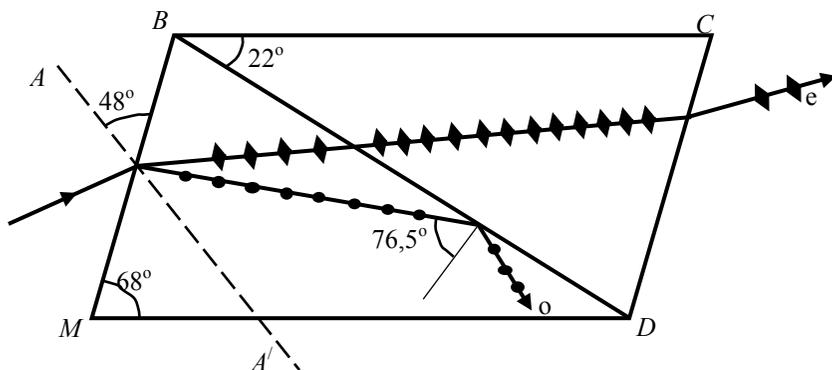


Рис. 39.5

Для получения поляризатора с большой площадью поверхности применяют поляризующие пленки – **поляроиды**. Они представляют собой пленку **целлулоида**, на которую нанесено большое число микроскопических одинаково ориентированных кристалликов сильно дихроичного вещества **герпатита** (сернокислового йод-хинина). Такая пленка с толщиной слоя кристаллов герпатита в 0,3 мм полностью поглощает один из лучей.

**Пример 1.** На поляризатор падает естественный свет интенсивностью  $I_0$ . Какова интенсивность света, вышедшего из поляризатора?

Предположим, что амплитуда светового вектора в плоской электромагнитной волне, падающей на поляризатор равна  $E_0$  и вектор  $\vec{E}_0$  составляет угол  $\beta$  с плоскостью поляризатора. Тогда через поляризатор проходит только составляющая  $\vec{E}_{\parallel}$ , определяемая соотношением:

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_0 \cos \beta. \quad (39.1)$$

Возведем левую и правую части соотношения в квадрат, и получим:

$$\vec{E}_{\parallel}^2 = \vec{E}_0^2 \cos^2 \beta. \quad (39.2)$$

В естественном свете, падающем на поляризатор, все значения  $\beta$  от 0 до  $2\pi$  равновероятны, так как вектор  $\vec{E}_0$  колеблется во всевозможных направлениях в плоскости, перпендикулярной направлению скорости волны. Поэтому равенство (39.2) нужно усреднить по  $\beta$ . Следовательно,  $\vec{E}_{\parallel}^2 = \vec{E}_0^2 \langle \cos^2 \beta \rangle$ .

Для определения  $\langle \cos^2 \beta \rangle$  используем теорему о среднем значении функции интегрального исчисления, которая гласит: **среднее значение функции на некотором отрезке равно интегралу от этой функции по этому отрезку, деленному на длину отрезка**

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Применительно к  $\langle \cos^2 \beta \rangle$  имеем:

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \beta \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\beta}{2} d\beta = \frac{1}{4\pi} \left( \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом:  $E_{\parallel}^2 = \frac{1}{2} E_0^2$ . Учитывая, что  $I \sim E^2$ , получим:

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} I_0. \quad (39.3)$$

**Вывод:** интенсивность плоскополяризованного света, вышедшего из поляризатора равна **половине** интенсивности **естественного** света, падающего на поляризатор.

**Пример 2.** Два поляризатора расположены так, что угол между плоскостями этих поляризаторов  $\varphi = 60^\circ$ . Во сколько раз уменьшается интенсивность света при прохождении через оба поляризатора  $P_1$  и  $P_2$ ? При прохождении каждого из поляризаторов потери на отражение и поглощение света  $\eta = 5\%$ .

Если бы не было потерь на отражение и преломление, то при прохождении светом первого поляризатора  $P_1$ , интенсивность света составила бы

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0.$$

С учетом названных потерь:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - \eta). \quad (39.4)$$

Расчет интенсивности света  $I_2$ , прошедшего второй поляризатор  $P_2$  нужно провести с учетом потерь согласно закону Малюса

$$I_2 = I_1 (1 - \eta) \cos^2 \varphi. \quad (39.5)$$

Подстановка выражения для интенсивности света  $I_1$  (39.4) в уравнение (39.5) дает формулу для определения  $I_2$ :

$$I_2 = I_0 (1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi$$

или

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1 - \eta)^2 \cos^2 \varphi} = 8,86.$$

**Пример 3.** На пути частично поляризованного пучка света с интенсивностью  $I_1$  поместили николю –  $N$ . При его повороте на угол  $\alpha = 60^\circ$  вокруг луча из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света  $I_2$  уменьшилась в  $n = 3$  раза. Найдите степень поляризации падающего света.

Интенсивность частично поляризованного света естественного света  $I_1$  падающего на поляризатор, равна сумме двух интенсивностей – интенсивности естественного света  $I_0$ , и интенсивности плоско-поляризованного света  $I'_1$ :  $I_1 = I_0 + I'_1$ . Поэтому в положении наибольшего пропускания через поляризатор пройдет свет с интенсивностью:

$$I_{\max} = \frac{1}{2}I_0 + I'_1, \quad (39.6)$$

а в положении наименьшего пропускания – свет с интенсивностью:

$$I_{\min} = \frac{1}{2}I_0. \quad (39.7)$$

По условию задачи

$$n = \frac{I_{\max}}{I_{\text{промеж.}}}, \quad (39.8)$$

где  $I_{\text{промеж.}}$  – интенсивность света, прошедшего через поляризатор, повернутый на угол  $\alpha$  из положения наибольшего пропускания света. Причем

$$I_{\text{промеж.}} = \frac{1}{2}I_0 + I'_1 \cos^2 \alpha. \quad (39.9)$$

Второе слагаемое в уравнении (39.9) с помощью теоремы Малюса определяет интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через поляризатор, повернутый на угол  $\alpha$ .

Из соотношений (39.6), (39.8) и (39.9) следует, что

$$n = \frac{\frac{1}{2}I_0 + I'_1}{\frac{1}{2}I_0 + I'_1 \cos^2 \alpha}, \text{ откуда}$$

$$I_0 = \frac{2I'_1(1 - n \cos^2 \alpha)}{n - 1}. \quad (39.10)$$

По определению степеней поляризации света (38.1)  

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$
 Решая совместно уравнения (39.6), (39.8) и (39.10), имеем для падающего света:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\frac{1}{2}I_0 + I'_1 - \frac{1}{2}I_0}{\frac{1}{2}I_0 + I'_1 + \frac{1}{2}I_0} = \frac{I'_1}{I_0 + I'_1} = \\
 &= \frac{I'_1}{\frac{2I'(1 - n \cos^2 \alpha)}{n-1} + I'_1} = \frac{n-1}{1 - n \sin 2\alpha} = 0,8.
 \end{aligned}$$

### Контрольные вопросы и задания

1. С чем связана оптическая анизотропия?
2. Что такое оптическая ось кристалла?
3. Какой луч называют обыкновенным, а какой – необыкновенным и почему?
4. В каком направлении фазовые скорости обыкновенного и необыкновенного лучей отличаются наиболее сильно?
5. Какой кристалл называют положительным, а какой – отрицательным?
6. Поясните построение Гюйгенса для обыкновенного и необыкновенного лучей.
7. Нарисуйте примерный ход лучей в призме Николя.
8. Какая особенность исландского шпата позволяет отделить обыкновенный луч от необыкновенного в призме Николя?
9. Какова внутренняя структура поляризующей пленки?
10. Какое свойство кристаллов герпатита используется в поляроидах?

## 40. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

При падении **естественного** света на анизотропный кристалл из-за явления двойного лучепреломления световой луч разделяется на два луча – обыкновенный ( $o$ ) и необыкновенный ( $e$ ). В общем случае эти лучи приобретают **оптическую разность хода**  $\Delta$  и соответствующую ей разность фаз  $\delta$ , но интерферировать не могут, так как содержат колебания, принадлежащие разным цугам волн, испускаемых отдельными атомами.

Иначе обстоит дело при падении **плоскополяризованного** света на анизотропный кристалл. Луч так же делится на два, но уже когерентных луча – ( $o$ ) и ( $e$ ). Плоскости колебаний у них взаимно перпендикулярны. Они могут интерферировать, но при условии, что плоскости колебаний у них совпадают.

Итак, для наблюдения интерференции плоскополяризованного света нужно провести следующий опыт (рис. 40.1 (а)):

1) на пути луча естественного света поставить первый поляризатор ( $P$ ) и с его помощью получить плоскополяризованный свет;

2) далее на пути уже плоскополяризованного света с напряженностью  $\vec{E}$  поставить кристаллическую пластину для деления одного луча на два ( $o$ ) и ( $e$ ), из-за разной скорости распространения в кристалле лучи ( $o$ ) и ( $e$ ) приобретают разность фаз  $\delta$ ;

3) наконец, после кристаллической пластинки на пути лучей ( $o$ ) и ( $e$ ) нужно поставить второй поляризатор ( $\vec{P}$ ) с целью сведения колебаний этих лучей в одну плоскость – плоскость второго поляризатора (рис. 40.1 (б)). Результат интерференции зависит от длины волны света, падающего на первый поляризатор, и проявляется в виде ослабления или усиления интенсивности света с напряженностью  $\vec{E}$ .

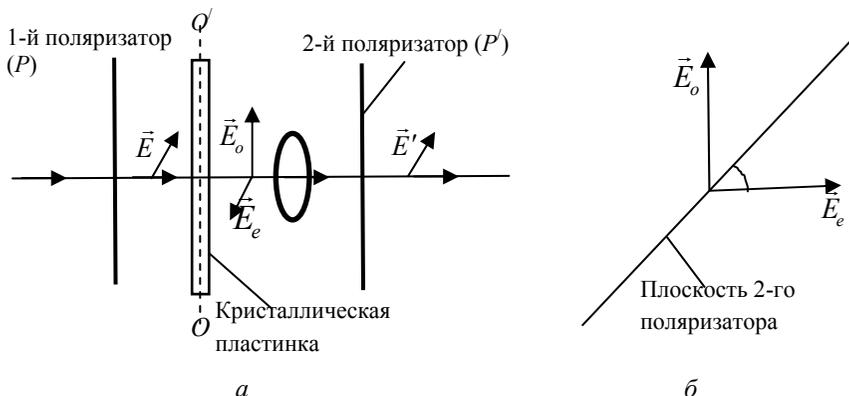


Рис. 40.1

Рассмотрим прохождение плоскополяризованного света через кристаллическую пластинку. На выходе из пластинки два когерентных световых колебания (лучи  $(o)$  и  $(e)$ ) характеризуются соответственно напряженностями  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$ . Колебания осуществляются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях согласно уравнениям

$$E_e = A_1 \cos \omega t; \quad (40.1)$$

$$E_o = A_2 \cos(\omega t + \delta), \quad (40.2)$$

где  $\omega$  – частота, а  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды соответствующих колебаний. Результирующая напряженность является суммой напряженностей  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$ . (рис. 40.2). Угол  $\varphi$  между направлениями векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_o}{E_e} = \frac{A_2 \cos(\omega t + \delta)}{A_1 \cos \omega t},$$

при условии, что амплитуды колебаний равны  $A_1 = A_2$  и разность фаз  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg} \omega t$ , или  $\varphi = \pm \omega t$ . Направление распространения света – от «нас» в плоскость чертежа (рис. 40.2).

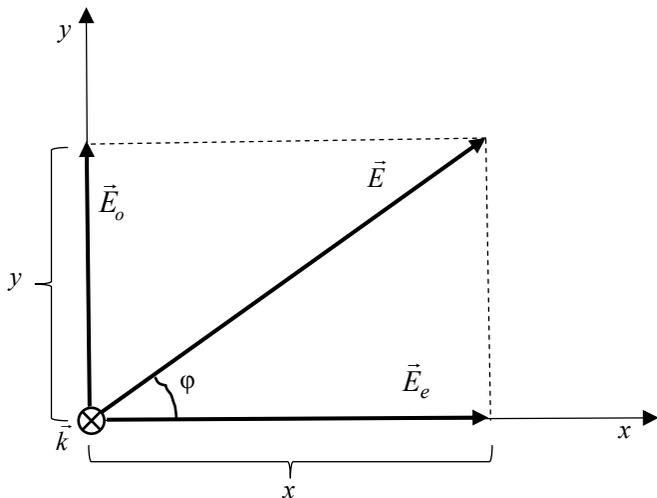


Рис. 40.2

Это означает, что плоскость колебаний результирующего вектора  $\vec{E}$  поворачивается вокруг направления луча с угловой скоростью, равной частоте колебания  $\omega$ . Имея ввиду этот поворот вектора  $\vec{E}$ , принято говорить об **эллиптической** поляризации световой волны или поляризации **по кругу**, а если поворот отсутствует говорят о **плоскополяризованном** свете. Сложим два колебания с напряженностями  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$ . Для упрощенного анализа и более наглядного представления окончательных формул обозначим:  $E_e = x$ ;  $E_o = y$ ;  $A_1 = a$ ;  $A_2 = b$ . С учетом приведенных обозначений перепишем уравнения (40.1) и (40.2) в виде

$$x = a \cos \omega t; \quad (40.3)$$

$$y = b \cos(\omega t + \delta). \quad (40.4)$$

Из уравнения (40.3) найдем:

$$\cos \omega t = \frac{x}{a}. \quad (40.5)$$

Возведем в квадрат левую и правую часть уравнения (40.5)

$$\cos^2 \omega t = \frac{x^2}{a^2}, \text{ или: } 1 - \sin^2 \omega t = \frac{x^2}{a^2}, \text{ откуда:}$$

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (40.6)$$

Из уравнения (40.4) имеем  $\cos(\omega t + \delta) = y/b$ , или  $\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta = y/b$ . С учетом уравнений (40.15) и (40.16) получим

$$\frac{x}{a} \cdot \cos \delta \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin \delta = \frac{y}{b}. \quad (40.7)$$

Преобразуем уравнение (40.17) к виду:

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \cos \delta + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \delta = \sin^2 \delta - \frac{x^2}{a^2} \sin^2 \delta$$

или

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} \frac{y}{b} \cos \delta + \frac{x^2}{a^2} = \sin^2 \delta. \quad (40.8)$$

Если разность фаз  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ , то уравнение (40.8) преобразуется

**в уравнение эллипса**

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad (40.9)$$

и свет будет **эллиптически** поляризован (конец вектора  $\vec{E}$  описывает эллипс).

При  $a = b$  уравнение (40.9) станет уравнением **окружности** и, следовательно, свет будет поляризован **по кругу** (конец вектора  $\vec{E}$  описывает окружность). Если  $\delta = 0$  и  $\delta = \pm \pi$  уравнение (40.9) преобразуется в уравнение **прямой линии**:

$$\frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} + \frac{x^2}{a^2} = 0$$

или

$$\left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 = 0, \text{ откуда } y = \frac{b}{a} x.$$

Следовательно, результирующее колебание совершается в фиксированном направлении – волна называется **плоскополяризованной**.

Напомним еще раз, что  $x = E_e$ ;  $y = E_o$ ;  $a = A_1$ ;  $b = A_2$ .

Таким образом после кристаллической пластинки свет будет в **общем** случае **эллиптически** поляризован, но в **частных** случаях, как описано выше, будет либо **плоскополяризован**, либо поляризован **по кругу**.

Вновь вернемся к опыту по наблюдению интерференции поляризованного света (рис. 40.1 а). Предположим, что плоскости поляризаторов  $P$  и  $P'$  совпадают («параллельны»), а угол  $\varphi$  между плоскостью поляризатора  $P$  и оптической осью  $OO'$  кристаллической пластинки составляет угол  $\varphi = \pi/4$ . Тогда на выходе из пластинки два взаимно перпендикулярных вектора  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  образуют стороны прямоугольника, в котором  $|\vec{E}|$  является диагональю (рис. 40.3).

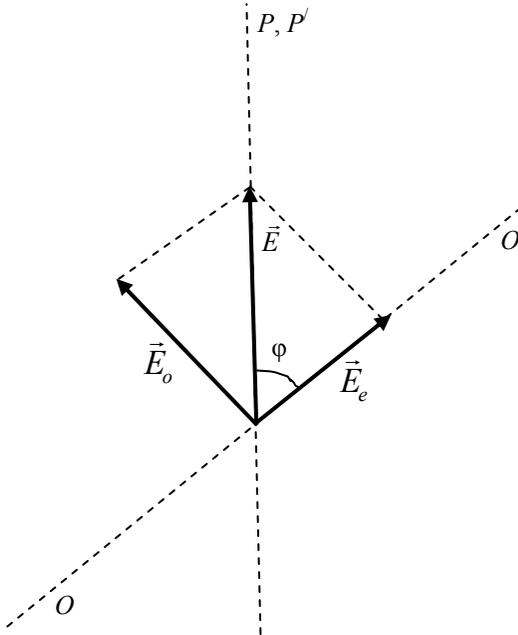


Рис. 40.3

Из рисунка 40.3 следует, что

$$E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = \frac{E\sqrt{2}}{2}, \quad (40.10)$$

где  $E$  – амплитуда плоскополяризованной волны, вышедшей из первого поляризатора. Через второй поляризатор  $P'$  пройдут составляющие векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  вдоль плоскости поляризатора  $P'$

$$E'_o = E_o \cos \frac{\pi}{4}, \quad E'_e = E_o \cos \frac{\pi}{4}.$$

С учетом уравнения (40.10) получим:

$$E'_o = \frac{E}{2} \quad \text{и} \quad E'_e = \frac{E}{2}. \quad (40.11)$$

Графический метод сложения амплитуд (рис. 40.4) приводит к следующему выражению для амплитуды  $E_{\parallel}$  результирующей волны, прошедшей поляризатор  $P'$  для случая «параллельных» поляризаторов.

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{4} E_o'^2 + \frac{1}{4} E_e'^2 - 2E_o'E_e' \cos(180^\circ - \delta).$$

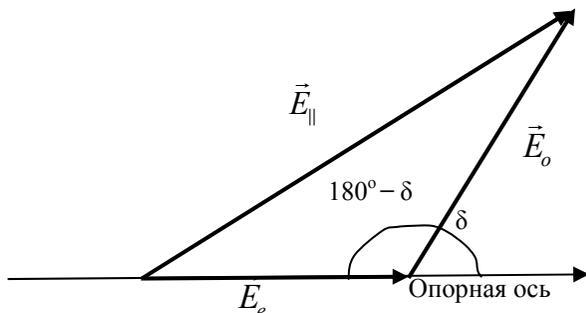


Рис. 40.4

Приняв во внимание соотношения (40.11), имеем

$$E_{\parallel}^2 = \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{4} E^2 + \frac{1}{2} E^2 \cos \delta = \frac{1}{2} E^2 (1 + \cos \delta) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому

$$I'_{\parallel} = I \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (40.12)$$

При поляризаторах  $P$  и  $P'$  расположенных так, что их плоскости пропускания  $P$  и  $P'$  взаимно перпендикулярны (скрещенных поляризаторах) (рис. 40.5) проекции векторов  $\vec{E}_o$  и  $\vec{E}_e$  на направление  $P'$  имеют разные знаки. Это означает, что в дополнении к разности фаз  $\delta$  между колебаниями  $E'_o$  и  $E'_e$  возникает дополнительная разность фаз, равная  $\pi$ . И амплитуда результирующей волны  $E'_{\perp}$ , прошедшей второй поляризатор, определится из соотношения:

$$E'^2_{\perp} = E'^2_o + E'^2_e + 2E'_o E'_e \cos(\delta + \pi).$$

Положим, что в этом случае также (рис. 40.6)

$$E_o = E_e = E \cos \frac{\pi}{4} = \frac{E\sqrt{2}}{2}, \text{ и } E'_o = E_o \cos \frac{\pi}{4}, \quad E'_e = E_e \cos \frac{\pi}{4}.$$

Тогда

$$E'^2_{\perp} = \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{4}E^2 + \frac{1}{2}E^2 \cos(\delta + \pi) = \frac{1}{2}E^2(1 - \cos \delta) = E^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

или

$$I'_{\perp} = I \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (40.13)$$

Таким образом, интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего второй поляризатор, зависит от разности фаз колебаний в обыкновенном и необыкновенном лучах. Из формул (40.12) и (40.13) следует, что интенсивности  $I'_{\parallel}$  и  $I'_{\perp}$  называются «дополнительными», так как в сумме они дают интенсивность  $I$ . В частности, при  $\delta = 2m\pi$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$  интенсивность  $I'_{\parallel}$  будет равна  $I$ , а интенсивность  $I'_{\perp}$  обратится в нуль. При  $\delta = (2m+1)\pi$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$  интенсивность  $I'_{\parallel}$  будет равна нулю, а интенсивность  $I'_{\perp}$  достигнет значения  $I$ .

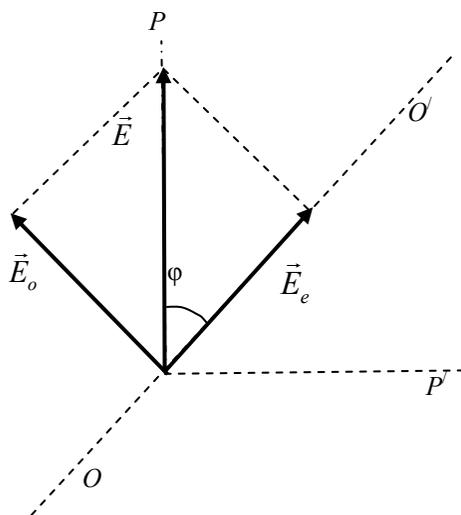


Рис. 40.5

Разность фаз  $\delta$  и оптическая разность хода  $\Delta$  лучей  $o$  и  $e$  на выходе из кристаллической пластинки связаны соотношением

$$\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}, \quad (40.14)$$

где  $\lambda$  – длина световой волны в вакууме, причем  $\Delta = (n_o - n_e)d$ , где в свою очередь  $n_o$  и  $n_e$  – соответственно показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, а  $d$  – толщина пластинки.

Вырезанная параллельно оптической оси  $OO'$  пластинка (рис. 40.1 а), для которой выполняется условие

$$(n_o - n_e)d = m\lambda + \frac{\lambda}{4} \quad (40.15)$$

(здесь  $m = 0, 1, 2, \dots$ ), называется **пластинкой в четверть волны**. При прохождении через такую пластинку лучи  $o$  и  $e$  приобретают разность фаз  $\delta = 2m\pi$ .

Пластинка, для которой выполняется условие

$$(n_o - n_e)d = m\lambda + \frac{\lambda}{2}, \quad (40.16)$$

называется **пластинкой в полволны** и т.д.

Напоминаем, что для отрицательного кристалла  $n_o > n_e$ , а для положительного – наоборот:  $n_e > n_o$ .

## Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается интерференция двух волн, поляризованных взаимно перпендикулярно, от «обычной» интерференции одинаково поляризованных волн?
2. Каков результат интерференции двух волн, поляризованных взаимно перпендикулярно, в общем случае?
3. К какому результату приводит частный случай волн одинаковой амплитуды с разностью хода  $\lambda/2$ ?
4. К какому результату приводит частный случай волн одинаковой амплитуды с разностью хода  $\lambda/4$ ?
5. Объясните направление вектора напряженности электрического поля в фиксированной точке пространства в случае круговой поляризации.
6. В нашем распоряжении имеются кристаллические пластинки  $\lambda/2$  и  $\lambda/4$  и поляризатор. Объясните, можно ли их помощью отличить естественный свет от света, поляризованного по кругу.

## 41. ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

Явление **дисперсии** заключается в различии значений показателя преломления вещества для различных длин волн. Например, в классическом опыте по преломлению солнечных лучей в стеклянной призме лучи разных цветов (длин волн) из-за дисперсии стекла преломляются на разные углы.

В подавляющем большинстве экспериментов **показатель преломления растет с ростом частоты** (или, что то же самое, — падает с ростом длины волны). Такое поведение показателя преломления называется **нормальной дисперсией**. Например, в опыте с призмой мы наблюдаем нормальную дисперсию. В более тонких экспериментах в очень узких интервалах частот, соответствующих так называемым **линиям поглощения**, можно наблюдать и **аномальную дисперсию**, т.е. уменьшение показателя преломления с ростом частоты (увеличение с ростом длины волны).

**Классическая элементарная теория дисперсии.** Качественно понять причину дисперсии можно на основе простой **классической модели**, в которой атом вещества рассматривается как обычный пружинный маятник. Маленький шарик массой  $m$  и зарядом  $q$  закреплен на пружинке жесткостью  $k$  (см. рис. 41.1). Под дей-

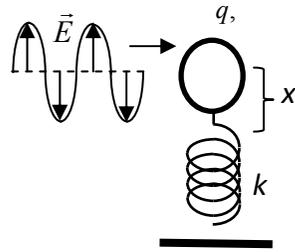


Рис. 41.1

ствием переменного электрического поля световой волны  $E$  шарик совершает **вынужденные колебания** на частоте волны  $\omega$ . Кроме электрической силы на шарик действует **сила трения**  $F_{\text{тр}}$  пропорциональная **скорости** шарика  $v$ , так что  $F_{\text{тр}} = -\beta v$ .

Модель отражает некоторые реальные свойства атома вещества. **Дипольный момент** атома  $p$  в данной модели принимается равным  $qx$ , и, таким образом, заряд  $q$  и смещение  $x$  отражают **распределение заряда** в атоме. Если дипольный момент атома пропорционален внешнему полю  $E$ , то это эквивалентно действию на заряд возвращающей упругой силы:  $F_{\text{упр}} = -kx$ . Далее, двигаясь с ускорением, заряд теряет энергию на излучение, что в модели отражено введением силы трения («радиационное трение»). Феноменологический коэффициент трения  $\beta$  подбирается так, чтобы средние за период потери энергии на излучение реального атома соответствовали рассчитанным из модели. Наконец, если под веществом понимать сильно **разреженный** газ, то это позволяет не учитывать взаимодействие атома с «соседями», что значительно упрощает рассмотрение.

Перейдем к математическому описанию явления дисперсии. Рассмотрим плоскополяризованную монохроматическую волну, вектор  $\vec{E}$  которой параллелен пружинке. Уравнение движения для шарика (в проекции на «ось пружинки») будет иметь вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + qE_0 \cos \omega t,$$

или, что то же самое,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \dot{x} = \frac{qE_0}{m} \cos \omega t, \quad (41.1)$$

где  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\gamma = \beta/m$ . Домножая последнее уравнение на  $n_0 q$  ( $n_0$  – концентрация атомов), и, учитывая, что **поляризация среды** (дипольный момент элемента объема)  $P = n_0 p$ , получим:

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P + \gamma P = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega t. \quad (41.2)$$

Рассмотрим **решения** данного уравнения в **предельных случаях**.

1. Возьмем область частот  $\omega$  **далеких** от  $\omega_0$ . Коэффициент  $\gamma$  (он имеет размерность частоты), определяющий «радиационное трение», очень мал ( $\gamma \ll \omega_0$ ). Реально  $\gamma \ll |\omega - \omega_0|$ , и, за исключением узкой области **резонанса**, слагаемым  $\gamma$  вообще можно пренебречь. Уравнение (41.2) примет вид

$$\ddot{P} + \omega_0^2 P = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega t,$$

а его решением, как легко проверить,  $P = P_0 \cos \omega t$ . Перегруппировав сомножители, получаем:

$$\begin{aligned} P_0 \cos \omega t \equiv P &= \frac{n_0 q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t \equiv \\ &\equiv \varepsilon_0 \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} E = \varepsilon_0 \chi(\omega) E, \end{aligned} \quad (41.3)$$

где

$$\chi(\omega) \equiv \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \equiv \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} - \quad (41.4)$$

**восприимчивость**, а  $\omega_p^2 \equiv n_0 q^2 / \varepsilon_0 m$  – некая константа, называемая квадратом «**плазменной частоты**». Физический смысл  $\omega_p$  будет рассмотрен позднее. Из (41.3) имеем (за исключением частот близких к  $\omega_0$ ) для показателя преломления

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{\varepsilon_0 n_0 q^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \equiv 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \gamma \ll |\omega_0 - \omega|. \quad (41.5)$$

При извлечении квадратного корня из уравнения (41.5) для получения  $n(\omega)$  можно ограничиться линейным членом разложения Тейлора, так как  $\varepsilon(\omega)$  для **разреженных газов** очень близка к единице:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \chi} \approx 1 + \frac{\chi}{2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \gamma \ll |\omega_0 - \omega|.$$

2. Вернемся к исходному уравнению (41.2) и рассмотрим случай **резонанса**  $\omega = \omega_0$ . В силу **уравнения колебаний**  $\ddot{P} + \omega_0^2 P = 0$  первые два слагаемых сокращаются, и мы имеем просто

$$\gamma \dot{P} = \frac{n_0 q^2}{m} E_0 \cos \omega_0 t \equiv \varepsilon_0 \omega_0^2 E_0 \cos \omega_0 t.$$

Непосредственным интегрированием получаем решение

$$P = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\gamma \omega_0} E_0 \sin \omega_0 t. \quad (41.6)$$

Как видно, колебания поляризации **отстают по фазе** от колебаний электрического поля на  $\pi/2$  (разность фаз между  $\sin \omega_0 t$  и  $\cos \omega_0 t$ ), и связь между  $P$  и  $E$  **не может** быть выражена соотношением  $P(t) = \chi E(t)$ . Результат можно (хотя и не слишком убедительно) интерпретировать так: в резонансе поляризация **не имеет составляющей, изменяющейся во времени по закону изменения внешнего поля** и, следовательно, при  $\omega = \omega_0$  **следует положить**  $\chi = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  и  $n = 1$  (к этому же «приводят» и соображения «физической непрерывности» при переходе  $\chi(\omega)$  через  $\omega = \omega_0$ ). Таким образом, вблизи резонансной частоты мы получаем узкую  $\Delta\omega \sim \gamma$  область **аномальной дисперсии**.

Следует подчеркнуть, что  $\chi(\omega_0) = 0$  не означает равенства нулю **амплитуды** колебаний поляризации. Напротив, из-за малой величины  $\gamma$  в знаменателе (41.6) амплитуда этих колебаний именно в резонансе имеет резкий максимум. В этом определенная дефект излагаемой **элементарной** теории: соотношение  $P = \chi E$  не в полной мере выражает связь между  $P$  и  $E$ . Дефект устраняется, при введении **комплексной восприимчивости**, (см. ниже).

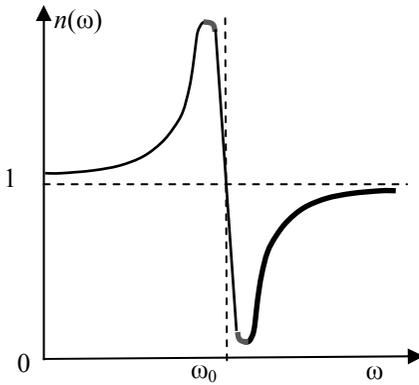


Рис. 41.2

График  $n(\omega)$  с учетом  $n(\omega_0) = 1$  приведен на рис. 41.2 для удобства в несколько утрированном виде: область аномальной дисперсии показана преувеличенно широкой (как было бы, если  $\gamma \sim \omega_0$ ). На самом деле, область аномальной дисперсии столь узка, что ее наблюдение представляет собой сложную экспериментальную задачу.

**Поглощение света.** Рассмотрим **мощность  $N$ , теряемую** световой волной при раскачивании заряда  $q$ . По определению **мгновенной мощности  $N = Fv$** , в нашем случае  $N = qEx$ . Начнем опять с частот, далеких от резонансной ( $|\omega - \omega_0| \ll \gamma$ ). Так как  $x = P/n_0q$ , то, используя (41.3), имеем

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{n_0 q} \dot{E} = -\frac{\varepsilon_0 \chi \omega}{n_0 q} E_0 \sin \omega t \equiv -v_0 \sin \omega t.$$

Тогда **средняя** мощность  $\langle N \rangle$  за период  $T \equiv 2\pi/\omega$  равна

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T N dt = -\frac{qE_0 v_0}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = \\ &= -\frac{qE_0 v_0}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0. \end{aligned} \quad (41.7)$$

Таким образом, вдали от резонансной частоты рассеяния мощности световой волны не происходит, и среда является **прозрачной**.

Теперь рассмотрим случай **резонанса**  $\omega = \omega_0$ . Скорость  $x$  проще всего выразить непосредственно из (41.1), учитывая, что при  $\omega = \omega_0$  первые два слагаемых сокращаются:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{qE_0}{m\gamma} \cos \omega_0 t \equiv v_0 \cos \omega_0 t; \quad v_0 = \frac{qE_0}{m\gamma}, \\ \langle N \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T N dt = -\frac{qE_0 v_0}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = -\frac{qE_0 v_0}{2T} > 0. \end{aligned} \quad (41.8)$$

Учитывая, что величина  $\gamma$ , стоящая в знаменателе  $\nu_0$  является **малой**, заключаем, что в области частот, близких к резонансной, должно иметь место **сильное** поглощение света. Указанное поглощение действительно наблюдается экспериментально, а соответствующий интервал частот (его ширина  $\Delta\omega \sim \gamma$ ) вследствие его узости называется **линией** поглощения.

Если в разреженном газе имеется **несколько сортов** атомов с различными резонансными частотами  $\omega_{0i}$  (и различными постоянными затухания  $\gamma_i$ ), то изложенную теорию легко модифицировать: следует ввести **относительные концентрации**  $f_i \equiv n_{0i}/n_0$  каждого сорта атомов  $i$  (очевидно  $\sum f_i = 1$ ). Тогда, в силу отсутствия взаимодействия между атомами, выражение (41.33) примет вид:

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \chi = 1 + \omega_p^2 \sum \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}, \quad \gamma \ll |\omega_0 - \omega|. \quad (41.9)$$

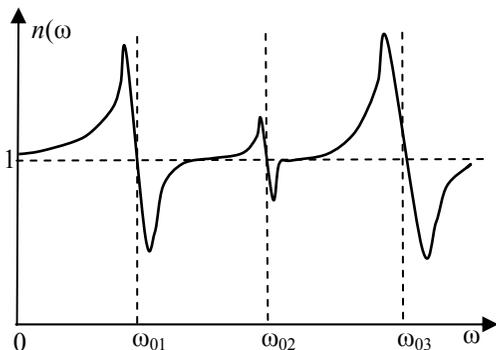


Рис. 41.3

Примерный вид кривой  $n(\omega)$ , соответствующей формуле (41.9) показан на рис. 41.3. Кроме того, смесь атомов будет иметь и несколько линий поглощения шириной порядка  $\gamma_i$  на частотах  $\omega_{0i}$ .

С развитием физики выяснилось, что **каждый** атом имеет **несколько** линий поглощения, причем частоты  $\omega_{0i}$  уникальны для каждого химического элемента. Частоты  $\omega_{0i}$  лучше называть не «резонансными», а просто **частотами поглощения** элемента. Величины же  $f_i$  называют не «долей атомов в смеси», а **силами осцилляторов**: они показывают относительное участие этих «осцилляторов» в дисперсии. Отметим, что изучая спектр поглощения неизвестного газообразного вещества можно судить об элементном составе последнего.

При распространении плоской волны в однородной поглощающей среде интенсивность света  $I$  уменьшается по экспоненциальному закону. Причина в том, что потери мощности световой волны при взаимодействии с атомом среды **пропорциональны интенсивности** волны. Это видно, например, из формулы (41.8) для мгновенной мощности  $N$ , отдаваемой в резонансе. Запишем (41.8) в эквивалентном виде:

$$N = Fv = qE_0 \cos \omega t \frac{qE_0 \cos \omega t}{m\gamma} = \frac{(qE_0)^2}{m\gamma} \cos^2 \omega t = \frac{(qE)^2}{m\gamma} \sim E^2 \sim I.$$

Кроме того, потери мощности в слое вещества толщиной  $dz$ , расположенном перпендикулярно волновому вектору, очевидно, пропорциональны числу атомов в слое, т.е. толщине  $dz$ . Обозначив общий коэффициент пропорциональности через  $\alpha$ , получим уравнение  $dI = -\alpha I dz$ , интегрирование которого приводит к

$$I = I_0 e^{-\alpha z}, \quad (41.10)$$

где  $I_0$  – интенсивность света на входе в поглощающий слой,  $z$  – толщина слоя,  $I$  – интенсивность на выходе из слоя. Коэффициент  $\alpha$  называют **коэффициентом затухания** волны, он, очевидно, зависит от частоты. Соотношение (41.10) носит название **закона Бугера**.

**Комплексная восприимчивость.** Как отмечалось выше, связь  $P = \chi E$  не дает полного описания поведения  $P(t)$  при заданном  $E(t)$ . Полное описание опирается на метод **комплексных экспонент** при использовании **комплексной восприимчивости**. Данный метод часто применяется в физике, например, при описании цепей переменного тока, содержащих индуктивности и емкости. Кратко, суть метода в следующем. Вместо записи  $\cos \omega t$  пишут  $e^{i\omega t}$ , подразумевая действительную часть последнего выражения. Домножение экспоненты  $e^{i\omega t}$  на любое комплексное число  $Z = a + ib$  приводит к изменению амплитуды и фазы. Действительно, по формуле Эйлера  $Ze^{i\omega t} = Z_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = Z_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ , где  $Z_0 = (a^2 + b^2)^{1/2}$ ,  $\varphi = \arctg(b/a)$ .

Применим метод комплексных экспонент к решению уравнения (41.2). Запишем электрическое поле волны и поляризацию среды соответственно как  $E = E_0 e^{i\omega t}$  и  $P = P_0 e^{i\omega t}$  и подставим в (41.2). Тогда вместо (41.3) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 P_0 e^{i\omega t} &\equiv P = \frac{n_0 q^2 / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E_0 e^{i\omega t} = \\
 &= \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E = \varepsilon_0 \chi E,
 \end{aligned}
 \tag{41.11}$$

где  $\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$  – восприимчивость, но теперь уже **ком-**

**плексная**. Разделяя **действительную** и **мнимую** части  $\chi$ , имеем:

$$\begin{aligned}
 \chi &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} = \\
 &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} - i \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \equiv \chi' + i\chi'',
 \end{aligned}
 \tag{41.12}$$

где  $\chi' = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$  и  $\chi'' = \frac{\omega_p^2 \gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$ . Легко ви-

деть, что вдали от резонанса ( $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ ) действительная часть  $\chi'$  совпадает с нашим выражением (41.4) для  $\chi$ ; в точке резонанса  $\chi'(\omega_0) = 0$ , а график  $\chi'(\omega)$  имеет вид рис. 41.4, а. С другой стороны, график  $|\chi''(\omega)|$  имеет вид кривой поглощения (рис. 41.4, б).

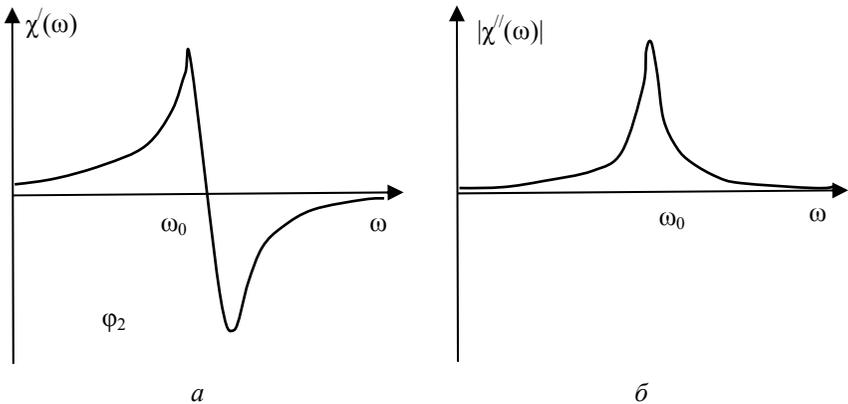


Рис. 41.4

Интересно отметить, что выражения для  $\chi'$  и  $\chi''$  строятся из одних и тех же констант  $-\omega_0$ ,  $\omega_p$  и  $\gamma$ , поэтому, зная выражение для  $\chi'$  можно однозначно **восстановить**  $\chi''$  и наоборот. Можно доказать, что этот факт не является особенностью конкретной модели среды, а опирается на фундаментальный принцип причинности. **Дисперсия и поглощение волн в среде всегда связаны между собой.**

При использовании комплексной восприимчивости комплексными оказываются также диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = (1+\chi') + i\chi'' \equiv \varepsilon' + i\varepsilon''$  и показатель преломления  $n = (\varepsilon' + i\varepsilon'')^{1/2} \equiv n' - in''$  (для удобства принято писать знак минус перед  $in''$ , чтобы  $n''$  получался положительным). Физический смысл  $n'$  и  $n''$  легко понять, записав уравнение плоской волны в виде комплексной экспоненты:  $E = E_0 e^{i\omega(t-z/v)}$  (монохроматическая волна, распространяющаяся со скоростью  $v$  вдоль оси  $z$ ). Так как  $v$  по определению  $c/n$ , то

$$E_0 e^{i\omega(t-z/v)} = E_0 e^{i\omega(t-zn/c)} = E_0 e^{-\omega n'' z/c} E_0 e^{i\omega(t-zn'/c)}. \quad (41.13)$$

Мы видим, что амплитуда волны экспоненциально убывает с ростом  $z$ . Учитывая, что интенсивность  $I$  пропорциональна квадрату амплитуды, получаем известный нам закон Бугера:  $I = I_0 e^{-\alpha z}$ , где **коэффициент затухания**  $\alpha = 2\omega n''/c$ . Кроме того мы видим, что при распространении света в среде его **фазовая скорость**  $v$  уменьшается в  $n'$  раз.

**Волны в веществе как результат интерференции первичной и вторичных волн.** Согласно полученным результатам, скорость света (как мы увидим ниже, лучше говорить: «**фазовая скорость**») может принимать значения как меньше, так и больше **фундаментальной** константы  $c$ . Это может вызвать недоумение и вопросы. Например. Как  $v > c$  согласуется с теорией относительности, согласно которой скорость  $c$  – **максимальная** из возможных в природе? Можно ли все-таки передавать сверхсветовые **сигналы**? Более детальное, чем это было сделано выше, рассмотрение явления дисперсии приводит к выводам, позволяющим ответить на подобные вопросы. Суть выводов в следующем.

1. Исходная («первичная») световая волна, проходя через среду, «раскачивает» атомы, заставляя их излучать (излучающие атомы назовем вторичными источниками).

2. Волна, распространяющаяся в среде, есть результат **интерференции** исходной волны и волн от вторичных источников.

3. И первичная, и вторичные волны распространяются **с одной и той же** фундаментальной скоростью  $c$ .

4. Результат интерференции первичной и вторичных волн может как отставать **по фазе** от фазы первичной волны, так и опережать ее (в первом случае говорят, что  $n > 1$ , во втором – что  $n < 1$ ).

Перечисленные выводы, очевидно, снимают вопросы о противоречии теории дисперсии теории относительности и о возможности передачи сверхсветовых сигналов, поэтому стоит остановиться на них подробнее.

Сама по себе задача об интерференции первичной и вторичных волн чрезвычайно сложна (кроме поля «первичной» волны на атомы среды воздействуют вторичные волны «соседей»). Тем не менее, сам механизм «замедления» или «ускорения» света средой можно прояснить из простой модели, которую мы сейчас рассмотрим.

Пусть на пути первичной волны (перпендикулярно направлению ее распространения) расположен тонкий плоский слой атомов, причем атомы распределены в плоскости **равномерно** и достаточно плотно (см. рис. 41.5). Тогда результат интерференции волн от вторичных источников в

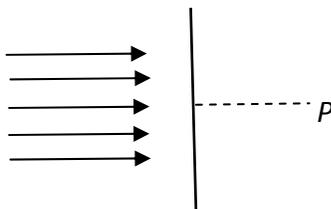


Рис. 41.5

точке  $P$  за экраном можно найти методом векторных амплитуд (**спиралей Корню**), как это обычно делается при рассмотрении дифракции Френеля. В отличие от дифракции Френеля, «наши» источники являются не мнимыми, а **реальными**, излучающими по законам электродинамики. Согласно последним, излучение заряда происходит в противофазе с его ускорением  $a$ . Для нашей модели гармонических колебаний заряда на пружинке имеем (будем отслеживать только фазу колебаний):  $-a \equiv -\ddot{x} \sim x \sim p \sim P$ . Согласно (41.4)  $\chi > 0$  для  $\omega < \omega_0$  и  $\chi < 0$  для  $\omega > \omega_0$ , что означает, что при  $\omega < \omega_0$  излучение происходит **в одной фазе** с первичной волной, а при  $\omega > \omega_0$  – **в противофазе**, т.е. с отставанием на  $\pi$ .

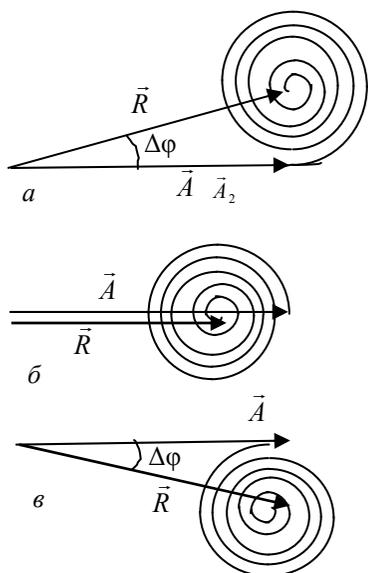


Рис. 41.6

$\omega < \omega_0$ ) – **опережает** («ускорение»  $\Delta\varphi > 0$ ,  $n < 1$ , см. рис. в), либо (при  $\omega = \omega_0$ ) фаза остается **прежней** ( $\Delta\varphi = 0$ ,  $n = 1$ , см. рис. б). Все это находится в качественном согласии с элементарной теорией дисперсии. В грубом приближении реальную среду можно представить как совокупность атомных слоев, каждый из которых «действует» аналогично рассмотренному.

Наконец, согласно (41.6), при  $\omega = \omega_0$  излучение происходит с **отставанием** на  $\pi/2$ .

Теперь осталось нарисовать спирали Корню для каждого из случаев и сложить результирующее колебание от вторичных волн с колебанием первичной волны, изображенным на рис. 41.6 стрелкой  $\vec{A}$  (если бы не было атомной плоскости, в точке  $P$  наблюдались бы только колебания  $\vec{A}$ ). Как мы видим, влияние слоя атомов сводится к тому, что результирующее колебание (стрелка  $\vec{R}$ ) либо (при  $\omega < \omega_0$ ) слегка **отстает** по фазе от  $\vec{A}$  («замедление»  $\Delta\varphi < 0$ ,  $n > 1$ , см. рис. а), либо (при

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения нормальной и аномальной дисперсий.
2. Какая модель среды используется в элементарной теории?
3. Как связан показатель преломления вещества с его диэлектрической восприимчивостью?
4. Как поглощается свет вдали от резонанса и в резонансе?
5. Может ли фазовая скорость света в среде превышать скорость света в вакууме?
6. Что такое фазовая и групповая скорости?

7. Какая из скоростей (фазовая или групповая) больше при аномальной дисперсии?

8. Какая из скоростей (фазовая или групповая) больше при аномальной дисперсии?

9. Объясните с помощью интерференции первичной и вторичных волн частотную зависимость показателя преломления.

## 42. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛОВ В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

**Плазмой** называется состояние вещества с высокой концентрацией ионов и свободных (не связанных с атомами) электронов. Любой газ при достаточно высокой температуре является плазмой. Также, из-за наличия в **металлах** свободных электронов, говорят о **плазме электронов проводимости**.

Описанная в разделе 41 элементарная теория дисперсии легко может быть обобщена на плазму: и «газовую», и «металлическую». Для этого достаточно устремить жесткость  $k$  «пружинки» (связывающей электрон с атомом) к нулю. Соответственно  $\omega_0$  тоже будет равна нулю; кроме того, везде, за исключением мало нам сейчас интересной области нулевых частот (статического поля), можно пренебречь  $\gamma$ . Т.о. вместо (41.4) и (41.5) восприимчивость и диэлектрическая проницаемость принимают вид:

$$\chi(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (42.1)$$

График  $\varepsilon(\omega)$  приведен на рис. 42.1. Для  $\omega > \omega_p$ ,  $\varepsilon > 0$ , плазма **прозрачна**,  $n < 1$ , имеет место **нормальная** дисперсия. Для  $\omega < \omega_p$ ,  $\varepsilon < 0$  и показатель преломления оказывается чисто **мнимым**, что

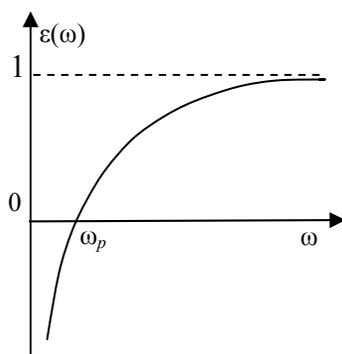


Рис. 42.1

означает невозможность распространения света вглубь среды. В последнем легко убедиться, если использовать комплексные экспоненты из (41.13)  $n' = 0$  имеем  $E = E_0 e^{-\omega n'' z/c} e^{i\omega t}$ , т.е. выражение, не имеющее вид бегущей волны. Колебания быстро затухают с ростом  $z$  (на глубине  $\sim c/\omega n''$ , называемой толщиной **скин-слоя**), и такая среда является **непрозрачной**. Заметим, что **затухание** волн вглубь среды в данном случае **не связано с диссипацией энергии**: в выражение (42.1) вообще не входит  $\gamma$  (поэтому  $\alpha \equiv 2\omega n''/c$  лучше называть коэффициентом **затухания**, чем коэффициентом **поглощения**). Энергия просто уходит в отраженную волну – металлы хорошие отражатели света.

Интересно отметить, что «плазменную» формулу (42.1) можно получить и из формулы (41.4) (или ее обобщения (41.9)) для «связанных» зарядов: надо лишь сделать в (41.4) (или (41.9)) предельный переход  $\omega \rightarrow \infty$ . Это объясняет, в частности, почему на **очень больших частотах** ( $\omega \gg \omega_0$ ) стирается различие между проводниками и диэлектриками, а диэлектрическая проница-

емость **всех** сред имеет универсальный вид  $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ .

**Плазменные колебания.** Из наших рассуждений осталось неясным, каким именно колебаниям соответствует **плазменная частота**  $\omega_p$ . Оказывается, что плазменные колебания – это **коллективные** колебания всех отрицательных зарядов среды относительно положительных. Понять, как происходят плазменные колебания, можно на простом примере. Представим себе, что мы сместили весь электронный газ среды **как целое** на расстояние  $x$  относительно положительного фона неподвижных ионов. В результате на границах среды (для простоты границы среды выбраны параллельными) возникает поверхностная плотность заряда  $\sigma$ . Из курса электростатики мы вспоминаем, что  $\sigma$  равна нормальной к границе среды компоненте поляризации. В нашем случае можно написать просто  $\sigma = P$ . Поверхностная плотность зарядов создает однородное поле  $E = \sigma/\epsilon_0$  (как в плоском конденсаторе), которое действует на каждый смещенный из равновесия заряд **возвращающей** силой  $qE$ , что и приводит к колебаниям. Действительно, домножая уравнение движения для одного заряда

$$m\ddot{x} = -q \frac{P}{\varepsilon_0}$$

на заряд  $q$  и концентрацию  $n_0$ , приходим к **уравнению колебаний**:

$$n_0 q m \ddot{x} \equiv m \ddot{P} = -\frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0} P; \quad \ddot{P} = -\frac{n_0 q^2}{m \varepsilon_0} P; \quad \ddot{P} + \omega_p^2 P = 0,$$

где  $\omega_p^2 \equiv n_0 q^2 / \varepsilon_0 m$  – как раз то самое выражение, которое фигурировало у нас, начиная с формулы (41.4) раздела 41. Для количественных оценок величины  $\omega_p$  следует подставить на место  $q$  и  $m$  соответственно заряд и массу электрона  $e$  и  $m_e$ . Подстановка концентрации электронов  $n_0 \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , характерной для щелочных металлов, дает  $\omega_p$ , соответствующую ультрафиолетовому диапазону спектра. Поэтому, например, **щелочные металлы**, непрозрачные в видимом диапазоне, становятся **прозрачными для ультрафиолета**.

Приведем еще один пример явления, которое можно понять, опираясь на формулу (42.1) для диэлектрической проницаемости плазмы.

**Отражение радиоволн ионосферой. Ионосфера** – это ионизированный слой земной атмосферы, начинающийся с высоты примерно 60 км и простирающийся до 300–400 км над Землей. Оказывается, что хотя концентрация свободных электронов в ионосфере колеблется с высотой в широких пределах (от  $10^3$  до  $10^7 \text{ см}^{-3}$ ), к ионосфере для многих практических приложений вполне применима простая формула (42.1). Достаточно лишь ввести «эффективную» плазменную частоту. Формула (42.1) для  $\varepsilon(\omega)$  соответственно, примет вид:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{(\omega_p^{\text{эфф}})^2}{\omega^2}. \quad (42.2)$$

Расчет дает  $\omega_p^{\text{эфф}} \approx 13 \text{ МГц}$  ( $\lambda \approx 23 \text{ м}$ ) в дневное время и  $\text{МГц}$  ( $\lambda \approx 75 \text{ м}$ ) в ночное время, что соответствует диапазону КВ (коротких волн). Зависимость  $\omega_p^{\text{эфф}}$  от времени суток связана с тем, что днем степень ионизации ионосферы солнечными лучами сильно возрастает (напомним, что  $\omega_p$  пропорциональна квадратному корню из концентрации свободных электронов). Для длинных, средних, коротких и метровых волн (на последних работают

популярные у студентов FM радиостанции)  $\omega < \omega_p^{\text{эфф}}$ , т.е. согласно (42.2)  $\varepsilon < 0$ . Эти радиоволны отражаются от ионосферы при **любых** углах падения (примерно, как свет от металлического зеркала), благодаря чему сигналы могут передаваться на расстояния во много раз превышающие расстояние прямой видимости. С другой стороны, телевидение работает в сантиметровом и дециметровом диапазонах (т.н. УКВ – ультракоротковолновый – диапазон). Для ТВ частот ионосфера прозрачна, так как  $\omega > \omega_p^{\text{эфф}}$ . Поэтому для надежной трансляции необходимо, чтобы приемники (телевизионные антенны) находились в **прямой видимости** от передатчиков. Для увеличения зоны уверенного приема телепрограмм передающую антенну располагают как можно выше (например, высота Останкинской телебашни в Москве составляет 539 м), используют систему ретрансляторов, развивают спутниковое ТВ.

Интересно, что для УКВ диапазона  $\omega > \omega_p^{\text{эфф}}$  имеет место соотношение  $\varepsilon(\omega) < 1$  и, соответственно  $n = \sqrt{\varepsilon} < 1$ . Поэтому вакуум (космос за ионосферой) оказывается средой **оптически более плотной**, чем ионосфера, а значит, при достаточно больших углах падения радиоволн на ионосферу должно иметь место **полное внутреннее отражение**. Данное явление действительно наблюдается: за пределами «зоны молчания» появляется зона уверенного приема УКВ сигнала, причем границы зон сильно перемещаются в течение суток.

**Скорость передачи сигналов в среде с дисперсией.** Прежде всего, обратим внимание, что с помощью привычной нам плоской **монохроматической** волны вида  $A \cos \omega(t - x/v)$  мы не можем передать никакой **информации** – ведь это просто бесконечная синусоида, «вечно» бегущая с фазовой скоростью  $v$  из минус бесконечности в плюс бесконечность. Строго говоря, монохроматическая волна – всего лишь удобная **идеализация**, таких волн вообще нет в природе. Для передачи какой-либо информации требуются волны более сложного вида, например, – последовательность всплесков, несущая информацию в двоичном коде («цифровой сигнал»). Можно показать (это сделали математики в теории интеграла Фурье), что для формирования «всплески» требуется «смешать» (наложить друг на друга) большое количество волн

(их называют **спектральными** составляющими сигнала, или **группой волн**) с очень близкими частотами. Существует закономерность: **чем короче сигнал, тем большее количество и из более широкого диапазона частот следует смешать волн** (говорят: «короткие сигналы имеют широкий **спектр** частот»). В среде с дисперсией волны разной частоты из группы будут распространяться с разными скоростями, а сам сигнал, соответственно, по мере распространения, – менять **форму**. Поэтому требуется уточнить само понятие «скорость сигнала». Фундаментальные исследования на эту тему были проведены английским физиком Рэлеем (1842–1919).

**Групповая скорость.** В качестве характеристики скорости распространения группы волн, вслед за Рэлеем, вводят т.н. **групповую скорость** (будем обозначать ее  $u$ ), которая по определению равна производной от частоты по волновому числу:  $u = \frac{d\omega}{dk}$ .

Поясним смысл понятия групповой скорости на простейшем примере «группы» из всего двух волн с очень близкими частотами ( $\omega$  и  $\omega + d\omega$ ) и равными амплитудами  $A$ . Пусть частоте  $\omega$  соответствует волновое число  $k$ , а частоте  $\omega + d\omega$  – волновое число  $k + dk$ . Для сложения волн воспользуемся известной формулой тригонометрии  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ , четностью косинуса и малостью  $d\omega$  и  $dk$ . Итак, мы имеем:

$$\begin{aligned} & A \cos(\omega t - kx) + A \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\ & = 2A \cos\left(\frac{2\omega + d\omega}{2}t - \frac{2k + dk}{2}x\right) \cos\left(-\frac{d\omega}{2}t + \frac{dk}{2}x\right) \approx \\ & \approx 2A \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \cos(\omega t - kx) = \\ & = 2A \cos\left[\frac{d\omega}{2}\left(t - \frac{x}{\frac{d\omega}{dk}}\right)\right] \cos\left\{\omega\left[t - \frac{x}{\left(\frac{\omega}{k}\right)}\right]\right\} \equiv \\ & \equiv 2A \cos\left[\frac{d\omega}{2}\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \end{aligned}$$

Во втором множителе последнего выражения мы узнаем обычную монохроматическую плоскую волну частоты  $\omega$  распространяющуюся с **фазовой скоростью**  $v = \omega/k$ . Предыдущие множители задают ее **огibaющую** (или, как говорят, **модуляцию**). Как видно, огibaющая имеет низкую частоту  $d\omega/2$  (частоту **биений**, вроде той, что мы слышим при нажатии клавиши рaстроенного пианино) и распространяется с **групповой скоростью**  $u = \frac{d\omega}{dk}$ . Можно показать, что при **слабой** дисперсии, **энергия**

вспышки распространяется с групповой скоростью.

**Закон дисперсии в форме  $\omega(k)$ .** До сих пор мы описывали дисперсию, задавая частотную зависимость показателя преломления или диэлектрической проницаемости. Часто бывает удобно (например, для расчета фазовой и групповой скоростей) перейти к другой форме записи – через зависимость **частоты от волнового числа**. Выражение вида  $\omega = \omega(k)$  будем называть **законом дисперсии**. Такая запись представляет собой просто замену переменных; поэтому, она эквивалентна привычной  $n = n(\omega)$ . Действительно, по определению,  $\omega = vk = \frac{c}{n(\omega)}k \Rightarrow \omega n(\omega) = ck$ , т.е.  $n(\omega)$

задает взаимно однозначное соответствие между  $\omega$  и  $k$  (при использовании комплексного показателя преломления на место  $n$  следует поставить его **действительную часть**  $n'$ ).

**Соотношение между фазовой и групповой скоростями.**

В вакууме  $n \equiv 1$ , поэтому  $\omega = ck, v = \frac{\omega}{k} = c, u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(ck) = c$ , т.е.

фазовая скорость **равна** групповой и равна  $c$ . В случае **нормальной** дисперсии групповая скорость всегда **меньше** фазовой. Действительно:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} = v + \frac{dv}{d\omega} u;$$

$$u = \frac{v}{1 - \frac{dv}{d\omega}}.$$

Нормальная дисперсия означает, что  $n$  растет (соответственно,  $v$  падает) с ростом частоты,  $dv/d\omega < 0$ , отсюда  $u < v$ .

В случае **аномальной** дисперсии («внутри» линии поглощения)  $dv / d\omega > 0$  и формально имеет место  $u > v$  или, даже, что бессмысленно,  $u < 0$ . Подробный анализ, однако, показывает (следует принять во внимание и сильное затухание, зависящее от частоты, меняющее спектральный состав волнового пакета), что физическая интерпретация  $d\omega / dk$  как скорости распространения энергии световой вспышки **теряет силу**. С другой стороны, из аргументов об интерференции первичной и вторичных волн в любом случае очевидна невозможность передачи энергии со скоростью выше  $c$ .

Часто бывает необходимо записать связь между фазовой и групповой скоростью не через частоту, а через **длину волны**  $\lambda$ . Получим соответствующее соотношение:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d}{dk} \frac{2\pi}{k} = \\ &= v + k \frac{dv}{d\lambda} \left( -\frac{2\pi}{k^2} \right) = v - \frac{2\pi}{k} \frac{dv}{d\lambda} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \end{aligned}$$

**Пример расчета фазовой и групповой скорости.** Произведем расчет  $u$  и  $v$  на примере выражения (42.1) для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$  (напомним, что это выражение пригодно для металлов и плазмы). Имеем:  $\omega^2 \varepsilon = \omega^2 - \omega_p^2$ ;  $\omega^2 n^2 = c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ ;  $2c^2 k dk = 2\omega d\omega$ . Таким образом, имеем в данном случае:

$$\frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega}; \quad uv = c^2. \quad (42.3)$$

Фазовая скорость:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}. \quad (42.4)$$

Групповая скорость, учитывая (42.3):

$$u = \frac{c^2}{v} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (42.5)$$

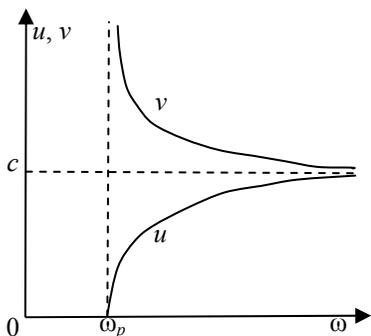


Рис. 42.2

Интересно, что когда фазовая скорость  $v$  (при  $\omega = \omega_p$ ) обращается в **бесконечность**, групповая скорость  $u$  стремится к **нулю**. Графики  $v(\omega)$  и  $u(\omega)$  приведены на рис. 42.2.

**Рассеяние света.** Дифракцию света на мелких (невидимых глазу) **хаотически расположенных неоднородностях** среды обычно называют **рассеянием**.

Рассеяние проявляет себя как **свечение** среды при прохождении через нее света от **внешнего** источника. Свечение связано с **вторичными волнами**, излучаемыми атомами среды за счет энергии первичного луча. В силу некогерентности вторичных волн наблюдению доступны лишь **средние** по времени значения интенсивности рассеянного света в различных направлениях. Иными словами, **интенсивность** рассеянного излучения в любой точке **равна сумме интенсивностей** излучений, пришедших от каждой неоднородности. Для теоретического описания явления используется математический аппарат теории вероятности.

В зависимости от природы неоднородностей рассеяние можно разделить на два основных типа.

**Рассеяние в чистых средах (молекулярное рассеяние).** Если свет распространяется в среде, не содержащей микроскопических включений другого вещества, то единственным видом неоднородности выступают термодинамические **флуктуации плотности**. Молекулярное рассеяние объясняет, например голубой цвет неба.

**Рассеяние в мутных средах (другие термины: диффузное рассеяние, явление Тиндаля).** В этом случае неоднородностями являются микроскопические частицы инородного вещества (пыль, капельки жидкости в газе – облака, туман, твердые частички в жидкости, называемые взвесями и суспензиями, эмульсии – капельки одной жидкости в другой жидкости, инородные микроскопические включения в прозрачных твердых телах – перламутры, молочные стекла и т.п.). Как мы увидим, характер рассеяния

в мутных средах существенно зависит от соотношения характерного размера  $l$  неоднородностей и длины волны света  $\lambda$ . При  $l \ll \lambda$  рассеивается преимущественно **коротковолновая** компонента падающего излучения; в обратном пределе интенсивность рассеяния примерно **одинакова** для всех длин волн.

Начнем с рассеяния в **чистых средах**. Простейшей для рассмотрения чистой средой является разреженный газ. В этом случае так же, как это делалось в элементарной теории дисперсии (см. разд. 41), в качестве **модели** молекулы можно взять пружинный маятник (рис. 41.1). Падающая волна раскачивает заряд  $q$ , который излучает **вторичные волны**, амплитуда  $E_0$  которых пропорциональна «запаздывающему» **ускорению**, т.е. **квадрату** частоты. В самом деле, если смещение  $x$  заряда  $q$  при вынужденных колебаниях изменяется по гармоническому закону  $x = x_0 \cos \omega t$ , то электрическое поле излученной волны  $E \sim -a^* = \omega^2 x_0 \cos \omega t^* = \omega^2 x(t^*)$  (звездочка означает, что соответствующие величины следует брать с задержкой на время распространения сигнала в точку наблюдения). **Интенсивность** света, излученного молекулой, в свою очередь, пропорциональна **квадрату амплитуды волны**, откуда получаем **закон Рэлея**:  $I \sim \omega^4$ . В видимом диапазоне частоты красного и синего (фиолетового) излучений различаются почти в 2 раза, откуда можно сделать вывод, что интенсивность синей компоненты в излучении **одной** молекулы примерно в 16 раз превышает интенсивность красной компоненты.

Излучение, рассеянное **средой**, представляет собой результат **интерференции** волн, излученных **всеми** молекулами вещества. Если на масштабах малых по сравнению с длиной волны света можно говорить об **однородном** распределении молекул, то такая интерференция, как известно, может привести лишь к изменению фазовой скорости волны, но не к изменению ее направления распространения («боковые» лучи, интерферируя, погасят друг друга); рассеяния наблюдаться **не будет**. В реальности же, согласно термодинамике, число молекул в указанных объемах не постоянно (испытывает флуктуации), поэтому газовая среда является оптически неоднородной. В 1908 г. М. Смолуховский теоретически обосновал, что рассеяние в газовой среде вызвано именно термодинамическими **флуктуациями плотности** газа.

При нахождении вещества в **критическом состоянии** даже тонкий его слой рассеивает **все** падающее на него излучение. Дело в том, что критическое состояние соответствует **максимально возможным флуктуациям плотности**. Рассеяние света в этом случае называют **критической опалесценцией**.

Теорию Смолуховского называют также «теорией голубого цвета неба». Дневное небо испускает свет приблизительно равномерно во все стороны (светится) благодаря флуктуациям плотности воздуха, а голубой цвет в рассеянном излучении преобладает из-за закона Релея  $\omega^4$ .

Горные пейзажи отличаются яркостью красок. Из-за уменьшения плотности воздуха с высотой, его рассеивающая способность падает. Отметим, что яркость и контрастность горных видов порой вызывает иллюзию близости наблюдаемых объектов: люди ошибочно приписывают четкость наблюдаемой картины малому расстоянию до объекта наблюдения. Если мы смотрим с вершины высокой горы в долину, то последняя кажется нам покрытой голубоватой вуалью. Еще более заметно это явление при наблюдении земли из окна самолета в безоблачную погоду.

На заре (или на закате) небо краснеет тоже по причине молекулярного рассеяния. Лучи утреннего (или вечернего) Солнца проходят в атмосфере значительно больший путь, чем днем, теряя по пути преимущественно свою синюю компоненту. Красная – меньше рассеивается, и, соответственно, распространяется дальше. Кроме того, так как синие лучи лежат ближе к линиям поглощения молекул газов, составляющих воздух, они и **поглощаются** в атмосфере сильнее.

Теперь перейдем к рассеянию в **мутных средах**. Рассмотрим сгусток (обычно говорят «кластер») из  $N$  молекул или, например, микроскопическую капельку воды. До тех пор, пока размер кластера **много меньше** длины волны света, все молекулы кластера излучают **в одной и той же фазе**, а значит, **усиливают** излучение друг друга. Из-за пропорциональности интенсивности квадрату амплитуды, излучение кластера из  $N$  молекул интенсивнее излучения одной молекулы в  $N^2$  раз. Распределение рассеянного излучения по **частотам** определяется **законом Рэлея**.

С приближением размера кластера к длине волны света **разница фаз** волн, излученных молекулами из удаленных друг от друга частей кластера, будет становиться все заметнее: излученные волны станут **гасить** друг друга. Так как указанное явление «раньше» наступает для коротковолновой («синей») части излучения, то доля синих лучей снижается, и спектр становится более равномерным по частотам (более «белым»), по сравнению с предсказаниями закона Рэлея. Это объясняет белый (серый) цвет облаков и тумана – капельки воды, из которых состоят облака или туман, имеют размеры порядка длины волны света.

Раковины или жемчуг кажутся переливчато-белыми из-за неоднородностей порядка длины волны света, хаотически распределенных в прозрачной среде вещества. Данное явление называют **опалесценцией**.

Когда узкий пучок естественного света проходит через рассеивающую среду (не важно – чистую или мутную), рассеянный свет всегда **линейно поляризован** в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка. Явление легко понять, если вспомнить диаграмму направленности излучения диполя: излученная волна поляризована параллельно ускорению, которое, в свою очередь, лежит в плоскости перпендикулярной направлению падающей волны.

### **Контрольные вопросы и задания**

1. Что такое плазменные колебания?
2. На каких частотах плазма прозрачна?
3. На каких частотах плазма отражает свет?
4. Почему телевышки делают максимально высокими?
5. С какой скоростью распространяется информация: с фазовой или с групповой?
6. Какая скорость выше при нормальной дисперсии: фазовая или групповая?
7. Достаточно ли закона Рэлея для объяснения голубого цвета неба?
8. Объясните, почему солнце на закате красное.
9. Объясните, почему облака белые (серые).

## 43. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Если поместить достаточно большое количество молекул газа в непроницаемую теплоизолированную полость, то согласно **второму закону термодинамики** система, состоящая из газа и стенок полости, придет в термодинамическое **равновесие**: температура выровняется, скорости молекул будут удовлетворять распределению Максвелла («достаточно большое» количество молекул нужно, чтобы имело смысл понятие температуры, а флуктуации не играли существенной роли). Заметим, что хаотическое **ускоренное** тепловое движение зарядов в молекулах газа и стенок (электронов и ионов) в соответствии с законами классической электродинамики должно сопровождаться излучением света, т.н. **тепловым излучением**. В том, что это действительно так, легко убедиться, заглянув через маленькое отверстие внутрь разогретой печи – мы увидим красное свечение: пространство внутри печи заполнено не только горячим воздухом и продуктами сгорания, но и светом. Заметим, что даже если из непрозрачной полости откачать весь газ, то свечение останется – ведь разогретые стенки будут продолжать излучать. В силу общности второго закона термодинамики, **поле излучения** должно, также как и газ, прийти в термодинамическое **равновесие** со стенками, если, конечно, последние не прозрачны, и энергия не уходит в окружающее пространство. Иными словами, понятие «температура» должно быть применимо и к **самому излучению** тоже. Но что такое – «температура света», «температура электромагнитных волн»? Какое распределение света по частотам (аналог распределения молекул по скоростям) соответствует равновесию? Исчерпывающие ответы на эти сложные вопросы были получены лишь в середине XX в., когда была создана последовательная теория фотонного газа («газа квантов»). Но точный ответ на вопрос о распределении равновесного излучения по частотам был найден гораздо раньше – еще в 1900 г., задолго до создания последовательной квантовой теории.

**Закон Кирхгофа.** В 1859 г. Густав Роберт Кирхгоф установил чрезвычайно общее соотношение между способностью тел излучать и поглощать свет. Ход его рассуждений заключался примерно в следующем. Рассмотрим замкнутую теплоизолиро-

ванную непрозрачную полость, находящуюся в термодинамическом равновесии с излучением внутри нее. Сразу ясно, что **равновесное** излучение (энтропия максимальна!) должно быть **одинаковым** во всех точках и по всем **направлениям**, не иметь никакой преимущественной **поляризации**. Далее, часть излучения, падающего из полости на стенку, должна отражаться (без диссипации энергии), часть – поглощаться. Теперь заметим, что если бы стенки поглощали больше световой энергии, чем излучали (или наоборот), то это нарушило бы термодинамическое равновесие: стенки бы нагревались (охлаждались), а излучение бы остывало (нагревалось). Возникающую разницу температур можно было бы использовать для создания вечного двигателя второго рода, что запрещено вторым законом термодинамики. Значит, единственная возможность – это предположить, что стенки поглощают («забирают у излучения») **ровно ту же мощность**, что и излучают («возвращают излучению»). Более того, данная закономерность должна выполняться в **любом**, сколь угодно узком **интервале частот**. Действительно, если бы стенки поглощали энергию преимущественно в одном частотном диапазоне, а излучали бы – в другом, то это бы нарушило равновесное распределение энергии излучения по частотам. В сказанном и состоит суть закона Кирхгофа. Прейдем к его математической формулировке.

Равновесный поток энергии излучения, падающий на стенку со стороны полости будем характеризовать величиной  $d\Phi_\omega$  – мощностью излучения, **падающей** на единицу площади поверхности тела под всеми углами в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega+d\omega$ . Мощность  $d\Phi_\omega$  как характеристика **излучения** должна определяться **только температурой** последнего. (Здесь мы отдаем дань традиции, сложившейся в литературе по тепловому излучению: аргумент функции писать как нижний индекс. Разумеется, более привычная запись вида  $d\Phi(\omega)$  не является ошибочной и вполне допустима).

Равновесный поток энергии, излучаемый стенкой в полость, будем характеризовать **спектральной плотностью энергетической светимости**  $r_\omega$ , так что  $r_\omega d\omega$  – мощность, **излучаемая** единицей поверхности стенки под всеми углами в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega+d\omega$ . Частотная зависимость  $r_\omega$  определяется температурой  $T$  и материалом стенки.

**Полная мощность**, излучаемая единицей площади поверхности стенки при данной температуре (ее называют **энергетической светимостью** и обозначают  $R$ ), очевидно, выражается интегралом от  $r_\omega$  по всем частотам:

$$R = \int_0^{\infty} r_\omega d\omega. \quad (43.1)$$

Наконец, способность стенки **поглощать** падающее излучение будем описывать **спектральным коэффициентом поглощения**  $a_\omega$ , так что  $a_\omega d\Phi_\omega$  – мощность, поглощенная единицей поверхности стенки в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega+d\omega$ .

**Условия равновесия**, сформулированные выше (равенство излученной и поглощенной мощности в **любом** интервале частот  $d\omega$ ), дают:

$$r_\omega d\omega = a_\omega d\Phi_\omega, \quad (43.2)$$

для **любого** материала стенок, т.е. для любых  $r_\omega$  и  $a_\omega$ . В силу того, что поток излучения со стороны полости определяется только температурой, **отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральному коэффициенту поглощения при фиксированной температуре не зависит от материала стенки и является универсальной функцией частоты  $d\Phi_\omega/d\omega$**  (закон Кирхгофа).

Далее, удобно формально ввести поверхность, при любой температуре **полностью** поглощающую излучение на **всех** частотах ( $a_\omega \equiv 1$ ). Таковую поверхность будем называть **абсолютно черной**, а, соответственно, тело с абсолютно черной поверхностью – **абсолютно черным телом**. Как видно из (43.2) спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела (обозначим ее  $r^*_\omega$ ) и есть универсальная функция частоты и температуры, фигурирующая в законе Кирхгофа. Таким образом, можно записать:

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = r^*_\omega. \quad (43.3)$$

Абсолютно черных тел не существует в природе. Например, для достаточно высоких частот все материалы прозрачны. Тем не менее, есть немало тел или объектов, обладающих свойствами, близкими к абсолютно черному телу. Классический пример –

небольшое отверстие в полости с непрозрачными в широком частотном диапазоне стенками. Луч света, проникший в полость через отверстие, испытывает так много отражений, при каждом из которых ослабляется, что практически не может выйти наружу. Поэтому площадь отверстия можно с достаточной точностью считать участком с абсолютно черной поверхностью, а излучение внутри самой полости считать равновесным.

В той или иной степени все тела являются **цветными**, т.е.  $a_\omega$  существенно зависит от частоты. Если функция  $a_\omega$  близка к константе в широком частотном диапазоне (разумеется, эта константа меньше единицы), то тела называют **серыми**.

Отметим сразу, что в жизни мы чаще сталкиваемся с **неравновесным** излучением (например, – свет лампочки, костра, Солнца, звезд), чем с равновесным. В этом случае, температура окружающей среды (космический вакуум тоже можно считать средой – ведь он заполнен излучением) ниже температуры светящегося тела. В этом случае закон Кирхгофа тоже можно применять: нагретые тела в неравновесной системе **излучают** точно **так же**, как и в равновесии.

С точки зрения фундаментальной науки наиболее важной задачей является определение функции  $r^*_\omega$  – ведь именно она определяет равновесное распределение излучения как такового по частотам.

Все попытки вычисления  $r^*_\omega$  на основе классической физики, предпринятые рядом ученых в конце XIX в. с использованием совершенно разных методов, приводили к одному и тому же результату. Попробуем «угадать» этот результат из соображений размерности. Величина  $r^*_\omega d\omega$  по определению имеет размерность Вт/м<sup>2</sup>, следовательно, значение  $r^*_\omega$  имеет размерность Дж/м<sup>2</sup> – энергия, отнесенная к площади. Конечная формула не должна содержать никаких постоянных, относящихся к природе и размерам тел, но при этом должна зависеть от температуры. Поэтому, в качестве **энергии** естественно выбрать величину, пропорциональную  $kT$ , а в качестве **единственного** масштаба **длины** – длину волны света  $\lambda$ . Тогда

$$r^*_\omega \sim \frac{kT}{\lambda^2} = \frac{kT}{\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (43.4)$$

Любопытно, что формула (43.4) **в точности** совпадает с результатом сложных расчетов на основе классической физики (мы еще и немного упростили вывод: «честная» замена переменной  $\lambda$  на переменную  $\omega$  в дифференциальных выражениях делается не-много сложнее – см. вывод формулы (43.16) ниже).

Один из классических расчетов  $r^*_{\omega}$  был выполнен в 1897 г. немецким ученым Максом Планком. Суть работы Планка состояла в следующем. Так как закон Кирхгофа (43.3) универсален для тел **любой** природы, то в качестве тела, находящегося в равновесии с излучением, можно взять простейшее для расчетов – одномерный гармонический осциллятор (тот самый «заряд на пружинке», который фигурирует в классической элементарной теории дисперсии). Затем можно рассчитать для него величины  $r_{\omega}$  и  $a_{\omega}$ , после чего по формуле (43.3) найти  $r^*_{\omega}$ . Вопрос о том, «что считать площадью поверхности осциллятора» не является непреодолимым: эта «площадь» (принято говорить «сечение поглощения») получается как частное от деления мощности, поглощаемой осциллятором, на мощность излучения, падающего на единицу площади плоской поверхности. Прodelав прямые, но несколько громоздкие выкладки, которые мы здесь не приводим, Планк пришел к выражению:

$$r^*_{\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \langle W \rangle, \quad (43.5)$$

где  $\langle W \rangle$  – средняя энергия тепловых колебаний одномерного осциллятора. Согласно классической физике  $\langle W \rangle = kT$  (в среднем – по  $\frac{1}{2}kT$  на кинетическую и потенциальную энергию). Подставляя  $\langle W \rangle = kT$  приходим к формуле

$$r^*_{\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (43.6)$$

которую принято называть **формулой Рэлея–Джинса** (Рэлей и Джинс получили эту формулу одновременно с Планком, но другим способом). Формула Рэлея–Джинса хорошо согласуется с экспериментом на **низких** частотах, однако на **высоких** частотах противоречит эксперименту, да и вообще, очевидно, абсурдна. Функция  $r^*_{\omega}$  монотонно возрастает с частотой, а значит, площадь под ее графиком бесконечна (интеграл (43.1) расходится), т.е.

абсолютно черное тело при любой конечной температуре излучает бесконечную мощность. Пауль Эренфест позднее дал этой расходимости выразительное название «ультрафиолетовая катастрофа», и оно прижилось.

**Формула Планка.** Для разрешения проблемы «ультрафиолетовой катастрофы» в 1900 г. Планк выдвинул смелую гипотезу: энергия  $W$  осциллятора может принимать не произвольные, как это следует из классической теории колебаний, а лишь **дискретные** (лат. *discretus* – прерывистый) значения, кратные его собственной частоте  $\omega_0$ :  $W = 0, \hbar\omega_0, 2\hbar\omega_0, 3\hbar\omega_0, \dots$ , где  $\hbar$  – некий коэффициент (исторически Планк ввел немного другую константу –  $h \equiv 2\pi \hbar$ , обозначение с горизонтальной чертой для  $h/2\pi$  принадлежит Полю Дираку; сейчас обе постоянные носят имя Планка). Гипотеза Планка оказалась гениальной – она полностью подтвердилась в 20-е гг. XX в., когда была создана квантовая механика.

Почему же экспериментаторы раньше никогда не сталкивались с дискретностью значений энергии осциллятора? Ответ прост: постоянная Планка и частоты **макроскопических** осцилляторов слишком малы (поскольку  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Дж · с) для того, чтобы самыми точными приборами зафиксировать дискретность уровней энергии.

Чтобы понять теорию Планка, прежде всего вспомним, как вычисляется среднее значение («математическое ожидание») в теории вероятности. Пусть величина  $A$  может принимать значения  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  с вероятностями, соответственно  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  (очевидно,  $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  – **условие нормировки**). Тогда  $\langle A \rangle = A_0 p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots + A_n p_n$ .

Для расчета средней энергии «дискретного» осциллятора Планк использовал вероятности, даваемые классической статистикой Максвелла-Больцмана: вероятность того, что система в термодинамическом равновесии имеет энергию  $W$ , пропорциональна  $e^{-W/kT}$ . Таким образом, имеем:

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\frac{W_n}{kT}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{n\hbar\omega_0}{kT}} \equiv \frac{1}{Z} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}, \quad (43.7)$$

где  $Z$  – коэффициент, определяемый из условия нормировки:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}. \quad (43.8)$$

(Начиная с последнего равенства (43.7) и далее мы будем опускать индекс «0» у собственной частоты осциллятора, так как осциллятор с произвольной собственной частотой должен находиться в термодинамическом равновесии с излучением). Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \cdot e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}} = \\ &= \frac{0 \cdot e^{-\frac{0}{kT}} + \hbar\omega \cdot e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + 2\hbar\omega \cdot e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + 3\hbar\omega \cdot e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots}{e^{-\frac{0}{kT}} + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots} = \\ &= \hbar\omega \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + 2 \cdot e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + 3 \cdot e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots}{e^{-\frac{0}{kT}} + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{3\hbar\omega}{kT}} + \dots} = \\ &= \hbar\omega \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}, \end{aligned}$$

где  $x \equiv e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$ . Существует несколько способов вычисления подобных выражений. Один из простейших состоит в непосредственном делении «столбиком» многочленов из числителя и знаменателя – результат оказывается обычной убывающей ( $x < 1$ ) геометрической прогрессией:

$$\begin{array}{r} -x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots \quad | \quad \frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots}{x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots} \\ \underline{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots} \\ -x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + \dots \\ \underline{x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots} \\ -x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \dots \\ \underline{x^3 + x^4 + x^5 + \dots} \\ x^4 + 2x^5 + \dots \\ \dots \end{array}$$

$$\text{Значит } \hbar\omega \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \dots}{1 + x + x^2 + x^3 + \dots} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{x}{1-x}.$$

(Последнее равенство легко получить, заметив, что если  $S = x + x^2 + x^3 + \dots = x + x(x + x^2 + x^3 + \dots) = x + xS$ , то  $S = x/(1-x)$ . Можно, разумеется, и сразу воспользоваться известной формулой суммы прогрессии). Возвращаясь к старым обозначениям, окончательно получаем:

$$\langle W \rangle = \hbar\omega \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \hbar\omega \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (43.9)$$

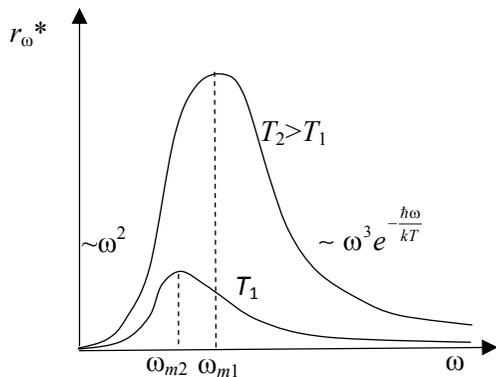
Теперь осталось подставить выражение (43.9) для средней энергии одномерного осциллятора в (43.5). Это и есть знаменитая **формула Планка**:

$$r_{\omega}^* = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (43.10)$$

Графики  $r_{\omega,T}^*$  для двух разных фиксированных температур приведены на рис. 43.1. Формула Планка хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Рассмотрим **асимптотики** формулы Планка.

1. «Классический предел»: низкие частоты, высокие температу-



**Рис. 43.1**

ры ( $\hbar\omega \ll kT$ ). Можно приближенно положить  $e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$ . Тогда вместо (43.10) имеем

$$r^*_{\omega} \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (43.11)$$

что совпадает с формулой Рэлея–Джинса (43.4). Пределы применимости классической физики (по крайней мере, для осциллятора) установлены.

2. «Квантовый предел»: высокие частоты, низкие температуры ( $\hbar\omega \gg kT$ ). Единицей, по сравнению с экспонентой в знаменателе (43.10) можно пренебречь, и, соответственно, получаем:

$$r^*_{\omega} \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}. \quad (43.12)$$

К выражению вида (20.12) еще в 1896 г. на основе некоторых произвольных допущений пришел Вильгельм Вин, поэтому его называют формулой Вина. Очевидно, что при  $\omega \rightarrow \infty$  убывающая экспонента «забывает» возрастающую степенную функцию  $\omega^3$ , что обеспечивает сходимость интеграла по частотам (43.1), и, соответственно, снимается проблема «ультрафиолетовой катастрофы».

Теперь рассмотрим случай **промежуточных** частот, на котором наблюдается переход от возрастания к убыванию – **максимум** функции  $r^*_{\omega}$ . Относительно положения этого максимума можно сделать определенные выводы на основании **вида** функции (43.10). Перепишем (43.10) в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} r^*_{\omega} &= \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \\ &= \frac{(kT)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3 \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \equiv \frac{(kT)^3}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} \frac{y^3}{e^y - 1}, \end{aligned} \quad (43.13)$$

где  $y = \hbar\omega/kT$ . При фиксированной температуре форма кривой определяется только вторым множителем в (43.13):  $f(y) \equiv y^3/(e^y - 1)$ . Функция  $f(y)$  одинакова для всех температур. Обозначим значение  $y$ , при котором  $f(y)$  имеет максимум, как  $y_m$ . Но тогда, возвращаясь к старым обозначениям,  $y_m = \hbar\omega_m/kT$ , или:

$$\frac{\omega_m}{T} = \frac{ky_m}{\hbar} = \text{const} \equiv b', \quad (43.14)$$

где  $\omega_m$  – частота, при которой  $r_{\omega}^*$  имеет максимум. Выражение (43.14) называется **законом смещения Вина**, а постоянная  $b'$  – **постоянной Вина**. Из (43.14) непосредственно следует: **чем выше температура, тем на более высоких частотах наблюдается максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела**. Величину константы в (43.14) можно получить стандартным способом отыскания экстремума (приравниванием нулю производной  $f(y)$  по  $y$ ). Прямые вычисления дают  $b' = 3,694 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$ .

Найдем энергетическую светимость абсолютно черного тела  $R^*$  в соответствии с ее определением (43.1):

$$\begin{aligned} R^* &= \int_0^{\infty} r_{\omega}^* d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = \frac{(kT)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y - 1} dy. \end{aligned}$$

Интеграл в последнем равенстве, в соответствии с таблицей определенных интегралов, равен  $\pi^4/15$ , окончательно получаем:

$$R^* = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} T^4 \equiv \sigma T^4. \quad (43.15)$$

Выражение (43.15) называют **законом Стефана-Больцмана**. В 1879 г. Стефан установил его эмпирически, а Больцман, пять лет спустя, обосновал его теоретически из термодинамических соображений. Постоянная  $\sigma = 5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$  называется **постоянной Стефана-Больцмана**. Итак: **энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его температуры**.

В экспериментальных работах по оптике вместо частоты  $\omega$  обычно фигурирует длина волны  $\lambda$ . Сделаем необходимую замену переменной  $\omega$  на переменную  $\lambda$  во всех важных формулах предыдущих разделов.

Прежде всего, введем спектральную плотность энергетической светимости, так что  $r_\lambda d\lambda$  – мощность, излучаемая единицей поверхности стенки под всеми углами в интервале частот от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  при температуре  $T$ . Учитывая, что  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , имеем  $d\omega = (-2\pi c/\lambda^2)d\lambda$  (знак минус означает просто убывание длины волны при росте частоты). Теперь подставим  $\omega$  и  $d\omega$  в  $r^*_\omega d\omega$ :

$$\begin{aligned} r^*_\omega d\omega &= \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega = \\ &= \frac{\hbar \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} \left(-\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) d\lambda = \\ &= -\frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} d\lambda \equiv -r^*_\lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (43.16)$$

Итак, другой вид **формулы Планка**:

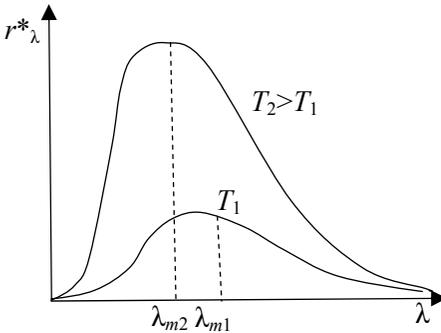


Рис. 43.2

$$r^*_\lambda = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1}. \quad (43.17)$$

Вид кривой для двух различных температур показан на рис. 43.2.

**Закон смещения Вина** для длин волн установим тем же способом, что и для частот, см. (43.13), (43.14).

$$\begin{aligned} r^*_\lambda &= \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} = \\ &= \frac{(kT)^5}{(2\pi)^3 \hbar^4 c^3} \left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right)^5 \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} = \frac{(kT)^5}{(2\pi)^3 \hbar^4 c^3} \frac{y^5}{e^y - 1}, \\ &y \equiv \frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}. \end{aligned}$$

Так же, как и в (43.13) форма кривой определяется вторым множителем с  $y$ , это опять кривая с максимумом. Пусть максимум соответствует  $y_m$ . Но тогда длина волны  $\lambda_m$ , соответствующая максимуму, удовлетворяет соотношению:

$$\lambda_m T = \frac{2\pi\hbar c}{ky_m} = \text{const} \equiv b, \quad (43.18)$$

где  $b$  – **постоянная Вина** (ее не следует путать с введенной выше постоянной Вина  $b'$  для **частот**). Отыскание экстремума второго множителя стандартным методом дает  $y_m = 4,965$ , и последующая подстановка  $y_m$  в (43.17) дает  $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$  м · град.

**Закон Стефана–Больцмана**, разумеется, имеет один и тот же вид вне зависимости от того, по какой переменной ( $\omega$  или  $\lambda$ ) производится интегрирование  $r^*$ . Действительно, согласно (43.16) имеем:

$$\int_0^{\infty} r^*_{\omega} d\omega = -\int_{\infty}^0 r^*_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} r^*_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4. \quad (43.19)$$

Можно показать (доказательство мы опускаем), что формуле Планка соответствует **объемная плотность энергии**  $w_{\omega}$  излучения, приходящегося на частотный интервал от  $\omega$  до  $\omega+d\omega$ , определяемая соотношением  $w_{\omega} = 4r_{\omega}^*/c$ , откуда

$$w_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \quad (43.20)$$

Формула (43.20) показывает, как энергия равновесного излучения распределена по частотам.

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение спектральной плотности энергетической светимости.
2. Какие тела называются абсолютно черными, серыми, цветными?
3. Перечислите предположения, исходя из которых выведен закон Кирхгофа.
4. Почему темный рисунок на осколке чашки из белого фарфора, выгашенном из костра, светится ярко, а фарфор – тускло?

5. Почему свечка светит ярко, а горелка бытовой газовой плиты – тускло?
6. Какой смысл вкладывается в выражение «ультрафиолетовая катастрофа»?
7. Сформулируйте основные положения гипотезы Планка.
8. Почему в повседневной жизни мы не замечаем дискретность значения энергии маятника?
9. Сформулируйте закон смещения Вина.
10. Каким образом можно оценить температуру поверхности Солнца?

#### 44. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

**Релятивистское соотношение между импульсом и энергией.** Специальная теория относительности (СТО) дает следующее соотношение между импульсом  $p$  и энергией  $W$  частицы:

$$W^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2. \quad (44.1)$$

Выражение в правой части, содержащее массу частицы  $m$  и скорость света в вакууме  $c$ , одинаково в **любой** инерциальной системе отсчета, то есть, как еще часто говорят, является **инвариантом**.

Связь (44.1) между энергией и импульсом, даваемая СТО, отличается от классического выражения, Это сразу видно, например, для **свободной** частицы, энергия  $W$  которой равна просто  $p^2/2m$ . Чтобы установить связь между СТО и классической механикой рассмотрим (44.1) при **малых** скоростях по сравнению с  $c$  ( $v/c = mv/mc \approx p/mc \ll 1$ ; знак « $\approx$ » связан с использованием нами для малых скоростей нерелятивистского соотношения  $p = mv$ ):

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \approx \\ &\approx mc^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc}\right)^2 \right] = mc^2 + \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \quad (44.2)$$

Как видно из (44.2), к «старой» кинетической энергии (второму слагаемому) в СТО добавляют постоянную величину  $mc^2$ , называемую **энергией покоя**.

В случае **произвольных** скоростей кинетическая энергия свободной частицы также равна разности полной энергии  $W$  и энергии покоя  $mc^2$ .

Легко видеть, что в отличие от классической механики СТО **допускает** существование «частиц **без массы**», обладающих энергией и импульсом. Действительно, подстановка в (44.21)  $m = 0$  дает

$$W = pc. \quad (44.3)$$

«Безмассовые» частицы действительно **существуют** в природе. Примером таких объектов являются частицы света **фотоны** (от лат. photos – свет).

Как оказалось, энергия и импульс фотонов выражается через обычные характеристики волны – частоту и волновой вектор:

$$\begin{aligned} W &= \hbar\omega; \\ \vec{p} &= \hbar\vec{k}. \end{aligned} \quad (44.4)$$

Соотношения (44.4), называемые **соотношениями де Бройля**, связывают представления о свете как об электромагнитной **волне** с квантовыми (на что указывает постоянная Планка) представлениями о свете как о потоке **частиц**.

**Давление света**, нормально падающего на поглощающую площадку, равно **интенсивности, деленной на скорость света**. Классическое рассмотрение вопроса о световом давлении довольно громоздко. Если же использовать идею фотонов и соотношение (44.3), то результат тривиален. Интенсивность – это **энергия** фотонов, падающих в единицу времени на единичную площадку, а давление, соответственно – **импульс**, передаваемый этой площадке фотонами в единицу времени. Второе сразу получается из первого делением на  $c$ .

Следует сказать, что **все** оптические явления могут быть поняты с точки зрения квантовых («корпускулярных») представлений (включая задачи геометрической и волновой оптики). При этом существует ряд наблюдаемых эффектов, объяснение которых возможно **только** с использованием представления о фотонах. Приведем соответствующие примеры.

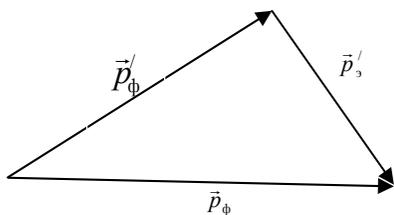


Рис. 44.1

**Эффект Комптона.** При упругом столкновении фотона с электроном (вместо слова «столкновение» используют термин «рассеяние») фотон передает часть своей энергии электрону и, в соответствии с (44.4) меняет частоту. Эффект умень-

шения частоты света при рассеянии на электронах называется **эффектом Комптона**.

Для количественных вычислений воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. Пусть фотон с энергией  $W_\phi$  и импульсом  $\vec{p}_\phi$  рассеивается на угол  $\theta$  (рис. 44.1) на **неподвижном** электроне массой  $m$ . В результате фотон и электрон получают новые энергии и импульсы, которые отметим штрихами. Законы сохранения энергии и импульса дают:

$$\begin{cases} W_\phi + mc^2 = W_\phi' + W_3' \\ \vec{p}_\phi = \vec{p}_\phi' + \vec{p}_3' \end{cases} \quad (44.5)$$

Перегруппируем слагаемые, умножим второе уравнение на  $c$  и возведем оба уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} (W_\phi - W_\phi' + mc^2)^2 = W_3'^2 \\ \left( \vec{p}_\phi - \vec{p}_\phi' \right)^2 c^2 = \left( \vec{p}_3' \right)^2 c^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} W_\phi^2 + W_\phi'^2 + (mc^2)^2 - 2W_\phi W_\phi' + 2W_\phi mc^2 - 2W_\phi' mc^2 = W_3'^2 \\ (p_\phi c)^2 + (p_\phi' c)^2 - 2p_\phi p_\phi' c^2 \cos \theta = (p_3' c)^2 \end{cases}$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, с учетом (44.1), получаем:

$$(mc^2)^2 - 2W_\phi W_\phi' + 2W_\phi mc^2 - 2W_\phi' mc^2 + 2p_\phi p_\phi' c^2 \cos \theta = (mc^2)^2.$$

Производя сокращения и учитывая, что для фотона  $W_\phi = p_\phi c$  имеем:

$$-p_\phi p_\phi' c^2 + (p_\phi c) mc^2 - (p_\phi' c) mc^2 + p_\phi p_\phi' c^2 \cos \theta = 0$$

или

$$(p_{\Phi} - p'_{\Phi})mc = p_{\Phi}p'_{\Phi}(1 - \cos\theta);$$

$$\frac{1}{p'_{\Phi}} - \frac{1}{p_{\Phi}} = \frac{1}{mc}(1 - \cos\theta),$$

так как, согласно (29.24)  $p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \equiv \frac{h}{\lambda}$ , то окончательно получаем:

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \equiv \lambda_K(1 - \cos\theta) = 2\lambda_K \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (44.6)$$

где  $\lambda_K \equiv h / mc \approx 2,4263096 \cdot 10^{-12}$  м – **комптоновская длина волны** электрона.

Отметим, что в качестве единицы длины в микромире часто пользуются величиной порядка размера атома – **ангстремом** ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  м). Таким образом,  $\lambda_K \approx 0,024 \text{ \AA}$ .

Эксперимент по проверке формулы (44.6) был проведен в 1922 г. Артуром Комптоном. Источником фотонов ( $\lambda = 0,71 \cdot 10^{-10}$  м =  $0,71 \text{ \AA}$ ) служила рентгеновская трубка, а мишенью – графит. В качестве прецизионного спектрального прибора Комптону послужила «естественная дифракционная решетка» – монокристалл. Рентгеновские фотоны высоких энергий были необходимы Комптону по следующим причинам. Во-первых, в этом случае было оправдано пренебрежение неизвестными в то время точно кинетической энергией и **энергией связи** с кристаллической решеткой электронов графита в (44.5), а, во-вторых, из-за крайней малости  $\lambda_K$ , уменьшение частоты  $\Delta\lambda$  для коротковолнового излучения было легче зарегистрировать.

Кроме фотонов, увеличивших длину волны, в экспериментах Комптона также наблюдались фотоны, рассеянные под углом  $\theta \neq 0$ , но **не изменившие** частоты. Оказалось, что это фотоны, рассеянные **на ядрах** углерода. Так как ядра во много тысяч раз **тяжелее** электронов, то комптоновский сдвиг от рассеяния на ядрах на 3–4 порядка меньше (масса частицы-мишени в выражении для  $\lambda_K$  стоит в знаменателе).

Эксперименты Комптона показали, что **рассеяние фотонов происходит аналогично рассеянию любых других частиц**. В рамках волновой оптики объяснить эффект изменения частоты света в данном эксперименте не удастся.

**Фотоэффект. Фотоэффектом называют испускание веществом электронов под действием света.** Эффект был открыт в 1887 г. Генрихом Герцем, а всесторонне исследован в 1888 г. русским ученым А.Г. Столетовым. Последний экспериментально обнаружил и сформулировал важные закономерности явления: наиболее эффективно действуют **ультрафиолетовые** лучи (существует **«красная граница»** – максимальная длина волны, при которой эффект имеет место); количество испускаемых заряженных частиц пропорционально **интенсивности** падающего излучения; под действием света испускаются только **отрицательные** заряды (в 1889 г. Ленард и Томсон доказали что это **электроны**).

Все попытки объяснить фотоэффект с помощью классических представлений о свете как электромагнитной волне сталкивались с непреодолимой трудностью. Было непонятно, почему, вне зависимости от интенсивности, только свет с малой длиной волны вызывает испускание электронов. Иными словами, с чем связан феномен «красной границы»?

Ответ был получен в 1905 г. Эйнштейном, развившем идеи Планка о «прерывистом» испускании света: «порциями» с энергией  $\hbar\omega$ . Как мы уже знаем, эти порции получили название квантов, или фотонов.

Эйнштейн записал уравнение, используя следующую модель. Фотон, **поглощаясь** в веществе, передает свою энергию **электрону**, и, если этой энергии достаточно для преодоления притяжения электрона к ионам кристаллической решетки (совершения **работы выхода  $A$** ), то электрон может покинуть вещество, что и составляет суть фотоэффекта. Тогда можно записать ограничения, накладываемые законом сохранения энергии на данный процесс, в виде:

$$\hbar\omega = A + \frac{mv^2}{2}, \quad (44.7)$$

где  $\frac{mv^2}{2}$  – **максимальная** кинетическая энергия электрона, вылетевшего из образца. Уравнение (44.7) называют **уравнением**

**Эйнштейна для фотоэффекта.** Очевидно, что при  $\hbar\omega < A$  фотоэффект невозможен, что и объясняет «красную границу»:  $\omega_{\text{кр}} = A/\hbar$ , или  $\lambda_{\text{кр}} = 2\pi\hbar/A \equiv h/A$ .

Соответствие эксперименту уравнения (44.7) доказывает, что свет состоит из **неделимых** частиц, энергия которых может поглотиться лишь **целиком**. Действительно, из открытого Планком факта, что свет излучается порциями, еще не вытекает «прерывистая» структура самого света. Как образно заметил Эйнштейн, «если пиво всегда продается в бутылках, содержащих пинту, отсюда не следует, что пиво состоит из неделимых частей, равных пинте».

Отметим, что приведенная метафора Эйнштейна на первый взгляд опровергается открытым позже эффектом Комптона, в котором вроде бы «поглощается» как раз «часть» фотона. В связи с этим следует сказать, что по представлениям современной физики эффект Комптона выглядит так: падающий на электрон фотон исчезает и рождается новый – «рассеянный».

Широко распространенным устройством, использующим фотоэффект, является **фотоэлемент** (рис. 44.2). В стеклянной вакуумной колбе находятся два металлических электрода: анод и катод. На анод подается плюс источника питания, на катод – минус (разность потенциалов между анодом и катодом

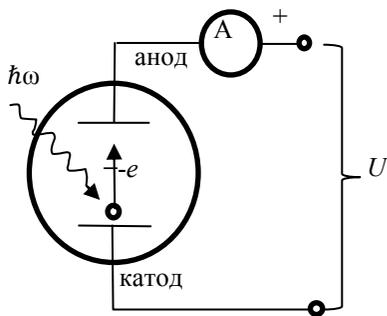


Рис. 44.2

называется **анодным напряжением**  $U$ ). При освещении катода светом возникает фототок.

Типичная зависимость фототока от анодного напряжения (**вольтамперная характеристика** фотоэлемента, сокращенно – ВАХ) показана на рис. 44.3. Нелинейная ВАХ

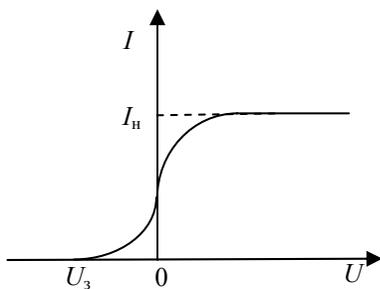


Рис. 44.3

в области малых  $U$  связана с тем, что не все выбитые светом электроны достигают анода. При достаточно больших  $U$  наступает **насыщение**: анода достигают **все** испущенные катодом электроны, и ток не растет выше значения  $I_n$ . В области  $U < 0$  электронам, чтобы попасть на анод, необходимо преодолеть дополнительный потенциальный барьер  $eU$ . При  $mv^2/2 = eU_3$  фототок обращается в ноль, поэтому  $U_3$  называют **задерживающим напряжением**. Поэтому можно записать  $\hbar\omega = A + eU_3$ , или:

$$U_3 = \frac{\hbar}{e}\omega - \frac{A}{e}. \quad (44.8)$$

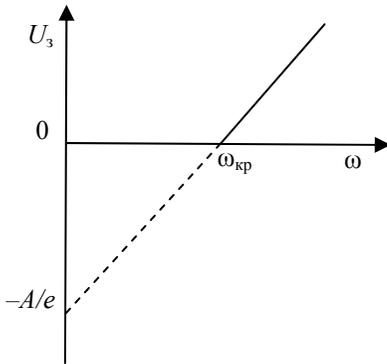


Рис. 44.4

Соответствующий график приведен на рис. 44.4. Наклон прямой  $U_3(\omega)$  определяется отношением фундаментальных констант  $\hbar/e$ , экстраполяция графика к  $U_3 = 0$  отсекает на оси ординат величину  $A/e$ , а точка пересечения графика с осью абсцисс соответствует  $\omega_{кр}$ .

В связи с уравнением Эйнштейна (44.7) интересно отметить, что простая передача **всей** энергии фотона **свободному** электрону запрещена законами сохранения энергии и импульса. Действительно, в этом случае уравнение (29.5) свелось бы к

$$\begin{cases} W_\phi + mc^2 = W_3' \\ \vec{p}_\phi = \vec{p}_3' \end{cases};$$

и далее:

$$\begin{cases} (W_\phi - mc^2)^2 = W_3'^2 \\ (\vec{p}_\phi)^2 c^2 = (\vec{p}_3')^2 c^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} W_{\phi}^2 + (mc^2)^2 + 2W_{\phi}mc^2 = W_3'^2; \\ (p_{\phi}c)^2 = (p_3'c)^2 \end{cases};$$

$$(mc^2)^2 + 2W_{\phi}mc^2 = (mc^2)^2;$$

$$W_{\phi}mc^2 = 0,$$

что абсурдно. На самом деле в процессе поглощения фотона участвует близлежащее **ядро** атома, которое принимает на себя **импульс отдачи**. Однако из-за колоссальной **разницы в массах** электрона и ядра передача импульса отдачи происходит практически **без передачи энергии**, что и обеспечивает справедливость уравнения (44.7).

Зависимость фототока насыщения от частоты света определяется вероятностью (или, как говорят, **сечением**) процесса. Вычисление сечения фотоэффекта представляет собой сложную задачу квантовой физики, которой мы здесь не касаемся.

При **очень мощных** световых пучках, которые стали доступны экспериментаторам после создания лазеров, возможно наблюдение также и **многофотонных процессов**, когда электрон получает энергию от нескольких (числом  $N > 1$ ) фотонов одновременно (в этом случае в левой части уравнения (44.7) следует писать  $N\hbar\omega$ ). Для света небольшой интенсивности вероятность многофотонных процессов пренебрежимо мала.

В заключение отметим, что тот же самый механизм поглощения фотонов может приводить просто к **переходам** электронов вещества в **возбужденные** состояния (состояния с большей энергией), при этом электроны **остаются в образце**. Это явление называют **внутренним** фотоэффектом. В противовес внутреннему фотоэффекту, описанный выше процесс испускания электронов из образца называют **внешним** фотоэффектом.

**Тормозное рентгеновское излучение.** Остановимся теперь на явлении противоположном рассмотренному в предыдущем параграфе – **на испускании веществом фотонов при облучении его электронами** (своего рода «обратный фотоэффект»). Электроны, разогнанные разностью потенциалов  $U$  и, соответственно, обладающие кинетической энергией  $eU$ , падают на поверхность металлической мишени, называемой **антикатодом**. При этом наблюдается излучение света в широком диапазоне частот.

Само по себе излучение света в таком процессе не противоречит классической электродинамике: из-за силы торможения в веществе электроны испытывают **ускорение**, и поэтому **должны** излучать. Тем не менее, классическая электродинамика не в состоянии объяснить существование **максимальной частоты**  $\omega_{\max}$  испускаемого света, открытое экспериментально. Классическая физика не накладывает частотного ограничения на испускаемый при торможении заряда свет.

С квантовой точки зрения максимальная частота излучения не составляет загадки: ведь электрон не может «произвести» фотон с энергией больше, чем его собственная кинетическая энергия. Отсюда и следует искомое ограничение:

$$eU = \hbar\omega_{\max} . \quad (44.9)$$

Следует сказать, что для описания процессов, подобных вышеописанным, энергию  $eU$  обычно выражают не в Джоулях, а в электрон-вольтах ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). Длина волны фотона, удовлетворяющего условию (29.29), выраженная в **ангстремах**, находится из формулы  $\lambda = 2\pi\hbar c / eU = 12390 / U$ , где  $U$  подставляется в Вольтах. Легче для запоминания, хоть и несколько неточна, другая формула («правило раз-два-три-четыре-пять»):  $\lambda = 12345 / U$ . Например, минимальная длина волны фотона, который может излучиться при торможении электрона с кинетической энергией порядка 12 кэВ, составляет примерно  $1 \overset{\circ}{\text{А}}$ , что соответствует **рентгеновскому** диапазону.

### Контрольные вопросы и задания

1. Чем отличается релятивистское выражение для кинетической энергии свободной частицы от классического?
2. Какова связь между энергией и импульсом безмассовых частиц?
3. В чем состоит эффект Комптона?
4. Что такое комптоновская длина волны?
5. Почему в опыте Комптона наблюдались несмещенные пики наряду со смещенными?

6. Объясните зависимость фототока насыщения от интенсивности света.

7. Можно ли объяснить красную границу фотоэффекта из классических соображений?

8. Как определить из результатов опыта по наблюдению фотоэффекта постоянную Планка?

9. Объясните, от каких параметров зависит максимальная частота тормозного рентгеновского излучения.

## 45. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

**Гипотеза де Бройля.** В 1923 г. французскому физику Луи де Бройлю пришла в голову идея. Раз свет имеет **дуальную** природу, т.е. одновременно проявляет свойства, как частиц, так и волн, то почему бы **частицам вещества**, таким как, скажем, электронам, не обладать волновыми свойствами? Давайте, вслед за де Бройлем, сопоставим частице длину волны. Делать мы это будем по аналогии со светом. Плоская монохроматическая электромагнитная волна в вакууме описывается вектором напряженности  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}\vec{r}) + \varphi)$ . Длина волны может быть найдена с помощью модуля волнового вектора

$$\lambda = 2\pi / k. \quad (45.1)$$

Дисперсионное соотношение, как известно  $k = \omega / c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме. Теперь представим свет как совокупность квантов. Энергия одного кванта  $\varepsilon = \hbar\omega$ , его импульс  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ .

Рассмотрим **свободную** (т.е. не взаимодействующую) частицу, например, электрон. Пусть частица, по аналогии с фотоном, обладает волновым вектором, таким, что импульс равен

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (45.2)$$

Тогда, воспользовавшись формулой (45.1), мы найдем для длины волны, сопоставляемой частице вещества

$$\lambda_B = 2\pi / k = 2\pi\hbar / p = h / p. \quad (45.3)$$

Итак, **частицы обладают волновыми свойствами**. Это значит, что для них возможна дифракция и интерференция по аналогии со светом. Но мы в повседневной жизни не наблюдаем эти явления для макроскопических объектов. В чем же здесь дело? Может быть, гипотеза де Бройля не верна? Почему же мы не наблюдаем дифракции камня на заборе по аналогии с дифракции света на дифракционной решетке?

Для ответа на эти вопросы давайте рассчитаем **длину волны макроскопического тела**, скажем, пули, вылетающей из автомата. Пусть масса пули  $m_n = 9 \text{ г} = 0,009 \text{ кг}$ , ее скорость  $v_n = 800 \text{ м/с}$ . Таким образом, импульс пули равен  $p = mv = 7,2 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ . Теперь, найдем ее длину волны де Бройля с помощью формулы (45.3):  $\lambda_n = h / p = 6,63 \cdot 10^{-34} / 7,2 = 0,9 \cdot 10^{-34} \text{ м}$ . Рассмотрим «опыт Юнга для пуль». Пусть пули пролетают через две щели, расстояние между которыми  $d$ . Расстояние до экрана –  $L$ . Будем ли мы наблюдать интерференцию?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассчитаем ширину интерференционной полосы. Из теории интерференции света, мы знаем, что ширина интерференционной полосы равна  $\Delta x = L\lambda / d$ . Пусть  $L = 10 \text{ м}$ ,  $d = 10^{-2} \text{ м}$ . Тогда  $\Delta x = L\lambda / d = 0,9 \cdot 10^{-34} / 10^{-2} \approx 10^{-32} \text{ м}$ .

Итак, **ширина интерференционной полосы** при интерференции макроскопического объекта, скажем пули, оказывается **слишком малой**, чтобы ее можно было обнаружить экспериментально. Вот поэтому мы и не наблюдаем интерференционных явлений для частиц в повседневной жизни.

Теперь рассмотрим **микроскопический объект**, например, электрон, движущийся со скоростью  $v = 10^6 \text{ м/с}$ . Поскольку масса электрона  $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$ , то длина волны де Бройля для такого электрона равна

$$\lambda_e = h / p = 6,63 \cdot 10^{-34} / (0,91 \cdot 10^{-30} \cdot 10^6) = 7,29 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Такой длиной волны обладает **рентгеновское излучение**, для которого наблюдаются явления дифракции и интерференции. Таким образом, электроны тоже **могут** участвовать в **дифракции** и **интерференции**. Более того, как и для света, для электронов существует и приближение **геометрической оптики**. Регулируя

импульс (а значит, **длину волны**), который сообщает электронам **электронная пушка**, можно добиться разрешения **электронного микроскопа** менее одного нанометра. Создана специальная **электронная оптика**: роль линз играют так называемые **магнитные линзы**. Электронные микроскопы выпускаются серийно и используются повсеместно.

**Экспериментальное подтверждение гипотезы де Бройля.** Интерференция электронов была обнаружена еще до появления гипотезы де Бройля. Но тогда этот эксперимент не был понят. Девиссон и Кэнсман в 1921–1923 гг. проводили эксперименты по рассеянию электронов тонкими металлическими пленками. Они наблюдали **максимумы** при рассеянии электронов зависящие от скорости электронов. В одном из опытов прибор лопнул, и никелевая пленка окислилась. Затем эту пленку прокалили, что привело к **ререкристаллизации** с образованием крупных **кристаллов**. При этом число максимумов при рассеянии электронов резко возросло, а сами максимумы сделались более отчетливыми. Происхождение максимумов долго не могли объяснить, пока их не истолковали как результат интерференции волн де Бройля.

В своем опыте **Девиссон и Джермер** исследовали рассеяние электронов на монокристалле никеля. В эксперименте менялся угол  $\Theta$  (он отсчитывается от плотнозаселенной **кристаллографической плоскости**) и ускоряющая разность потенциалов электронов. При угле  $\Theta$ , соответствующем **зеркальному** отражению электронов (угол падения равен углу отражения) от кристаллических плоскостей наблюдался резко выраженный **максимум**.

Попробуем объяснить эксперимент Девиссона и Джермера с помощью гипотезы де Бройля. Сопоставим электрону длину волны де Бройля (45.3). Тогда на кристаллической решетке будет происходить дифракция, аналогичная дифракции рентгеновских на кристалле.

Отметим, что волновые свойства проявляются (и это наблюдается экспериментально!) не только у электронов, но и у других элементарных частиц и даже у легких атомов.

Рассмотрим теперь **дифракцию нейтронов**. Поскольку нейтрон не имеет заряда, то он взаимодействует только с ядрами посредством так называемого сильного взаимодействия. Рассеянные

нейтроны попадают на фотопластинку, покрытую индиевой фольгой. В результате ядерной реакции, фотопластинка чернеет в местах попадания нейтронов. В настоящее время дифракция нейтронов широко используется в кристаллографии для определения структуры кристаллической решетки.

**Принцип неопределенности Гейзенберга.** Можно ли **сколь угодно точно** измерить одновременно **координату**, скажем,  $x$  и **проекцию импульса** частицы на ось  $x$ ? В классической физике ответ очевиден. Конечно же, мы одновременно **можем** знать точные значения проекции импульса и координаты. Однако для микрочастицы ответ неочевиден. Ведь теперь мы имеем дело одновременно и с частицами, и с волнами.

Рассмотрим мысленный эксперимент. Пусть частица с импульсом  $\vec{p}$  пролетает через щель шириной  $d$ . Мы будем фиксировать положение частицы на экране. Такой частице мы можем приписать длину волны де Бройля  $\lambda_B = h / p$ . Следовательно, на щели возникнет дифракция. Воспользуемся формулой определения минимумов  $m$ -го порядка в случае дифракции плоской волны  $d \sin(\theta_m) = m\lambda_B$ , где  $m = 1, 2, 3 \dots$ . Подставим в эту формулу длину волны де Бройля  $\sin(\theta_m) = \frac{mh}{pd}$ . Для первого минимума (границы центрального максимума) мы, очевидно, получим (две зоны Френеля):

$$\sin(\theta_1) = \frac{h}{pd}. \quad (45.4)$$

Предположим, что мы хотим измерить координату  $x$  частицы с помощью нашего опыта. Для этого щель нужно сделать узкой. Чем уже щель, тем точнее мы знаем координату частицы. Но вот проблема: как только мы начнем **уменьшать** ширину щели  $d$ , у нас сразу же **увеличится** угол  $\theta_1$  соответствующий первому минимуму, или, другими словами, увеличится **ширина** центрального максимума. Это значит, что в результате дифракции наша частица попадет на экран где-то в районе центрального максимума. Где точно – мы не знаем. Если мы проделаем много опытов, и будем измерять число электронов, попавших в ту или иную точку экрана, то мы получим дифракционную картину. Однако нужно заме-

титель, что некоторая часть частиц может попасть не в центральный максимум, а в первый, второй и т.д. Но вероятность таких событий мала.

Итак, частица, падавшая перпендикулярно плоскости щели, в результате дифракции движется под углом к этой плоскости. Причем **точное** значение угла мы **не знаем**. Мы знаем только, то, что с наибольшей вероятностью, частица будет двигаться в пределах  $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ , то есть она попадет куда-то в центральный максимум. С другой стороны, проекция импульса частицы на ось  $x$  равна  $p_x = p \sin \theta$ . Но угол  $\theta$  мы **не знаем точно**. Следовательно, и проекция импульса нам точно не известна.

Введем **неопределенности** координаты  $\Delta x$  и проекции импульса  $\Delta p_x$ . Неопределенность данной величины характеризует точность, с которой мы можем измерить эту величину. Из нашего опыта видно, что, точность измерения координаты равна ширине щели  $\Delta x = d$ . Неопределенность же проекции импульса равна  $\Delta p_x = p \sin \theta_1$ . Теперь воспользуемся формулой для первого минимума (45.4).

$$\Delta x \Delta p_x = h. \quad (45.5)$$

Теперь учтем, что частица может оказаться не только в центральном максимуме, но и в первом, втором и т.д., хотя вероятность такого события и мала. Это приведет к тому, что равенство (45.5) заменится **неравенством**:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h. \quad (45.6)$$

Полученное соотношение выражает **принцип неопределенности**, сформулированный Гейзенбергом. Принцип неопределенности: **невозможно одновременно точно определить значение координаты и проекции импульса на соответствующую ось**. Предположим, что мы сумели точно определить **координату**, т.е.  $\Delta x = 0$ , тогда из (45.6) следует, что  $\Delta p_x = \infty$ . То есть о проекции **импульса** мы не знаем **ничего**. Эта проекция может принимать **любое** значение от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Аналогично, если мы точно знаем проекцию импульса, то ничего не знаем о координате.

Сразу же возникает вопрос: может быть наш опыт не очень удачен, какой-нибудь другой эксперимент позволит точно

измерить координату и проекцию импульса? Но при проведении опыта мы использовали волновые свойства частицы. И принцип неопределенности является следствием волновых свойств частиц. Для того чтобы убедиться в том, что дело не в конкретном эксперименте, рассмотрим еще один мысленный опыт, предложенный Гейзенбергом – **микроскоп Гейзенберга**.

Предположим, что мы хотим определить положение частицы с помощью **микроскопа**. Для этого, прежде всего, ее нужно **осветить**. Используем для этой цели **фотон** с длиной волны  $\lambda_\phi$ . Фотон **рассеивается** на частице и попадает в объектив микроскопа. Однако, в силу дифракции света, фотон может попасть в любую точку круга радиуса  $R$  на экране. Если бы мы освещали объектив микроскопа большим числом фотонов, то на экране наблюдалась бы дифракционная картина, положение первого минимума которой и описывалось бы окружностью радиуса  $R$ . Из теории микроскопа известно, что **минимальное** расстояние между двумя предметами, которые видны раздельно, порядка **длины волны** излучения. Т.е. наша частица будет давать размытое изображение в силу дифракции света. Причем **неопределенность координаты**  $x$  порядка **длины волны фотона**:

$$\Delta x \approx \lambda_\phi. \quad (45.7)$$

Теперь, чтобы увеличить точность измерения координаты электрона будем **уменьшать** длину волны излучения, т.е. **увеличивать** его частоту. В конце концов, мы сможем измерить координату сколь угодно точно. Но мы забыли про **импульс**. Если мы будем измерять координату макроскопического тела, например песчинки, то за счет освещения ее фотоном импульс песчинки не изменится. А что же будет с микроскопической частицей? При рассеянии фотон может передать электрону максимальный импульс  $2p_\phi$ . Таким образом, неопределенность импульса электрона будет равна  $\Delta p_x \approx 2p_\phi$ , где  $p_\phi$  – импульс фотона. Но импульс фотона, как мы знаем, равен  $p_\phi = \hbar k = h / \lambda_\phi$ . Отсюда для неопределенности проекции импульса электрона получим

$$\Delta p_x \approx 2h / \lambda_\phi. \quad (45.8)$$

Итак, уменьшая длину волны, мы тем самым увеличиваем неопределенность импульса электрона. Перемножив неопределенности импульса и координаты (формулы (45.7) и (45.8)) мы снова приходим к принципу неопределенности Гейзенберга

$$\Delta p_x \Delta x \approx h.$$

Из принципа неопределенности вытекает следствие. В классической механике мы представляли полную энергию частицы в виде суммы **кинетической** и **потенциальной** энергий. Кинетическая энергия зависит от скорости, т.е. от импульса частицы, в то время как потенциальная энергия зависит от координаты. В квантовой механике такое разбиение **невозможно**, ведь частица не может иметь одновременно определенные координаты и импульс. В квантовой механике имеет смысл только **полная энергия**.

**Дифракция на двух щелях.** Рассмотрим еще один эксперимент. Во-первых, вернемся к «опыту Юнга для пуль». Пусть пули, вылетающие из автомата, пролетают через две щели. Как мы видели, приписанная пуле длина волны де Бройля настолько мала, что обнаружить интерференцию мы не сможем (расстояние между максимумами оказалось равным  $\Delta x \approx 10^{-32}$  м). Возьмем маленький участок экрана и посчитаем число пуль, попавших в эту область экрана. Если разделить полученное число на полное число пуль, попавших в экран, то мы получим **вероятность** попадания пули в данный участок экрана  $P = \frac{\Delta N}{N}$ . Введем **плотность**

**вероятности** попадания пули на участок экрана длиной  $\Delta x$ ,  $f = \frac{P}{\Delta x}$ . Мы получим два максимума: каждый точно **напротив**

соответствующей щели. Теперь закроем сначала одну из щелей, затем другую. Соответствующий максимум будет, очевидно, исчезать. Теперь, если сложить плотности вероятностей  $f_1$  и  $f_2$  то мы получим плотность вероятности  $f = f_1 + f_2$ . Эта сумма плотностей вероятностей выражает тот факт, что пуля, попавшая в экран, прошла **либо** через одну щель, **либо** через другую.

Теперь проведем аналогичный опыт с **электронами**. Но для электрона мы должны наблюдать **интерференцию**. Значит, на

экране будет **интерференционная картина**, то есть будут чередоваться темные и светлые полосы, аналогичные классическому опыту Юнга. Мы видим, что теперь, за счет интерференции  $f \neq f_1 + f_2$ . Если теперь мы закроем одну из щелей, то интерференция **исчезнет**.

Но остается вопрос: **через какую** щель пролетел электрон? Давайте сделаем следующий опыт. Будем освещать обе щели светом и по рассеянию фотонов на электронах будем определять, где пролетел электрон. Итак, мы будем строить два графика: слева мы отмечаем точку, если электрон пролетел через левую щель, и справа, если электрон пролетел через правую щель. У нас получатся точно такие же результаты, как в «опыте для пуль». То есть теперь плотности вероятностей **складываются**. Как только мы **узнали**, через какую щель пролетел электрон, **интерференция** сразу же **прекратилась**.

Для того чтобы определить, где пролетел электрон, мы освещали его светом. И фотон, рассеявшись на электроне, передал бы ему свой импульс, тем самым, изменив направление его движения, что привело к исчезновению интерференции. Импульс фотона  $p_\phi = h/\lambda_\phi$ . Это значит, что, увеличивая длину волны фотона, мы уменьшаем его импульс, и тем самым, уменьшаем возмущение электрона фотоном. В конце концов, это возмущение станет настолько малым, что интерференция восстановится, и мы снова получим интерференцию!

Но тут нас ждет одна проблема. Нам понадобится **микроскоп** для наблюдения рассеянных фотонов. Но как мы видели, с увеличением длины волны изображение электрона становится все более размытым, поскольку  $\Delta x \approx \lambda_\phi$ . Так вот, как только интерференционная картина **восстановится**, неопределенность координаты электрона **превысит** расстояние между щелями. И мы опять **не сможем** сказать, через какую щель пролетел электрон.

Принцип неопределенности формулируется не только для проекции импульса и координаты, но и для **энергии и времени**.

$$\Delta E \Delta t \geq h. \quad (45.9)$$

Этот принцип утверждает, что **чем короче время** существования какого-то состояния (или время измерения параметров этого состояния), тем с **меньшей определенностью** можно говорить об **энергии** этого состояния.

В качестве примера рассмотрим **возбужденное** состояние атома. Время жизни возбужденного состояния атома (естественно не метастабильного) порядка  $\tau = 10^{-8}$  с. Т.е. за это время атом перейдет в невозбужденное состояние, излучив квант света. Найдем **неопределенность энергии** возбужденного состояния атома с помощью формулы (45.9):

$$\Delta E = h / \tau = 6,63 \cdot 10^{-34} / 10^{-8} = 6,63 \cdot 10^{-26} \text{ Дж}.$$

Найдем **неопределенность частоты** излученного при переходе фотона. Поскольку энергия кванта равна **разности** энергий возбужденного  $E_1$  и невозбужденного  $E_2$  уровней  $\hbar\omega = E_2 - E_1$ , то

$$\text{неопределенность частоты } \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{6,63 \cdot 10^{-26}}{6,63 \cdot 10^{-34}} 2\pi = 6,28 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Эта частота соответствует наблюдаемому на эксперименте **естественному уширению спектральной линии**.

**Скорость волн де Бройля. Волновой пакет.** Если ограничиться нерелятивистскими частицами, скорость которых много меньше скорости света в вакууме, то импульс частицы  $\vec{p} = m\vec{v}$ , а энергия

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (45.10)$$

Формула (45.11) представляет собой **дисперсионное соотношение** для нерелятивистской частицы. При рассмотрении электромагнитных волн мы ввели понятие **фазовой и групповой скоростей**. Фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} \quad (45.11)$$

представляет собой скорость **бесконечной синусоидальной волны**. Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} \quad (45.12)$$

есть скорость распространения **огибающей** волнового пакета. В вакууме эти скорости не различаются и равны скорости света в вакууме. **В среде** фазовые и групповая скорости различаются в силу **дисперсии** света. Вдали от области поглощения групповая скорость характеризует скорость распространения **сигнала**.

Найдем фазовую и групповую скорости частицы. По аналогии с фотонами

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}. \quad (45.13)$$

Подставим в (45.13) формулу (45.10):

$$\omega = \frac{p^2}{2m\hbar}. \quad (45.14)$$

Теперь с помощью формул (45.11), (45.12) и (45.2) найдем фазовую и групповую скорости частицы:

$$v_{\text{ф}} = \frac{p}{2m}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{p}{m}.$$

Поскольку  $p = mv$ , то  $v_{\text{ф}} = \frac{v_{\text{гр}}}{2}$ .

Итак, мы пришли к выводу, что фазовая скорость волны де Бройля в два раза **меньше** скорости частицы, в то время как **групповая скорость равна скорости частицы**. Таким образом, **частице** необходимо сопоставлять **не одну** бесконечную синусоидальную волну, а **волновой пакет**, групповая скорость которого и равна скорости частицы.

При изучении **дисперсии** света мы выяснили, что волновой пакет в среде **расплывается** в силу того, что фазовые скорости волн, из которых состоит волновой пакет, **различны**. Однако в вакууме все фазовые скорости одинаковы и волновой пакет, состоящий из электромагнитных волн, не расплывается.

Будет ли расплываться волновой пакет волн де Бройля? Рассмотрим частицу, описываемую в начальный момент времени волновым пакетом, пусть частица движется вдоль оси  $x$ . Ширина волнового пакета описывает не что иное, как неопределенность координаты  $\Delta x_0$ . Такой частице мы должны сопоставить группу

волн де Бройля, с длинами волн от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ . Причем  $\lambda = h / p$ . Следовательно, такому волновому пакету присущ **разброс скоростей**  $\Delta v = \Delta p_{x0} / m$ , где  $\Delta p_{x0}$  начальная неопределенность проекции импульса. Через время  $t$  волновой пакет **расплывется**, и **неопределенность координаты** станет равна  $\Delta x = \Delta v \cdot t = \frac{\Delta p_{x0} t}{m}$ . Теперь, воспользовавшись принципом неопределенности (45.6), получим:

$$\Delta x = \frac{ht}{m\Delta x_0}.$$

Оценим величину  $\Delta x$ . Пусть в начальный момент электрон был локализован в области, имеющей атомные размеры  $\Delta x_0 = 10^{-10}$  м. Какова же будет неопределенность координаты через 1 секунду?

$$\Delta x = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{0,91 \cdot 10^{-30} \cdot 10^{-10}} = 7 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Итак, свободная частица, локализованная на **атомных** размерах, за одну **секунду** «расплывется» до расстояний порядка 7000 км!

### Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, почему опыты Юнга невозможно провести с пулями, вылетающими из пистолета.
2. Расскажите о дифракции электронов на двух щелях.
3. Сформулируйте соотношение неопределенности для импульса.
4. Почему квантовые частицы не видны в микроскоп Гейзенберга?
5. Сформулируйте соотношение неопределенности для энергии.
6. Что такое время жизни квантового состояния?
7. С какой скоростью движется частица – с фазовой или с групповой?
8. Каково дисперсионное соотношение для нерелятивистских частиц?

## 46. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Как законченный раздел физики **квантовая механика** сформировалась во второй половине 20-х гг. XX в. а и связана с именами таких ученых как В. Гейзенберг, Э. Шредингер, П. Дирак, М. Борн и др. По своему «языку» квантовая механика радикально отличается от классической. Систематическое ее изложение в данном пособии невозможно в силу ограниченности объема пособия. Тем не менее, ниже будут перечислены некоторые из важнейших особенностей ее построения и рассказано о некоторых простейших квантовомеханических задачах. Начнем с основных **понятий** этой науки.

**Состояние.** Каждая частица в любой момент времени находится в каком-то **состоянии**. Это состояние характеризуется **волновой функцией** – в общем случае **комплексной** функцией действительных переменных (координат и времени), **непрерывной** вместе со своими **первыми производными**, и обозначается  $\Psi(x, y, z, t)$ . Волновая функция **не наблюдаема** (ее нельзя «измерить» приборами), на это прямо указывает то, что ее значения – **комплексные числа**, в то время как физические величины выражаются действительными. **Квадрат модуля**  $|\Psi|^2 \equiv \Psi\Psi^*$  (звездочкой обозначено **комплексное сопряжение** – замена знака при всех мнимых единицах « $i$ ») волновой функции равен **плотности вероятности** обнаружения частицы в точке  $(x, y, z)$  в момент  $t$ . Иными словами, вероятность  $dp$  нахождения частицы в бесконечно малом объеме  $dV = dx dy dz$  в окрестности точки  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  равна  $|\Psi|^2 dV$ ). Поэтому волновая функция может проявить себя в эксперименте только **статистически**. Из определения плотности вероятности следует важное свойство волновой функции: она должна удовлетворять **условию нормировки**, которое просто выражает факт, что частица **достоверно** хоть где-то находится. Таким образом,

$$\int dp = \int |\Psi|^2 dV = 1.$$

Интеграл в условии нормировки берется, грубо говоря, «по всей Вселенной».

**Наблюдаемые.** Некоторым важным физическим величинам (энергии, импульсу, моменту импульса и др.), называемым **наблюдаемыми**, в квантовой механике соответствуют **операторы**, которые помечают знаком « $\hat{\quad}$ », например  $\hat{H}$ . Напомним, что оператором в математике называют **правило**, по которому одна функция ставится в соответствие другой. При этом говорят: оператор **действует** на функцию и получается **другая** функция. В таблице 46.1 перечислены некоторые простейшие операторы квантовой механики.

Таблица 46.1

### Некоторые операторы квантовой механики

Наблюдаемая	Обозначение	Правило действия на $\Psi$
координата $x$ ( $y, z$ – аналогично)	$\hat{x}$	$x \cdot \Psi$
$x$ – проекция импульса	$\hat{p}_x$	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi$
вектор импульса	$\hat{\vec{p}}$	$-i\hbar \cdot \text{grad } \Psi$
потенциальная энергия $U(x)$	$\hat{U}(x)$	$U(x) \cdot \Psi$
кинетическая энергия $\frac{p^2}{2m}$	$\frac{\hat{p}^2}{2m}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi$
полная энергия $U(x) + \frac{p^2}{2m}$	$\hat{H}$ – оператор Гамильтона, или гамильтониан	$\left[ U(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right] \Psi$

Отметим, что если квантовомеханические наблюдаемые имеют классические аналоги, то выражения для них совпадают с классическими, при замене операторов на соответствующие физические величины. Напомним, также, что  $i$  – мнимая единица,  $i^2 = -1$ .

**Собственные значения операторов.** Из сказанного совершенно непонятно, каким образом в квантовой механике выглядит то, с чем привычно имеет дело физика, – результаты измерений. Оказывается, что измеряемые в эксперименте значения наблюдаемых в квантовой механике являются **собственными значениями** соответствующих операторов. Напомним, что если при действии

оператора на функцию получается **та же самая функция, умноженная на константу**, то такая функция называется **собственной функцией** оператора, а константа – **собственным значением** оператора. Так как не любая функция является собственной функцией оператора, делаем вывод, что **не при всех состояниях** частицы можно говорить о **значениях** ее наблюдаемых. Операторы всех наблюдаемых квантовой механики обладают свойством **эрмитовости**, что означает, что их собственные значения – **всегда действительные числа**.

**Уравнение Шредингера.** Это уравнение в квантовой механике имеет значение второго закона Ньютона в механике классической. Вот как оно выглядит:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (46.1)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда **гамильтониан не зависит от времени** явно (это соответствует **изолированной системе** в классической механике). Пусть нас интересуют только **состояния с определенной энергией** (то есть состояния, в которых **в принципе** можно говорить о величине энергии частицы), что прямо означает, что функция  $\Psi$  является собственной функцией гамильтониана:  $\hat{H}\Psi = E\Psi$ , где  $E$  – собственное значение гамильтониана, а проще говоря – **полная энергия системы**. Подставляя это выражение в (46.1), имеем:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi, \quad (46.2)$$

откуда

$$\Psi = \psi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (46.3)$$

где  $\psi(x)$  – произвольная функция **координаты**. Таким образом, все **состояния с определенной энергией** имеют одну и ту же **универсальную** зависимость волновой функции от **времени**:

$e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ . Далее, непосредственная подстановка (46.3) в (42.2) дает «обычное» уравнение на собственные значения гамильтониана

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (46.4)$$

но в литературе его часто называют «стационарным уравнением Шредингера», а функцию  $\psi(x)$  – «волновой функцией». Как и  $\Psi$ , функция  $\psi$  удовлетворяет условию нормировки:

$$|\Psi|^2 \equiv \Psi\Psi^* = \psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \cdot \psi^* e^{+i\frac{E}{\hbar}t} = \psi\psi^* = |\psi|^2.$$

Несмотря на разницу между  $\psi(x)$  и  $\Psi(x,t)$  такая терминология обычно не приводит к путанице. Ниже мы будем иметь дело только со «стационарными» уравнениями вида (46.4). Рассмотрим несколько простейших задач.

**Свободная частица** (состояние с определенным импульсом). В качестве первого примера рассмотрим частицу, обладающую **только** кинетической энергией (для простоты ограничимся одномерным случаем). Тогда задача на собственные функции и собственные значения оператора  $x$ -проекции импульса выглядит так (см. табл. 46):

$$\hat{p}_x\Psi = -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} = p_x\Psi. \quad (46.5)$$

Уравнение (46.5), по сути, ничем не отличается от (46.2), и его решение – это, конечно, экспонента. В данном случае

$\psi = C \cdot e^{i\frac{p_x}{\hbar}x}$ , где  $C$  – произвольная константа, определяемая из условия нормировки. Тогда «полная» волновая функция свободной частицы будет иметь вид плоской волны:

$$\Psi = C \cdot e^{i\left(\frac{p_x}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \equiv C \cdot e^{i(k_x x - \omega t)},$$

где  $p_x = \hbar k_x$  и  $E = \hbar\omega$ . Итак, **соотношения де Бройля** в квантовой механике появляются «автоматически»! То, что в этом простейшем случае  $\Psi$  имеет вид **плоской волны** и объясняет то, что функцию называют **волновой**. Далее,

$$|\Psi|^2 = |C|^2 \cdot e^{i\left(\frac{p_x}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} \cdot e^{-i\left(\frac{p_x}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)} = |C|^2 = \text{const.}$$

Мы видим, что плотность вероятности нахождения частицы в любой точке пространства **постоянна**: частица **равновероятно** находится, где угодно. Но именно об этом и говорит нам принцип неопределенности Гейзенберга: если импульс частицы известен

точно, то неопределенность ее координаты равна бесконечности. Мы видим, что квантовая механика не нуждается ни в принципе неопределенности, ни в соотношениях де Бройля.

**Потенциальный барьер** (одномерный случай). Пусть зависимость потенциальной энергии частицы массой  $m$  имеет «ступенчатый» вид:  $U(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $U(x) = U_0 > 0$  при  $x > 0$ . Частица с энергией  $E$  движется слева направо по направлению к «барьеру» находящемуся в точке  $x = 0$ . Необходимо объяснить характер движения частицы в зависимости от ее полной энергии  $E$ .

**Классическое решение.** Если полная энергия частицы  $E$  меньше «высоты» барьера  $U_0$ , то, независимо от «крутизны» барьера, частица «отражается» от него без потери скорости; в противном случае ( $E > U_0$ ) частица **преодолеывает** барьер и движется в прежнем направлении с меньшей скоростью.

**Квантовое решение.** Необходимо рассмотреть **две области**.

В области  $x < 0$  волновую функцию можно написать сразу

(ведь это просто ситуация свободной частицы):  $\psi = C \cdot e^{i \frac{p x}{\hbar}}$ . Момент  $p$  проекции импульса связан с энергией классическим соотношением  $p = \sqrt{2mE}$ .

В области  $x > 0$  уравнение Шредингера (46.4) имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U_0 \psi = E \psi \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi = 0. \quad (46.6)$$

Согласно правилам решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения ищем решение в виде:  $\psi \sim e^{\alpha x}$ . Подставляя в (46.6) имеем «характеристическое уравнение»:

$$\alpha^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0); \quad \alpha = \pm \frac{\sqrt{-2m(E - U_0)}}{\hbar} = \pm i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}.$$

Таким образом, волновая функция при  $x > 0$  имеет вид:

$$\psi = C_1 e^{i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} x} + C_2 e^{-i \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar} x}. \quad (46.7)$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  выбираются из соображения непрерывности  $\psi$  и ее производной на всей оси  $x$  и условия нормировки (мы не будем сейчас этим заниматься).

Теперь проанализируем решение (46.7) и сравним его с классическим.

Начнем со случая классического «преодоления» барьера:  $E > U_0$ . В области  $x > 0$  частица ведет себя так же, как свободная, но с меньшей частотой «волны де Бройля»: вместо  $\omega = E/\hbar$  имеем  $\omega = (E - U_0)/\hbar$ . Такая ситуация в точности соответствует классической. Есть, однако, и существенное отличие (здесь мы не будем его доказывать): существует ненулевая **вероятность** отражения частицы **назад** от барьера (ненулевой **коэффициент отражения**)! Подобное совершенно невозможно в классической механике.

Еще более удивительный результат получается для классически непреодолимого барьера  $U_0 > E$ . В волновой функции (46.7) под знаком корня оказывается отрицательное число. В классической механике такое выражение не имеет смысла. Однако, хотя бы потому, что волновая функция «и так» комплексная, мы обязаны такой корень извлекать! Вместо (46.7) мы получаем:

$$\psi = C_1 e^{-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}x}{\hbar}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}x}{\hbar}}.$$

Второе слагаемое неограниченно возрастает на бесконечности, что не имеет физического смысла (поэтому полагаем  $C_2=0$ ), однако первое слагаемое таковой смысл имеет. Поэтому

$$\psi = C_1 e^{-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}x}{\hbar}}. \quad (46.8)$$

Мы получили, что при  $x > 0$   $\psi \neq 0$ ! Иными словами, даже в случае классической непреодолимости барьера, частица с некоторой вероятностью **проходит в классически-недоступную область** (естественно, как и в случае  $E < U_0$ , существует и вероятность отражения назад). Данное явление получило название **туннельного эффекта**; оно экспериментально открыто и используется в современных технологиях (например, в **туннельных микроскопах**). Все происходит так, как будто внутри барьера имеется «туннель», который «помогает» частице проникнуть вглубь барьера.

**Бесконечно глубокая потенциальная яма.** Рассмотрим опять одномерный случай. Пусть потенциальная энергия частицы  $U$  равна нулю на отрезке  $0 < x < l$ , а в остальных случаях равна

бесконечности. В классическом случае частица либо лежит на дне ямы, либо (если она обладает кинетической энергией  $E \neq 0$ ) «прыгает» внутри ямы; **никаких ограничений на значения  $E$  в классической механике нет.** Принцип неопределенности сразу же указывает нам на одну особенность поведения частицы в квантовом случае: **координата** частицы имеет **неопределенность  $l$** , поэтому **неопределенность импульса отлична** от нуля, а значит, по меньшей мере, классический вариант «лежания на дне» уже **невозможен**. Рассмотрим более подробно квантовое решение задачи.

В областях  $x < 0$  и  $x > l$  воспользуемся готовым решением (46.8), устремив  $U_0$  к бесконечности: мы получаем  $\psi \equiv 0$  (бесконечные барьеры все-таки непреодолимы!). В области  $0 < x < l$  имеем ситуацию свободной частицы, которая может двигаться **как вправо, так и влево**:  $p_x = \pm p$ , где  $p$  – модуль импульса частицы. Поэтому волновая функция будет суперпозицией «волн вправо» и «волн влево»:

$$\psi(x) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}x} + Be^{-i\frac{p}{\hbar}x},$$

где  $A$  и  $B$  константы, подлежащие определению. Из условия **непрерывности** волновой функции, она должна обращаться в ноль на границах ямы. Поэтому:

$$\begin{cases} 0 = \psi(0) = A + B \rightarrow B = -A \\ 0 = \psi(l) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}l} + Be^{-i\frac{p}{\hbar}l} \end{cases},$$

$$0 = \psi(l) = A \left( e^{i\frac{p}{\hbar}l} - e^{-i\frac{p}{\hbar}l} \right) =$$

$$= A \left( \cos \frac{p}{\hbar}l + i \cdot \sin \frac{p}{\hbar}l - \cos \frac{p}{\hbar}l + i \cdot \sin \frac{p}{\hbar}l \right) = 2iA \cdot \sin \frac{p}{\hbar}l,$$

(использовано **соотношение Эйлера**  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ ). Последнее уравнение удовлетворяется только при **дискретных** значениях модуля **импульса**  $pl/\hbar = \pi n$ , где  $n$  – любое натуральное число. По физическим соображениям, значение  $n = 0$  ( $p = 0$ ) не подходит, так как сразу приводит к  $\psi \equiv 0$ , что означает, что частицы просто

не существует. Таким образом модуль импульса частицы может принимать значения  $p_n = \pi\hbar n/l$ , где  $n = 1, 2, 3\dots$ . Соответственно, могут быть только **дискретными** и значения кинетической **энергии**:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}, \quad n=1, 2, 3\dots \quad (46.9)$$

Обобщая полученный результат, можно доказать, что если движение квантовой системы **финитно** (ограничено в пространстве), то собственные значения оператора энергии, или гамильтониана,  $\hat{H}$  **дискретны** (или, по-другому, **квантованы**), в противном случае – **непрерывны**. Так, дискретные значения энергии имеют гармонический осциллятор, электроны в атоме, нуклоны в ядре. Дискретные значения энергии приводят к линейчатым спектрам излучения и поглощения, как это имеет, например, в атомах разреженных газов.

В заключение решения этой задачи, вернемся к **принципу неопределенности**  $\Delta p \Delta x > \hbar$ . В качестве **неопределенности импульса**  $\Delta p$  возьмем наименьшее значение его модуля  $p_1 = \pi\hbar/l$ . Умножая  $p_1$  на **неопределенность координаты**  $\Delta x = l$ , получаем  $\pi\hbar < \hbar$ . Как и всегда в квантовой механике, принцип неопределенности выполняется автоматически.

**Гармонический осциллятор.** Назовем гармоническим осциллятором частицу, движущуюся по прямой линии, на которую действует возвращающая в положение равновесия сила, **пропорциональная смещению** частицы от положения равновесия. Масса частицы  $m$ , коэффициент пропорциональности между силой и смещением частицы (жесткость)  $k$ . Следует описать характер движения частицы в зависимости от величины ее полной энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x), \quad \text{где } U(x) = \frac{1}{2} kx^2.$$

**Классическое решение.** Положительная полная энергия частицы  $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$  может быть **любой**. При фиксированной  $E = E_0$  частица совершает **гармонические колебания на собственной частоте**  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  с амплитудой координаты

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \quad \text{и амплитудой скорости } v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}.$$

**Квантовое решение.** Волновую функцию  $\psi(x)$  квантового осциллятора можно найти, решив уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 \psi = E\psi.$$

Математическое решение этого уравнения оказывается достаточно сложным; можно указать, что его решения – волновые функции – выражаются как произведения экспонент на полиномы Чебышева–Эрмита. Анализ этих решений приводит к следующему выводу. Энергетические уровни осциллятора описываются формулой:

$$E_n = \hbar\omega_0 \left( n + \frac{1}{2} \right), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Разность энергий соседних уровней равна  $\hbar\omega_0$  (они находятся на равных «расстояниях» друг от друга – гениальная догадка Планка в теории теплового излучения!). Кроме этого, существует нижний (**нулевой**) уровень энергии, равный  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega_0$

(**классическая** величина  $E \geq 0$  могла быть **любой**). В классической механике **нулевые колебания** осциллятора не имеют места.

Равенство  $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = 0$  означало бы, что нам совершенно

**точно** известны импульс  $p_x$  и координата  $x$  частицы, равные нулю. Соотношение неопределенностей (одна из главных закономерностей квантового мира)  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$  утверждает, что это **невозможно**.

**Атом водорода.** Это квантовомеханический аналог **задачи Кеплера** в классической механике – движение малого тела в **центральной поле** массивного силового центра; потенциал поля спадает с расстоянием  $r$  по закону  $-1/r$ . По Кеплеру, траектории малого тела в случае финитных движений представляют собой эллипсы, а спектр значений его энергии непрерывен.

**Квантовое решение.** Для атома водорода гамильтониан имеет вид суммы операторов кинетической и потенциальной энергий:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (46.9)$$

где  $\hat{p}$  – оператор импульса,  $m$  – масса электрона,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $e$  – элементарный электрический заряд,  $r$  – расстояние между электроном и протоном. Оператор Лапласа в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$  имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Отыскание собственных значений оператора (49.6) является трудной математической задачей. Приведем лишь конечный результат:

$$E_n = -E_R \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (46.10)$$

где  $n$  – **главное квантовое число**, принимающее значения 1, 2, 3, ... . Таким образом, главное квантовое число определяет уровни энергии электрона в атоме водорода. Состояние с  $n=1$  называется **основным состоянием**, состояния с  $n>1$  – **возбужденными состояниями**.

Константа  $E_R = \frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} = 13,6 \text{ эВ}$  называется **энергией**

**ионизации атома водорода** (или, по-другому, **потенциалом ионизации атома водорода**) и используется в атомной физике в качестве единицы измерения энергии, называемой **ридбергом**.

Далее, можно показать, что волновые функции (их называют также **орбиталями**), соответствующие одним и тем же значениям  $n$ , являются одновременно и собственными функциями оператора **модуля орбитального момента импульса** электрона  $\hat{L}$  и оператора **проекции момента орбитального момента импульса** на произвольную ось  $\hat{L}_z$ .

Собственные значения  $\hat{L}$  равны  $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ , где величина  $l = 0, 1, \dots, (n-1)$  называется **орбитальным квантовым числом**. Волновые функции – решения уравнения (46.9) называются **орбиталями** и маркируются  $s, p, d, f, \dots$  для  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  соответственно. Собственные значения  $\hat{L}_z$  равны  $m\hbar$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  называется **магнитным квантовым числом**.

Таким образом, энергия электрона в атоме дискретна (квантована). Знак минус в выражении (46.10) указывает на то, что полная энергия электрона в атоме меньше, чем в свободном состоянии. За нуль отсчета принимается энергия при  $n = \infty$ , когда электрон не связан с ядром, а его кинетическая энергия равна нулю.

В спектроскопии уровни энергии принято изображать горизонтальными линиями, а переходы между ними – стрелками (рис. 46.1). Расстояния между горизонтальными линиями пропорциональны соответствующим разностям энергий. При переходе электрона из возбужденного состояния в состояние с более низкой энергией испускается фотон, энергия которого равна разности энергий электрона (**правило частот**):  $h\omega = E_{n_2} - E_{n_1}$ . С учетом  $\omega = 2\pi c / \lambda$ , из (46.10) имеем:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{4\pi h^3 c} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (46.11)$$

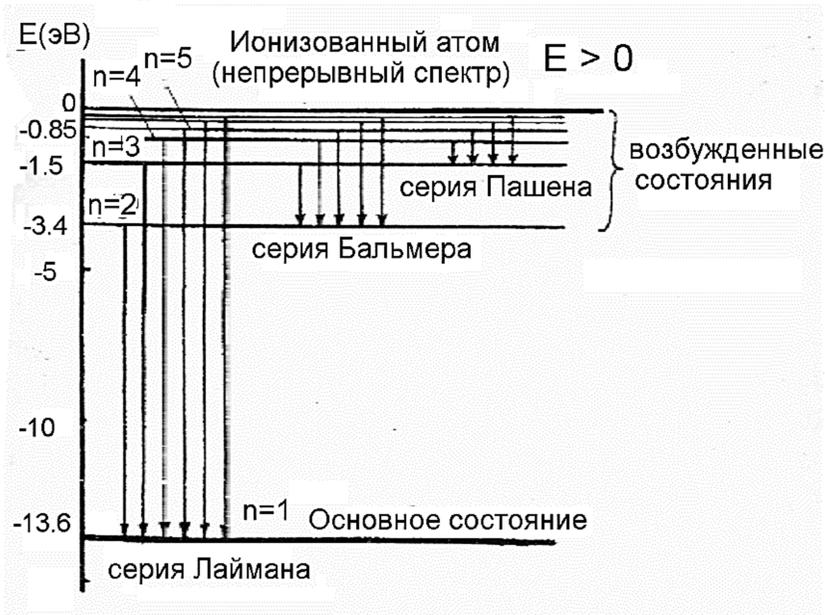


Рис. 46.1

Важное значение для оптики имеет **серия Бальмера** (то есть переход электронов на уровень с  $n_1 = 2$ ): первые четыре линии серии Бальмера лежат в **видимом диапазоне**.

### Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите известные вам свойства волновой функции.
2. Какие математические объекты соответствуют в квантовой механике динамическим переменным?
3. Каким образом в квантовой механике получают численные значения динамических переменных?
4. Какой вид имеет волновая функция свободной частицы?
5. Какое физическое явление называется «туннельный эффект»?
6. Перечислите основные особенности энергетических уровней в потенциальной яме.
7. Как распложены энергетические уровни гармонического осциллятора?
8. Что такое «нулевые колебания» осциллятора?
9. Какой вид зависимости энергии электрона в атоме водорода от главного квантового числа?
10. Излучения от каких переходов в атоме водорода лежат в видимом диапазоне длин волн?

## 47. БОЗОНЫ И ФЕРМИОНЫ

Как мы уже знаем, теория вероятностей органически входит в квантовую механику (например, через квадрат модуля волновой функции). Еще одной поразительной особенностью квантовой механики является метод исчисления вероятностей: в задачах, содержащих более, чем одну частицу, способ решения стандартных задач теории вероятностей принципиально отличается от классического, и, следовательно, приводит к другим решениям тех же задач. **Принцип тождественности**. Оказывается, что если мы имеем две частицы «с одним названием», например, два электро-

на, то **не существует** ни одного экспериментального способа **отличить** один от другого. Электроны нельзя «занумеровать». Поэтому, нельзя сказать «первый электрон находится в состоянии  $\Psi_1$ , а второй – в состоянии  $\Psi_2$ », следует говорить «в состояниях  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  находятся по одному электрону». Поэтому физики просто говорят о **числах заполнения** состояний (о **количестве** частиц в каждом состоянии).

Для описания состояния двух частиц введем волновую функцию  $\Psi_{12} = \Psi_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$ , она означает: в момент времени  $t$  первый электрон находится (конечно, с некоторой вероятностью, которую можно найти из волновой функции) в точке с координатами  $\mathbf{r}_1$ , а второй электрон – в точке  $\mathbf{r}_2$ . Вторая возможная ситуация будет выражаться функцией  $\Psi_{21} = \Psi_{21}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, t)$  что означает: в момент времени  $t$  второй электрон находится в точке с координатами  $\mathbf{r}_1$ , а первый электрон – в точке  $\mathbf{r}_2$ . Если бы эти состояния можно было бы отличить одно от другого, то это различие проявилось бы в плотностях вероятности  $|\Psi_{12}|^2$  и  $|\Psi_{21}|^2$ . Но, согласно принципу эквивалентности, такого не может быть.

Поэтому мы обязаны написать:

$$|\Psi_{12}|^2 = |\Psi_{21}|^2.$$

Извлечение квадратного корня приводит к решению этого уравнения:

$$\Psi_{12} = \pm \Psi_{21}.$$

Какой знак выбрать? Оказывается, что **оба** знака имеют смысл! Более того, то «с каким именно знаком правильно извлекать корень» позволяет разбить **все** квантовые частицы на **два класса**. Частицы первого класса (для которых следует извлекать корень со знаком «+») называются **бозонами**, частицы второго класса (знак «-») **фермионами**.

Бозоны и фермионы имеют принципиально различные свойства. Допустим, что два фермиона находятся **в одном** и том же состоянии, описываемом волновой функцией  $\Psi$ , то есть  $\Psi_{12} = \Psi_{21} = \Psi$ . Тогда, в соответствии с определением фермионов, мы должны написать:  $\Psi = -\Psi$ ! Но такое уравнение имеет, очевидно,

только одно решение:  $\Psi = 0$ . Иными словами, такая ситуация для фермионов в принципе **невозможна**. Данное свойство фермионов называется **принципом Паули**: **два фермиона не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии**. Для бозонов принцип Паули, естественно, не работает (уравнение  $\Psi = \Psi$  – просто тождество и не накладывает на  $\Psi$  никаких ограничений), но и это не означает, что подсчет вероятностей для бозонов – «классический», принцип тождественности проявляет себя и для бозонов.

Чтобы лучше разобраться в сложном вопросе разделения всех частиц на бозоны и фермионы, рассмотрим простейшую задачу теории вероятностей: пусть опыт имеет два **равновероятных** исхода, какова вероятность определенной последовательности исходов для двух независимых опытов? Например, мы случайным образом раскладываем в коробочку с двумя отделениями «1» и «2» два шара (шары у нас изображают частицы, а отделения коробочки – состояния  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , в которых эти частицы находятся).

**Классическое решение.** Так как оба исхода равновероятны, то вероятность любого из них равна  $\frac{1}{2}$ . Так как опыты **независимые**, то эти вероятности **перемножаются**. Таким образом мы имеем для любого исхода вероятность  $\frac{1}{4}$ . Перечислим эти исходы (пусть номера шаров «1» и «2»):  $(1|2)$ ,  $(1|2)$ ,  $(2|1)$  и  $(|12)$ . Так как наши шары-частицы идентичны, то для нас  $(1|2)$  и  $(2|1)$  это один и тот же исход. Поэтому мы должны **сложить** вероятности **несовместных** исходов  $(1|2)$  и  $(2|1)$  и получить вероятность этого исхода  $\frac{1}{2}$ . Переход к «числам заполнения» сводится к «стиранию» номеров шаров, которые мы теперь будем изображать просто кружками « $\circ$ ». Итак наш опыт имеет три исхода: 1)  $(\circ\circ|)$  с вероятностью  $\frac{1}{4}$ , 2)  $(\circ|)$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$  и 3)  $(|)$  с вероятностью  $\frac{1}{4}$ . Самое главное в классическом подходе: хотя номера шаров нас не интересуют (нас интересует только количество шаров в каждом отделении коробочки), подсчет вероятности происходит так, **как будто бы** (если бы мы хотели) мы **могли занумеровать** шары.

**Бозоны.** Принцип тождественности исключает возможность «нумеровки» частиц. Это вынуждает нас трактовать равновероятность занятия частицами любого из состояний как **равновероятность всех трех исходов** двух опытов:  $(\circ\circ|)$ ,  $(\circ|)$  и  $(|)$ , то есть приписать всем исходам вероятность  $\frac{1}{3}$ . Результат отличается от классического!

**Фермионы.** Если вспомнить принцип Паули, то ответ получается немедленно: в силу **невозможности** исходов  $(\circ\circ|)$  и  $(|\circ\circ)$  с вероятностью единица осуществляется исход  $(\circ|\circ)$ .

Полученные нами результаты удобно резюмировать в единой табл. 47.1.

Таблица 47.1

Состояние	Вероятность		
	Классические частицы	Бозоны	Фермионы
$(\circ\circ )$	1/4	1/3	0
$(\circ \circ)$	1/2	1/3	1
$( \circ\circ)$	1/4	1/3	0

Из таблицы прямо следуют два важнейших вывода.

1. Для двух **бозонов** вероятность оказаться **в одном и том же** состоянии **выше** рассчитанной по классическим представлениям, а в **разных** состояниях – **ниже** (считать, что квантовые частички просто похожи на «очень маленькие шарики» не верно – нет, не похожи!). Более того, если данные рассуждения продолжить (это не слишком просто) для **большого** числа частиц, то указанная разница между классическими и квантовыми вероятностями будет драматически **возрастать** с увеличением числа частиц.

Эту особенность бозонов гениально угадал А. Эйнштейн, **постулировав** что вероятность для фотона перейти в данное состояние **пропорциональна** числу фотонов, **уже находящихся в данном состоянии**. Исходя из своего постулата Эйнштейн вывел уже известную ему формулу Планка для равновесного теплового излучения (фотоны оказались как раз бозонами).

В шутку бозоны часто называют «частицами-коллективистами». При низких температурах и значительном количестве бозонов может наблюдаться переход всех бозонов в одно и то же состояние. Данное явление (подчеркнем, что оно связано **не с взаимодействиями** частиц, а носит чисто вероятностный характер) называется **бозе-конденсацией**. Например, лазер испускает квази-монохроматическое излучение. Излучение с возбужденных уровней стимулируется **не взаимодействием**, а «теорией вероятностей». Испускание одного фотона увеличивает вероятность излучения следу-

ющего с такой же частотой и поляризацией; процесс приобретает лавинообразный характер; его так и называют – **«вынужденным излучением»**.

Другой пример. При очень низких температурах многие металлы теряют свое электрическое сопротивление, явление называется **сверхпроводимостью**. Дело в том, что заряд в сверхпроводниках переносят не электроны (фермионы), а особые квазичастицы – **куперовские пары**, которые являются **бозонами**. Куперовские пары испытывают бозе-конденсацию, то есть переходят в одно состояние – состояние тока. Для остановки такого тока необходимо когерентное воздействие на все куперовские пары одновременно, что имеет нулевую вероятность.

2. Для **фермионов** вероятность их нахождения в одном состоянии равна нулю. Можно сказать, что, в отличие от «коллективистов» бозонов, они являются «частицами-индивидуалистами». Именно «индивидуализм» фермионов объясняет, например, разнообразие свойств элементов в **таблице Менделеева**. Если бы электроны были бозонами, то все электроны любого химического элемента перешли на самый нижний энергетический уровень  $1s$ . При этом все элементы стали бы похожи на гелий, аргон и другие инертные газы. Этого не происходит именно благодаря принципу Паули. Например, каждой  $s$ -орбитали соответствуют только **две** волновые функции (они соответствуют **двум** возможным ориентациям вектора собственного момента импульса электрона – **спина**; отметим, что квантовая величина «спин» не имеет классического аналога).

**Физика твердого тела** без преувеличения является наиболее широкой областью применения квантовой механики. Достаточно подумать об обилии электронных устройств вокруг нас. Все они созданы на основе физики твердого тела. Физика твердого тела (физика кристаллов) давно развилась в отдельную прикладную науку. В данном пособии не может быть и речи о сколь угодно последовательном изложении даже элементарных основ этой науки, для этого нужна отдельная книжка. Поэтому ниже следующие примеры из физики твердого тела будут иметь характер **иллюстраций** применения тех идей квантовой статистики,

которые были изложены выше. Некоторые очень важные вещи будут даны безо всякого объяснения, их придется принимать на веру.

**Теплоемкость твердых тел.** Существует известный экспериментальный факт. При температурах выше так называемой **дебаевской температуры** (обычно она близка к комнатной температуре) молярная теплоемкость  $C$  (для твердых тел не принято различать  $C_p$  и  $C_v$ ) всех твердых тел **постоянна** и равна  $3R$  (**закон Дюлонга и Пти**), где  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Этот факт легко объяснить классически. Действительно, атомы кристаллической решетки можно представить себе как набор трехмерных гармонических осцилляторов. Как мы видели в разд. 43 «Тепловое излучение», средняя энергия осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы разна  $k_B T$  ( $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура). Для трехмерного осциллятора чисто степеней свободы равно 3, поэтому средняя энергия тепловых колебаний равна  $3k_B T$ . Тогда внутренняя энергия  $U$  моля (энергия  $N_A$  осцилляторов) равна  $N_A 3k_B T = 3RT$ . По определению теплоемкости

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT}(3RT) = 3R.$$

Таким образом, мы **вывели** закон Дюлонга и Пти из классических соображений.

Эксперимент, однако, **не подтверждает** этот закон для температур **ниже дебаевской**. С уменьшением температуры теплоемкость **падает** по закону  $C \sim T^3$ , и, при приближении к абсолютно-му нулю, стремится к нулю!

Разгадка этого парадокса стала возможной только после создания квантовой механики в конце первой половины XX в., и связана она с именем Дебая. Чтобы понять некоторые идеи теории Дебая мы используем аналогию между световыми и звуковыми волнами. Что общего между ними?

1. **Внутренняя энергия** фотонного газа (равновесного теплового излучения) есть совокупная энергия всех хаотических электромагнитных волн в полости. Внутреннюю энергию твердого

тела (энергия колебаний атомов) можно представить как энергию совокупности хаотических звуковых волн, распространяющихся в твердом теле.

2. **Закон дисперсии** электромагнитных волн в вакууме:  $\omega = ck$ , где  $k$  (не путать с постоянной Больцмана!), конечно, волновое число. Для звуковых волн закон  $\omega = ck$  выполняется в **широком диапазоне частот**.

Не использовать ли **аналогию** между звуком и светом для объяснения загадочного температурного поведения теплоемкости твердого тела? Удивительно, но усилиями Дебая, эта экстравагантная идея осуществилась! Это очень трудная задача, в данном пособии нет места вдаваться в детали. Но, вкратце, ход рассуждений мог бы быть следующим.

Прежде всего, укажем на принципиальные **различия** между звуком и светом.

1. Из здравого смысла просто невозможно представить себе звуковые волны с длиной волны меньше характерного расстояния между атомами (обозначим его  $a$ ) – таковых просто не существует. Значит, в твердом теле существует и **максимальная**  $\omega_{\max}$  **частота** звука; по порядку величины  $\omega_{\max} \sim 2\pi c/a$ , где  $c$  – скорость звука. (В дальнейшем мы будем писать не  $\omega_{\max}$ , а  $\omega_D$  – **дебаевская частота**). Для света никаких ограничений по частоте нет.

2. Никаких **частиц** («квантов звука»), аналогичных фотонам, в твердом теле **не наблюдается**. Тем не менее, как показал Дебай, такие «частицы» (говорят «квазичастицы») можно ввести **формальным** математическим преобразованием (посредством известного в теоретической механике математического приема – перехода к **нормальным координатам** и, затем, перехода к квантовому «языку»). В результате формальных преобразований совокупность звуковых волн, отвечающих тепловым колебаниям решетки, математически выглядит как газ невзаимодействующих частиц с энергией  $\hbar\omega$ , импульсом  $\hbar k$  ( $k$  – волновой вектор) и законом дисперсии  $\omega = ck$ . По аналогии с фотонами Дебай назвал эти «частицы» **фононами**. Как и фотоны, фононы относятся к классу **бозонов**.

3. Световые волны являются **поперечными**, их можно охарактеризовать **двумя** независимыми типами поляризации. Звуковые волны могут быть как **продольными**, так и **поперечными**,

поэтому они характеризуются **тремя** независимыми типами поляризации (добавляются продольные волны). Данное обстоятельство важно при конкретных расчетах, но не затрагивают качественных выводов, и в наших дальнейших рассуждениях эта деталь не будет играть существенной роли.

Для вывода выражения для теплоемкости нам понадобится выражение для **внутренней энергии** фоновго газа. Если идея аналогии между фотонами и фононами имеет право на жизнь, то нам можно воспользоваться готовым выражением для энергии теплового излучения. Согласно формуле (43.20) эта энергия  $u$  на единицу объема равна

$$u = \frac{4}{c} R^* = \frac{4}{c} \sigma T^4,$$

где  $c$  – скорость света,  $R^*$  – энергетическая светимость абсолютно черного тела,  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана. **Спектральная плотность энергии  $u_\omega$** , очевидно равна

$$u_\omega = \frac{4}{c} r_\omega^*,$$

где  $r_\omega^*$  – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела. График функции  $u_\omega$ , очевидно, полностью аналогичен хорошо знакомому нам графику  $r_\omega^*$  (см. рис. 43.1).

Итак, мы предположили, что для частот **ниже дебаевской** (с точностью до констант) выражение для спектральной плотности внутренней энергии фоновго газа совпадает с выражением для спектральной плотности внутренней энергии равновесного фотонного газа (обозначим ее той же буквой  $u_\omega$ ). Для частот **выше дебаевской** спектральная плотность внутренней энергии фоновго газа **равна нулю** (просто в силу невозможности существования звуковых волн с длиной волны меньшей межатомного расстояния). Теперь можно провести анализ температурного поведения теплоемкости твердого тела в пределах низкой и высокой температур. Для того, чтобы понять, какие температуры считать высокими, а какие низкими, введем **дебаевскую температуру**:  $k_B T_D = \hbar \omega_D$ . Расчеты по этой формуле для большинства твердых тел дают для  $T_D$  примерно комнатную температуру.

**Низкотемпературный предел ( $T \ll T_D$ ).** Из раздела 43 мы знаем, что **почти все** отличные от нуля значения функции  $r_\omega^*$  сосредоточены в области **низких частот**. В нашем случае фононного газа это будет означать, что почти все отличные от нуля значения функции  $u_\omega$  сосредоточены в области частот  $\omega < \omega_D$ . Полная внутренняя энергия получается интегрированием по частотам  $\omega < \omega_D$ :

$$u = \int_0^{\omega_D} u_\omega d\omega \approx \int_0^\infty u_\omega d\omega \sim \int_0^\infty r_\omega^* d\omega \sim R^* = \sigma T^4.$$

В последнем равенстве мы, очевидно, использовали закон Стефана-Больцмана (43.15). Таким образом, при  $\omega \ll \omega_D$  внутренняя энергия твердого тела должна быть пропорциональна **четвертой степени температуры**. Отсюда по определению молярной теплоемкости и учитывая, что внутренняя энергия моля  $U$  пропорциональна энергии единицы объема  $u$ , имеем:

$$C = \frac{dU}{dT} \sim \frac{du}{dT} \sim \frac{d}{dT}(T^4) \sim T^3.$$

С точностью до коэффициента пропорциональности мы вывели **закон Дебая!** Ну, а как же с «классическим» законом Дюлонга и Пти? Ведь хорошая теория должна объяснить и его.

**Высокотемпературный предел ( $T \gg T_D$ ).** Опять вспомним тепловое излучение. При высоких температурах максимум кривой  $r_\omega^*$  сдвигается в область высоких частот (закон смещения Вина), в нашем случае максимум сдвигается выше дебаевской частоты. Как мы знаем, в области низких частот формула Планка (43.10) переходит в формулу Рэлея–Джинса (43.6)

$$r_\omega^* \approx \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} k_B T.$$

Аналогично случаю низких температур

$$u = \int_0^{\omega_D} u_\omega d\omega \sim \int_0^{\omega_D} r_\omega^* d\omega = T \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} k_B d\omega = \text{const} \cdot T.$$

Отсюда по определению молярной теплоемкости, учитывая опять, что внутренняя энергия моля  $U$  пропорциональна энергии единицы объема  $u$ , имеем:

$$C = \frac{dU}{dT} \sim \frac{du}{dT} \sim \text{const} \frac{d}{dT}(T) = \text{const}.$$

Более подробные и последовательные вычисления дают для const значение  $3R$ , то есть как раз закон Дюлонга и Пти! Переход (в окрестности дебаевской температуры) от закона Дебая  $C \sim T^4$  к закону Дюлонга и Пти  $C=3R$  происходит плавно и без изломов.

Мы пришли к выводу, что теплоемкость твердых тел хорошо объясняется через формальное сведение энергии тепловых колебаний кристаллической решетки к энергии газа **бозонов**. Другой пример из физики твердого тела будет касаться уже газа **фермионов**, или, как говорят физики, **электронного ферми-газа**.

**Электронная теплоемкость металлов.** Говоря о теплоемкости твердых тел, мы должны разрешить еще один парадокс. Все атомы состоят не только из ядер, но и из электронов. При отличной от нуля температуре последние, наряду с ядрами, должны участвовать в тепловом движении со средней энергией  $\sim(3/2)k_B T$  на один электрон. Это увеличит внутреннюю энергию (а значит, и теплоемкость) кристалла в несколько раз. Но ничего подобного **не наблюдается**, молярная теплоемкость **всех** твердых тел не превышает  $3R$ ! Даже если предположить, что в изоляторах из-за **локализации** на атомах электроны не могут участвовать в хаотическом тепловом движении, то как быть с металлами, в которых электроны проводимости **коллективизированы**? Разгадать эту загадку позволяет учет того факта, что, в отличие от фононов, электроны являются **фермионами**.

Вспомним принцип Паули. Электроны заполняют все уровни энергии, начиная с самого нижнего. Самый верхний уровень энергии, заполненный при  $T \rightarrow 0$  называется **энергией Ферми** (или **уровнем Ферми**) и обозначается  $E_F$ .

Рассмотрим **электроны проводимости** металла, они занимают часть уровней энергии, находящейся, внутри интервала энергии, называемым **зоной проводимости** (уровни энергии внутри зоны проводимости расположены настолько тесно, что спектр энергий свободных электронов можно считать почти непрерывным). Если отсчитывать энергию Ферми от **нижней границы** («дна») зоны проводимости, то типичная для металлов величина  $E_F \sim 1$  эВ. Легко прикинуть непосредственно, что энергия 1 эВ  $\approx k_B \cdot 11000$  К. Это очень высокая температура! При гораздо более низких температурах металлы существуют только в газооб-

разном состоянии. Таким образом, во всех практически значимых случаях мы имеем **приближение**  $k_B T \ll E_F$ .

Для того, чтобы участвовать в тепловом движении при  $T > 0$  электрону проводимости необходимо увеличить свою энергию на величину  $\sim k_B T$  и перейти в новое **незанятое** состояние с энергией **больше**  $E_F$  (все состояния с энергией меньше  $E_F$  заняты; переход на них **запрещен** принципом Паули). Но таких электронов **очень мало**, всего доли процента от общего числа электронов проводимости; все они занимают тонкую полосу энергий толщиной  $\sim k_B T$  прямо **под** уровнем Ферми. Поэтому вклад электронов проводимости в теплоемкость твердого тела **пренебрежимо мал**.

На основании сказанного попробуем определить **вид** температурной зависимости электронной теплоемкости. Во-первых, **количество** электронов, участвующих в тепловом движении должно быть пропорционально  $k_B T$ . Во-вторых, каждый такой электрон сам имеет среднюю **энергию** теплового движения  $\sim (3/2)k_B T$ . **Перемножение** этих двух факторов дает для внутренней энергии электронного газа величину  $U_e \sim T^2$ . Отсюда обычным способом получаем для электронной теплоемкости:

$$C_e = \frac{dU_e}{dT} \sim \frac{d}{dT}(T^2) \sim T.$$

Таким образом, электронная теплоемкость металла **линейно** зависит от температуры, обращаясь в ноль, как и фононная, при абсолютном нуле. Вклад электронной теплоемкости в общую теплоемкость настолько мал, что его можно экспериментально наблюдать только вблизи абсолютного нуля температур, где фононная теплоемкость спадает по более «сильному» закону  $\sim T^3$  и становится ниже электронной.

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте принцип тождественности квантовых частиц.
2. Чем отличаются друг от друга волновые функции бозонов и фермионов?
3. Объясните, чем квантовый способ подсчета вероятностей отличается от классического.

4. С чем связано явление бозе-конденсации?
5. Сформулируйте принцип Паули.
6. В чем сходство и в чем различие между фотонами и фотонами?
7. Сформулируйте закон Дебая и закон Дюлонга и Пти.
8. Почему электроны не дают существенного вклада в теплоемкость твердого тела?
9. Какой вид имеет температурная зависимость электронной теплоемкости металла?

## 48. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

**Состав ядра.** Ядро состоит из двух видов ядерных частиц – **нуклонов**: **протонов** ( $p$ ) и **нейтронов** ( $n$ ). Протоны обладают элементарным электрическим зарядом  $+e$ , нейтроны заряда не имеют. Протоны и нейтроны очень близки по массе (ее принято выражать в энергетических единицах  $mc^2$ ):  $m_n=938$  МэВ,  $m_p=940$  МэВ, что позволяет говорить о них как о разных состояниях **одной и той же частицы**, отличающихся проекциями так называемого **изотопического спина**. Масса нуклона примерно в 2000 раз больше массы  $m_e$  **электрона**, которая составляет примерно 500 МэВ. И протоны, и нейтроны являются **фермионами**. Количество нуклонов в ядре называют **массовым числом**  $A$  (это число также называют **барионным зарядом**). **Заряд ядра** характеризуют количеством протонов  $Z$  (или, что то же самое – номером в таблице Менделеева). Поэтому количество нейтронов  $N= A-Z$ . Химический элемент  $X$  с известными  $Z$  и  $A$  будем обозначать  ${}^A_ZX$ . Ядра с одинаковым  $Z$  и равными  $A$  называют **изотопами**. Пример: изотопы водорода.  ${}^1_1\text{H}$  – водород,  ${}^2_1\text{H} \equiv {}^2_1\text{D}$  – **дейтерий**,  ${}^3_1\text{H} \equiv {}^3_1\text{T}$  – **тритий**. Ядра с одинаковыми  $A$  называются **изобарами**. Ядра с одинаковыми  $N$  – **изотонами**.

**Размер ядра**  $r$  по порядку величины  $\sim 10^{-15}$  м = 1 фм («фм» читается «фемтометр»). Стоит сравнить с ангстремом  $\text{\AA}$  (характерным размером атома)  $1\text{\AA}=10^{-10}$  м. Радиус ядра в 100 тысяч (!) раз меньше радиуса атома.

**Дефект массы.** Масса ядра  $M_{\text{я}}$  всегда **меньше** суммарной массы составляющих его нуклонов:

$$Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}} \equiv \Delta m > 0.$$

Эта разница в массах  $\Delta m$  и называется **дефектом массы**. Дефект массы связан с ядерными взаимодействиями (их называют **сильными взаимодействиями**). Согласно специальной теории относительности, масса и энергия связаны соотношением  $E=mc^2$ . Ядерные силы суть силы **притяжения** между нуклонами, поэтому при объединении нуклонов в ядро общая энергия (а значит и суммарная масса) **понижается**.

Работа внешних сил, необходимая для разделения ядра на составляющие его нуклоны называется **энергией связи**  $E_{\text{св}}$ . По своей величине она равна дефекту массы, выраженному в энергетических единицах:  $E_{\text{св}} = \Delta mc^2$ . Удельная (расчете на один нуклон) энергия связи  $E_{\text{св}}/A$  в зависимости от массового числа показана на рис. 48.1.

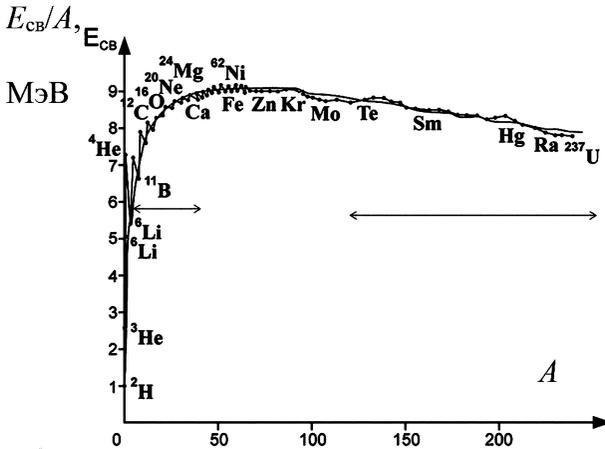


Рис. 48.1

Из графика видно, что при возрастании числа нуклонов удельная энергия связи резко возрастает: все большее число нуклонов связывается между собой. Затем кривая выходит на **насыщение**: ядерные силы существенно **короткодействующие**, поэтому каждый нуклон может быть связан с ограниченным числом нуклонов. Определенную загадку составляет то, что после железа энергия связи начинает медленно спадать. Но если принять во

внимание, что силы **кулоновского** взаимодействия между протонами суть силы **отталкивания**, то ясно, что они **уменьшают** энергию связи. При этом, кулоновские силы, в отличие от ядерных, являются **дальнодействующими** (не имеют свойства насыщения), и электростатическая энергия постоянно возрастает ростом  $Z$  и имеет **отрицательный** знак. С этим и связано уменьшение энергии связи после «железного» максимума. Данное поведение энергии связи объясняет «парадокс»: при взрыве «водородной» бомбы (объединении более легких ядер в более тяжелые) выделяется положительная энергия, а при взрыве «атомной» (разделении тяжелого ядра на более легкие) ... тоже положительная! На первый взгляд это очень странно. Но, заметим, что в первом случае выделяется энергия ядерных сил, а во втором – электростатических (хоть бомба и называется «атомной»). В природе ядерных сил до сих пор много непонятного. Например, пики на кривой энергии связи связанные с определенными числами  $A$  и  $Z$  (эти числа в ядерной физике называются «**магическими**»). Самый резкий из них наблюдается при  $A=4$  и  $Z=2$ . Этот пик соответствует ядру  ${}^4_2\text{He}$ , или, как его еще называют, **альфа-частице**. Отметим, что альфа-частицы являются **бозонами**.

**Природа ядерных сил.** Взаимодействие между нуклонами осуществляется посредством **обмена** виртуальными  **$\pi$ -мезонами** (существуют три вида  $\pi$ -мезонов – с зарядом  $+e$ ,  $-e$  и  $0$  –  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$  соответственно). Схему взаимодействия между нуклонами удобно представлять специальными рисунками – **фeyнмановскими диаграммами** (рис. 48.2).

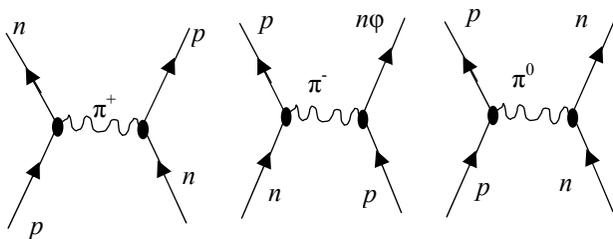


Рис. 48.2

Как понимать эти диаграммы? Возьмем, например, первую диаграмму («читаем» справа налево и снизу вверх): «протон (в левой жирной точке) испускает  $\pi^+$ -мезон, превращаясь в нейтрон;  $\pi^+$ -мезон (в правой жирной точке) поглощается нейтроном; последний при этом превращается в протон». Согласно теории, именно такой обмен  $\pi$ -мезонами и приводит к сильному взаимодействию (притяжению) между нуклонами.

**Виртуальные частицы.** Когда мы изучали тему «фотоэффект», мы видели, что испускание/поглощение даже «безмассовой» частицы – фотона – электроном, вообще говоря, запрещено законом сохранения энергии. Каким же образом нуклонам удается рожать и поглощать  $\pi$ -мезоны? Дело в том, что принцип неопределенности в переменных энергия-время ( $\Delta E \Delta t < \hbar$ ) говорит нам, что если время наблюдения  $\Delta t$  некоторого процесса **конечно**, то энергия в этом процессе имеет **неопределенность**  $\Delta E \sim \hbar/\Delta t$ . Именно эта неопределенность энергии позволяет на короткое время нарушать закон сохранения энергии в пределах  $\Delta E$ . Частицы, которые «существуют» за счет неопределенности энергии в быстрых процессах называются **виртуальными**. В отличие от реальных частиц (реальные  $\pi$ -мезоны тоже существуют) виртуальные частицы не могут быть зарегистрированы никакими приборами, они «существуют» как бы «на грани бытия и небытия», будучи введенными в теорию, чтобы сделать хоть сколько-нибудь наглядными процессы, происходящие в микромире.

**Оценка массы  $\pi$ -мезонов.** Попробуем на основании принципа неопределенности оценить массу  $m_\pi$   $\pi$ -мезона. В качестве  $\Delta t$  возьмем самое простое – характерный ядерный размер  $r \sim 10^{-15}$  м, деленный на скорость порядка скорости света  $3 \cdot 10^8$  м/с. Отсюда (не забываем, что  $\hbar = h/2\pi$ ):

$$m_\pi c^2 \sim \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar}{\left(\frac{r}{c}\right)} = \frac{\hbar c}{r} = \frac{hc}{2\pi r} = \frac{h}{m_e c} \cdot m_e c \cdot c \cdot \frac{1}{2\pi r} =$$

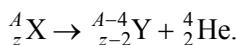
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda_K}{r} \cdot m_e c^2 \approx \frac{2 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-15}} \approx 300 \cdot m_e c^2.$$

Для удобства прикидки в уме мы использовали известную нам комптоновскую длину волны электрона  $\lambda_K = h/m_e c \approx 2 \cdot 10^{-12}$  м.

Итак, по нашей (очень грубой) оценке масса  $\pi$ -мезона составляет примерно 300 электронных масс (этот расчет подтвержден экспериментом). Название «мезон» означает «промежуточный»: масса  $\pi$ -мезона является промежуточной между массой электрона и массой нуклона ( $\approx 2000 m_e$ ).

**Радиоактивность.** Радиоактивностью называют самопроизвольное испускание ядрами радиоактивных изотопов элементарных частиц или ядер. К радиоактивности относят обычно:  **$\alpha$ -распад**,  **$\beta$ -распад**, **протонную радиоактивность**, **спонтанное деление** тяжелых ядер. Рассмотрим в качестве важных примеров первые два вида радиоактивности.

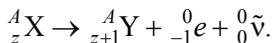
**Альфа-распад** заключается в испускании радиоактивным ядром  $\alpha$ -частиц высоких (порядка нескольких МэВ) энергий, которые посредством **туннельного эффекта** (см. разд. 46) преодолевают потенциальный барьер, созданный сильными взаимодействиями. Из-за электрического заряда  $\alpha$ -частицы испытывают интенсивное взаимодействие с любым веществом, быстро теряя свою энергию (задерживаются обычным листом бумаги) и, захватывая два электрона, превращаются в обычные атомы гелия. Уравнение  $\alpha$ -распада ядра X (с превращением его в ядро Y) записывают следующим образом:



Как правильно записывать подобные уравнения? Это очень просто: нужно, чтобы суммы по верхним и по нижним индексам в правой и левой частях уравнения совпадали. Сохранение по нижним индексам – это, очевидно, **закон сохранения заряда**. Сохранение по верхним индексам (массовым числам) физики связывают с так называемым **законом сохранения барионного заряда** (классических аналогов не имеет). Итак, мы видим, что при  $\alpha$ -распаде образуется новый элемент Y, смещенный на две клетки таблицы Менделеева влево по отношению к первоначальному элементу X.

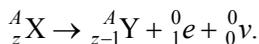
**Бета-распад** состоит в испускании ядром **электронов** или **позитронов** ( $\beta$ -частиц). Проникающая способность « $\beta$ -лучей» выше, чем для  $\alpha$ -частиц. Для полного поглощения  $\beta$ -излучения

требуется, например, алюминиевая пластинка толщиной в несколько сантиметров. Уравнение  $\beta$ -распада для случая испускания **электронов** выглядит так:



Поясним некоторые особенности данного уравнения. Электрону приписывается массовое число  $A=0$  не потому, что он не имеет массы, а потому что, в отличие от нуклонов (они относятся к классу **барионов**), от является частицей другого класса – **лептонов**. Вместо фразы «электрон не является нуклоном» физики говорят: «электрон имеет нулевой **барионный заряд**». Лептонный заряд тоже **сохраняется**. Именно поэтому в правой части уравнения появляется третье слагаемое –  ${}^0_0\tilde{\nu}$  – **электронное антинейтрино** (знак « $\sim$ » над  $\nu$  означает античастицу). Электронное антинейтрино, как и электрон, является лептоном, но приставка «**анти**» означает, что ее лептонный заряд равен по величине и противоположен по знаку лептонному заряду электрона. Таким образом, электронное антинейтрино как бы отрицает «лептонную сущность» электрона, возвращая в уравнение баланс по лептонному заряду.

Электрон (как и вообще почти все частицы) тоже имеет свою античастицу – **позитрон** (его обозначают  ${}^0_1e$ , без знака « $\sim$ »), позитрон имеет ту же массу, что и электрон, но заряд  $+e$ ). Поэтому возможен и **позитронный  $\beta$ -распад**, уравнение которого, очевидно,



Итак, мы видим, что при **электронном  $\beta$ -распаде** возникает элемент  $Y$ , смещенный **вправо** на одну клетку таблицы Менделеева относительно исходного  $X$ , а при **позитронном**, наоборот, на одну клетку **влево**.  $\beta$ -распад связан с особым типом взаимодействий в ядре – **слабыми взаимодействиями**.

**Гамма-излучение.** И  $\alpha$ -, и  $\beta$ -распад сопровождаются излучением  $\gamma$ -квантов – **фотонов** очень высоких энергий (порядка нескольких МэВ). Понять природу этого излучения можно на основании универсальной закономерности квантовой механики: если движение частиц **финитно** (ограничено в пространстве), то

«разрешенные» значения энергии частиц имеют **дискретный спектр** (достаточно вспомнить уже известные нам потенциальную яму, гармонический осциллятор или атом водорода). Расстояние между уровнями энергии тем **больше**, чем в **меньших** объемах заключены частицы. Поэтому уровни энергии нуклонов в атомном ядре так же **дискретны**, как и в атоме, но расстояния между ними, как показывают расчеты, в миллион раз **больше**, чем в атоме. Так же, как и для атомов, для ядер существует **основное состояние** (с наименьшей энергией) и много **возбужденных**. Переход из возбужденных состояний в основное сопровождается  $\gamma$ -излучением. То, что в процессах как  $\alpha$ -, так и  $\beta$ -распада наблюдается  $\gamma$ -излучение доказывает, что в этих процессах ядро проходит через возбужденные состояния. На очень высоких частотах все вещества почти **прозрачны**. Поэтому,  $\gamma$ -излучение имеет огромную проникающую способность (даже толстые свинцовые стены не являются достаточно надежной защитой от него).

**Закон радиоактивного распада.** Радиоактивный распад является существенно **вероятностным** процессом: **невозможно** предугадать **момент** распада конкретного ядра, можно лишь говорить о **вероятности** распада (а с помощью вероятности предсказать в очень большом количестве радиоактивных ядер **среднюю долю** распавшихся). О вероятности  $dp$  распада конкретного ядра в момент времени от  $t$  до  $t+dt$  можно сказать лишь, что она **не зависит от  $t$**  и пропорциональна **интервалу  $dt$** ; коэффициент пропорциональности, обозначим его  $\lambda$ , называют **постоянной распада** ядра. Пусть мы имеем  $N$  **нераспавшихся** ядер, тогда среднее количество  $dN$  ядер ( $dN < 0$  так как при распаде  $N$  уменьшается), распавшихся за время  $dt$ , равно  $-Ndp = -N\lambda dt$ . Итак,

$$dN = -N\lambda dt;$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt;$$

$$\ln N = -\lambda t + \text{const.}$$

Обозначая через  $N_0$  количество **нераспавшихся** ядер при  $t = 0$ , имеем окончательно:

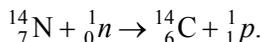
$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Это и есть искомый **закон радиоактивного распада**. Как мы видим, количество нераспавшихся ядер уменьшается **экспоненциально**. Очень часто этот закон записывают в эквивалентном виде:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 \left( 2^{\log_2 e} \right)^{-\lambda t} = N_0 \left( 2^{\frac{1}{\ln 2}} \right)^{-\lambda t} = N_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\lambda}{\ln 2} t} \equiv N_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}},$$

где  $T = \lambda / \ln 2$  – **период полураспада**. За время  $T$  количество нераспавшихся ядер уменьшается вдвое. Величина  $T$  для известных изотопов варьируется необычайно широко: от  $10^{-7}$  сек до  $10^{15}$  лет.

**Радиоуглеродный анализ.** В качестве примера применения закона радиоактивного распада рассмотрим радиоуглеродный анализ, часто применяемый в археологии. 90% **космических лучей**, падающих на Землю суть протоны высоких энергий. Взаимодействуя с ядрами атмосферных газов, они выбивают из них нейтроны или новые протоны, которые вступают в новые реакции. Одна из распространенных реакций такая:



Получающийся изотоп  ${}^{14}_6\text{C}$   $\beta$ -радиоактивен с  $T \approx 5730$  лет. Процесс распада происходит так:

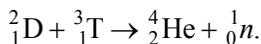


Если предположить, что интенсивность и состав космического излучения мало меняется за тысячелетия (характерные времена процессов во Вселенной – миллиарды лет), то количество углерода-14 на Земле практически **постоянно**. Во время **роста** животного или растительного организма углерод-14 входит в состав его клеток в одной и той же пропорции. После смерти организма количество углерода-14 падает по закону радиоактивного распада. Определяя процент углерода-14 от общего числа углерода в клетках, можно определить примерный **возраст** археологического артефакта. Радиоуглеродный анализ считается одним из самых надежных в археологии.

**Цепная реакция деления.** Данный процесс имеет огромное значение, так как лежит в основе атомных электростанций и атомных бомб. Суть процесса в следующем: при попадании

нейтрона в любое из трех ядер  $^{235}_{92}\text{U}$ ,  $^{233}_{92}\text{U}$ ,  $^{239}_{94}\text{Pu}$  – ядро делится примерно пополам, испуская при этом 2–3 новых нейтрона, которые вызывают деление новых ядер с образованием новых нейтронов. Таким образом, процесс деления развивается лавинообразно, в геометрической прогрессии. При делении каждого ядра выделяется огромная энергия – примерно 200 МэВ (типичное выделение энергии в химических реакциях составляет примерно один эВ на атом). Так деление 1 кг урана-235 эквивалентно сжиганию 1 900 000 т сырой нефти или взрыву 20 мегатонн тротила. Вспомним (см. выше), что выделяемая энергия – это энергия **электростатического** отталкивания осколков деления. Для инициации цепной реакции деления необходимо, чтобы количество нейтронов приводящих к делению новых ядер урана-235 (или плутония-239) увеличивалось со временем. Если образец достаточно мал, то большинство нейтронов покидает его, не успевая вызвать деления, и цепная реакция затухает. Существует **критическая масса** ядерного вещества при достижении которой реакция возникает сама собой. Соединение (при помощи обычного взрыва) нескольких образцов докритической массы в один с массой превосходящей критическую лежит в основе атомной бомбы. Цепная реакция деления используется и в мирных целях – на **атомных электростанциях** (АЭС). Чтобы реакция не носила взрывной характер, а ее течение могло регулироваться в АЭС используют **медленные нейтроны** (вероятность деления для них выше, чем для быстрых) и **поглотители** нейтронов. В качестве **замедлителя** нейтронов используют **тяжелую воду**  $\text{D}_2\text{O}$  или графит. Для регулирования течения реакции в область реактора вводят стержни из кадмия или бора, которые хорошо поглощают нейтроны. На Земле изотопы урана-235 составляют всего 1/140 часть от общего количества урана (основной изотоп – уран-238). Выделение урана-235 из урановой руды очень дорогостоящая задача. Поэтому в АЭС и ядерном оружии используется также  $^{239}_{94}\text{Pu}$ . Этот изотоп вырабатывается в реакторах на быстрых нейтронах (при облучении «обычно-го» урана-238 быстрыми нейтронами) и может быть выделен из  $^{238}_{92}\text{U}$  химическим путем, что несколько дешевле.

**Термоядерный синтез.** При соединении легких ядер в более тяжелое выделяется огромная энергия. Термоядерный синтез – источник энергии Солнца и других звезд (так называемый многоступенчатый **протон-протонный цикл**). Наиболее простая реакция – это синтез гелия-4 при реакции дейтерия и трития:



Выделяемая энергия составляет 13,6 МэВ, и это в чистом виде «ядерная» энергия (энергия сильных взаимодействий). Так как сильные взаимодействия являются короткодействующими, реагирующие ядра должны сблизиться до расстояния порядка фм, то есть обладать кинетической энергией достаточной для преодоления огромного кулоновского отталкивания. Для того, чтобы такое стало возможным, продукты реакции должны иметь температуру порядка **сотен миллионов градусов**. В звездах вещество (**плазма**) удерживается от разлета гравитационным полем. Чтобы удержать плазму на Земле используется **неоднородное** магнитное поле, выталкивающее заряженные частицы в направлении противоположном градиенту модуля магнитной индукции (соответствующее устройство было изобретено в 1950 г. в СССР и называется **ТОКАМАКом** – Тороидальной Камерой с Магнитной Катущкой). Несмотря на то, что **термоядерная энергетика** могла бы удовлетворить все потребности человечества в энергии, из-за огромных технических трудностей работы по ее созданию находятся на стадии научно-исследовательских вот уже свыше 70 лет.

**Элементарные частицы.** Частицы называют **элементарными**, если нет никаких экспериментальных оснований считать их состоящими из каких-то других (еще более «элементарных»). Это и есть самые что ни на есть «кирпичики Мироздания» - то, из чего состоит Вселенная. Получить представление об элементарных частицах можно из табл. 48.1

Сделаем некоторые комментарии к таблице. Перечисленные частицы следует дополнить их двойниками – **античастицами**: частицами, обладающими той же массой и тем же спином, но отличающимися знаками всех других характеристик взаимодействия, таких как электрический и цветовой заряды, барионное и лептонное квантовые числа. Для некоторых бозонов (например,  $\gamma$ ,

$Z_0, \chi$ ) частица совпадает с античастицей. Число **лептонов** равно числу кварков, и такая ситуация называется **кварк-лептонной симметрией**. Лептоны не участвуют в сильном взаимодействии. Наконец, **гравитон**, квант гравитационного взаимодействия, предсказан теоретически, но до сих пор экспериментально не обнаружен.

Таблица 48.1

Фермионы		Бозоны – переносчики взаимодействий
Лептоны	Кварки (заряд в единицах $e$ )	
$\nu_e$ – электронное нейтрино	$u$ – англ. up, $(+\frac{2}{3})$	$\gamma$ – фотон, электромагнитное $g$ – (англ. glue) глюон, сильное $Z_0, W$ промежуточные бозоны, слабое $G$ – гравитон, гравитационное $\chi$ – бозон Хиггса
$e$ – электрон	$d$ – down, $(-\frac{1}{3})$	
$\nu_\mu$ – мюонное нейтрино	$c$ – charm, $(+\frac{2}{3})$	
$\mu$ – мюон	$s$ – strange, $(-\frac{1}{3})$	
$\nu_\tau$ – таонное нейтрино	$t$ – top, $(+\frac{2}{3})$	
$\tau$ – таон	$b$ – bottom, $(-\frac{1}{3})$	

**Кварки** в силу особенностей притяжения между ними (оно возрастает с увеличением расстояния) не наблюдаются экспериментально как отдельные частицы. В эксперименте они «видны» только как составляющие более сложных частиц – адронов. Кварки имеют дробный электрический заряд (в единицах элементарного заряда  $e$ ):  $+2/3$  и  $-1/3$ .

**Адроны** – частицы, состоящие из кварков и участвующие в сильных взаимодействиях. Адроны, состоящие из пары кварк-антикварк называются **мезонами**. Например, уже известные нам  $\pi$ -мезоны:  $\pi^+ = u\bar{d}$ ,  $\pi^- = \bar{u}d$ ,  $\pi^0$  – смесь  $u\bar{u}$  и  $d\bar{d}$ . Частицы, состоящие из трех кварков ( $q_1q_2q_3$ ) называются **барионами**. Это самый многочисленный класс частиц (гипероны, барионные резонансы и другие). Например, **нуклоны** являются адронами:  $n=udd$ ,  $p=uud$ .

Все фундаментальные взаимодействия (сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное) осуществляются путем **обмена** соответствующими **виртуальными бозонами**. Последний бозон в третьем столбце таблицы, бозон Хиггса, является квантом особого поля, придающего инертную массу бозонам, ею обладающим.

## Контрольные вопросы и задания

1. Из каких частиц состоит ядро? Каковы его размеры?
2. Что такое дефект массы и энергия связи? Как зависит удельная энергия связи от массового числа?
3. Объясните уменьшение удельной энергии связи с ростом массового числа для тяжёлых ядер?
4. Как происходит обмен виртуальными пи-мезонами?
5. Перечислите и охарактеризуйте виды радиоактивности.
6. Сформулируйте закон радиоактивного распада.
7. Что такое цепная реакция деления?
8. При каких условиях происходит термоядерный синтез?
9. Охарактеризуйте основные виды элементарных частиц.
10. Что такое мезоны и барионы?