Глава 16

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ СУПЕРПОЗИЦИИ. РАСЧЕТ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ЗАРЯД В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

16.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

16.1.1. *Закон Кулона*: сила электростатического взаимодействия двух точечных электрических зарядов (двух электрически заряженных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними), находящихся в вакууме, прямо пропорциональна произведению $Q_1 Q_2$ этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между зарядами и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r} \quad \text{и} \quad \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r},$$

где $\vec{F}_{12}$ $(\vec{F}_{21})$ — сила, действующая на заряд Q_1 (Q_2) со стороны заряда Q_2 (Q_1); $\vec{r}_{12}$ $(\vec{r}_{21})$ — радиус-вектор, соединяющий заряд Q_2 (Q_1) с зарядом Q_1 (Q_2); $r = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{21}|$; $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$.

16.1.2. ***Напряженность электрического поля*** — векторная величина $\vec{E}$, являющаяся его силовой характеристикой. Она равна отношению силы $\vec{F}$, действующей со стороны электрического поля на точечный пробный заряд (не искажающий исследуемое поле), помещенный в рассматриваемую точку поля, к величине Q этого заряда

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}.$$

Напряженность электростатического поля точечного заряда Q в вакууме

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, в которой вычисляется напряженность поля.

16.1.3. Сила, действующая со стороны электрического поля на помещенный в него заряд

$$\vec{F} = Q\vec{E},$$

если заряд точечный;

$$\vec{F} = \int\limits_{\substack{\text{по заряж.}\\ \text{телу}}} \mathrm{d}\vec{F} = \int\limits_{\substack{\text{по заряж.}\\ \text{телу}}} \vec{E}\,\mathrm{d}Q,$$

если заряд неточечный (здесь $\mathrm{d}\vec{F}$ — сила, действующая на малый заряд $\mathrm{d}Q$, который можно считать точечным).

16.1.4. Непрерывное распределение заряда вдоль линии, по поверхности и по объему характеризуется плотностью зарядов:

линейной $\tau = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}$;

поверхностной $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$;

объемной $\rho = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$,

где $\mathrm{d}Q$ — заряд малого элемента линии длиной $\mathrm{d}l$ или элемента поверхности площадью $\mathrm{d}S$, или элемента объема $\mathrm{d}V$.

При равномерном распределении заряда

$$\tau = \frac{Q}{l}, \quad \sigma = \frac{Q}{S}, \quad \rho = \frac{Q}{V}.$$

16.1.5. ***Потенциалом электростатического поля*** называется физическая величина φ, равная отношению потенциальной энергии $W_\text{п}$ пробного точечного электрического заряда, помещенного в рассматриваемую точку поля, к величине Q этого заряда

$$\varphi = \frac{W_\text{п}}{Q}.$$

Потенциальная энергия заряда Q в поле, созданном системой точечных зарядов Q_1, Q_2, … Q_n в вакууме

$$W_\text{п} = Q\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \quad (\text{при } W_\text{п}(\infty) = 0).$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении точечного заряда Q из точки 1 поля, имеющей потенциал φ_1, в точку 2, потенциал которой φ_2, равна

$$A_{1-2} = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Потенциал электростатического поля в какой-либо точке 1 поля численно равен работе, совершаемой силами поля при перемещении пробного точечного заряда Q из этой точки поля в ту точку 2, где потенциал поля принят равным нулю

$$\varphi_1 = \frac{A_{1-2}}{Q},$$

где A_{1-2} — работа сил поля при перемещении заряда Q из точки 1 в точку 2; $\varphi_2 = 0$.

Потенциал электростатического поля точечного заряда Q в вакууме

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (\text{при } \varphi(\infty) = 0).$$

16.1.6. ***Принцип суперпозиции электрических полей*:**

созданных системой из n дискретных зарядов

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i;$$

созданных непрерывно распределенными зарядами

$$\vec{E} = \int_{(Q)} \mathrm{d}\vec{E}, \quad \varphi = \int_{(Q)} \mathrm{d}\varphi,$$

где $\mathrm{d}\vec{E}$ и $\mathrm{d}\varphi$ — напряженность и потенциал электростатического поля, создаваемого в вакууме малым зарядом $\mathrm{d}Q$. Интегрирование проводится по всем непрерывно распределенным зарядам.

16.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Два одинаковых точечных заряда $Q_1 = Q_2 = 1 \cdot 10^{-11}$ Кл расположены на расстоянии $l = 4$ см один от другого. Найдите напряженность и потенциал поля в точке М, расположенной на перпендикуляре к линии, соединяющей заряды, восстановленном из точки, где находится заряд Q_2. Расстояние от заряда Q_2 до точки М $h = 3$ см

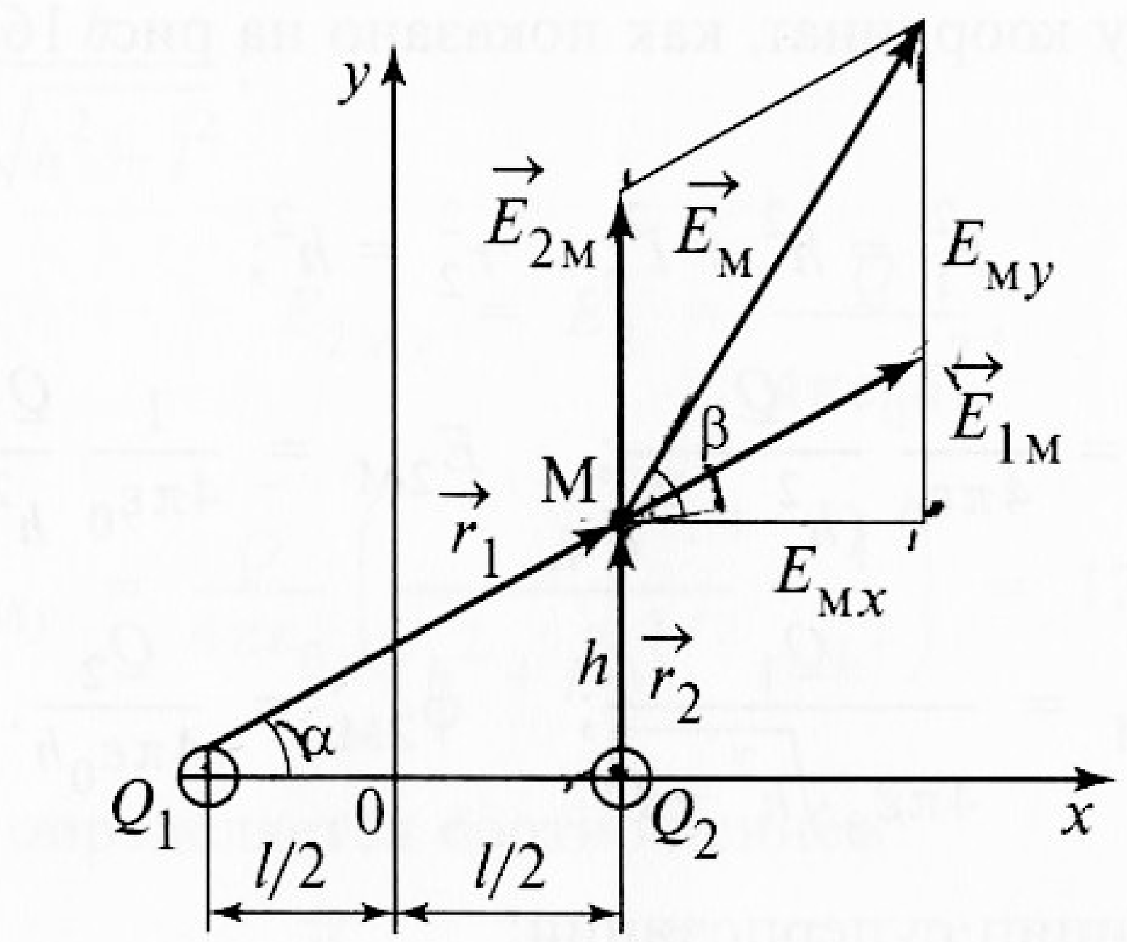

Рис. 16.1

(рис. 16.1). Постройте графики зависимостей напряженности и потенциала от координаты для точек, лежащих на линии, соединяющей заряды.

Решение. Необходимо найти характеристики поля, созданного отдельными точечными зарядами, величина и расположение которых заданы. Зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$ для каждого из зарядов известны. Для решения используем принцип суперпозиции.

Напряженность и потенциал поля каждого заряда в точке М:

$$\vec{E}_{1М} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_1^2}\frac{\vec{r}_1}{r_1};$$

$$\vec{E}_{2М} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_2^2}\frac{\vec{r}_2}{r_1};$$

$$\varphi_{1М} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1};$$

$$\varphi_{2М} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \quad (\text{при } \varphi(\infty) = 0),$$

где $\vec{r}_1$ — радиус-вектор, проведенный от Q_1 до точки М, $\vec{r}_2$ — радиус-вектор, проведенный от Q_2 до этой же точки. Так как оба заряда положительные, векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в точке М направлены по радиусам-векторам $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

Введем систему координат, как показано на рис. 16.1. В этой системе координат:

$$r_1^2 = h^2 + l^2; \quad r_2^2 = h^2;$$

$$E_{1M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{(h^2+l^2)}; \quad E_{2M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{h^2};$$

$$\varphi_{1M} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2+l^2}}; \quad \varphi_{2M} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 h}.$$

Применим принцип суперпозиции:

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{1M} + \vec{E}_{2M};$$

$$\varphi_M = \varphi_{1M} + \varphi_{2M} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2+l^2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 h} = 6{,}6 \text{ В}.$$

Для нахождения $\vec{E}_м$, применим метод проекций. Проекцию результирующего вектора $\vec{E}$ на ось Ox можно записать в виде:

$$E_{Mx} = E_{1Mx} + E_{2Mx};$$

$$E_{1Mx} = E_{1M}\cos\alpha = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+l^2\right)^{3/2}},$$

где $\cos\alpha = \dfrac{l}{\sqrt{h^2+l^2}}$;

$$E_{2Mx} = 0,$$

$$E_{Mx} = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+l^2\right)^{3/2}} = 29 \text{ В/м},$$

Проекция напряженности на ось Oy:

$$E_{My} = E_{1My} + E_{2My};$$

$$E_{1My} = E_{1M}\sin\alpha = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+l^2\right)^{3/2}},$$

где $\sin\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+l^2}}$;

$$E_{2My} = E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2},$$

$$E_{My} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{h}{(h^2+l^2)^{3/2}} + \frac{1}{h^2}\right) = 120 \text{ В/м}.$$

Вектор $\vec{E}$ определяется соотношением:

$$\vec{E}_M = E_{Mx}\vec{i} + E_{My}\vec{j},$$

где $E_{Mx} = 29$ В/м; $E_{My} = 120$ В/м.

Его модуль

$$E_M = \sqrt{E_{Mx}^2 + E_{My}^2} = 123 \text{ В/м}.$$

Направление $\vec{E}$ можно определить, вычислив тангенс угла между вектором $\vec{E}$ и прямой, соединяющей заряды:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_{My}}{E_{Mx}} = 4{,}2; \quad \beta \approx 77°.$$

Для получения функций $E_x(x)$ и $\varphi(x)$ надо найти величины напряженности и потенциала по методу суперпозиции в точке с произвольной координатой x. При этом необходимо рассмотреть две области (рис. 16.2, *а*):

$$\text{I, где } |x| < l/2; \qquad \text{II, где } |x| > l/2.$$

В области II, учитывая направление векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, получаем

$$|E_x(x)| = |E_1 + E_2| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x+l/2)^2} + \frac{1}{(x-l/2)^2}\right) =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x^2 + l^2/4}{\left(x^2 - l^2/4\right)^2}.$$

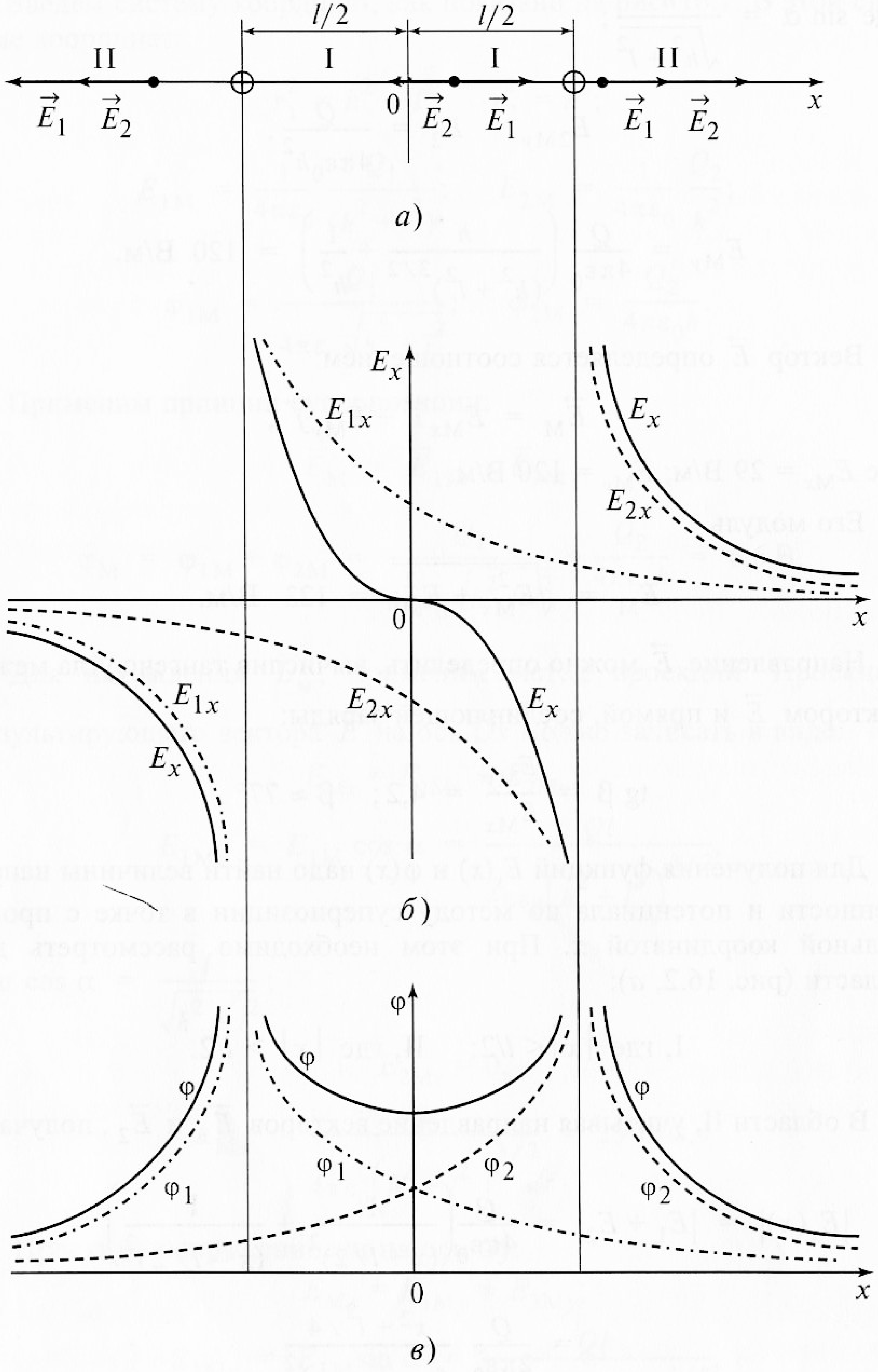

Рис. 16.2

В области I

$$|E_x(x)| = |E_1 - E_2| = \frac{Ql}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{\left(x^2 - l^2/4\right)^2}.$$

Найдем потенциал, как функцию координаты:

в области II:

$$\varphi(x) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x - l/2)} + \frac{1}{(x + l/2)}\right) =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{\left(x^2 - l^2/4\right)};$$

в области I:

$$\varphi(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(l/2 - x)} + \frac{1}{(l/2 + x)}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{l}{\left(l^2/4 - x^2\right)}.$$

Проанализировав полученные функции, построим графики $E_x(x)$ и $\varphi(x)$.

Для построения графиков также можно использовать метод суперпозиции. На рис. 16.2 пунктиром показаны графики $E_x(x)$ и $\varphi(x)$ для каждого точечного заряда Q. Результирующий график получен в результате их графического сложения.

Пример 2. Тонкий стержень длиной l равномерно заряжен с линейной плотностью зарядов τ. Точка M расположена на расстоянии a от стержня, углы между прямыми, проведенными из точки M к концам стержня и перпендикуляром к нему равны α_1 и α_2 (рис. 16.3).

а) Найдите напряженность поля в точке M.

б) Найдите напряженность и потенциал в точке N, лежащей на расстоянии a против середины стержня.

в) При каких отношениях l/a с точностью 5 % стержень можно считать точечным зарядом; бесконечно длинным?

Решение. Линейные размеры стержня и расстояния до точки M могут быть произвольными, т.е. заряд стержня нельзя считать точечным. Будем решать задачу, пользуясь методом суперпозиции.

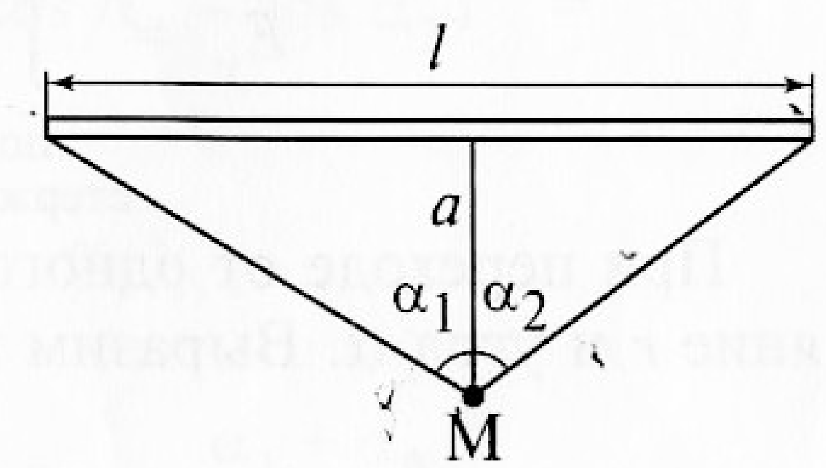

Рис. 16.3

а) Найдем напряженность $\vec{E}$ в точке М, положение которой определяется расстоянием a и углами α_1 и α_2.

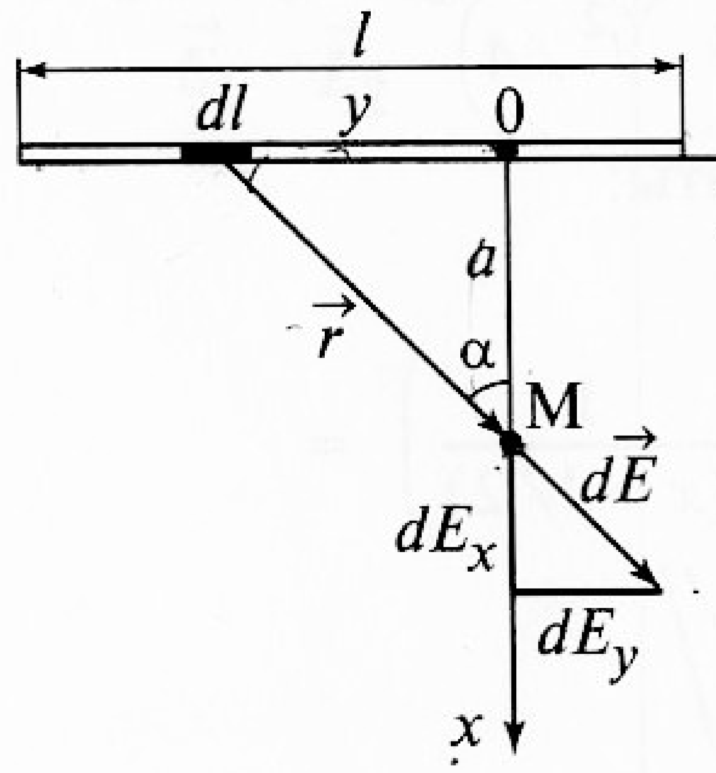

Рис. 16.4.

Выделяем бесконечно малый элемент стержня — отрезок длиной dl (рис. 16.4). Стержень тонкий, поэтому заряд отрезка dQ можно считать точечным.

Напряженность поля d$\vec{E}$, создаваемого зарядом dQ в точке М:

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от dQ к точке М.

Введем систему координат, как показано на рис. 16.4. Используем только координатную плоскость Oxy, так как все векторы d$\vec{E}$ от разных элементов dl лежат в этой плоскости.

Найдем проекции вектора d$\vec{E}$ на выбранные оси x и y:

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\alpha = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha;$$

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\alpha = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha,$$

где

$$\mathrm{d}E = \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ — модуль вектора } \mathrm{d}\vec{E}.$$

Запишем выражения, определяющие проекции результирующего вектора напряженности в точке М:

$$E_x = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \mathrm{d}E_x = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha;$$

$$E_y = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \mathrm{d}E_y = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \frac{\tau \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\alpha.$$

При переходе от одного элемента dl к другому меняются расстояние r и угол α. Выразим все три переменные через одну — α:

$$r = \frac{a}{\cos\alpha};\quad y = a\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

откуда после дифференцирования получаем:

$$\mathrm{d}y = \frac{a\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} = \mathrm{d}l,$$

где dl = dy, так как ось y направлена вдоль стержня.

Используя эти выражения, запишем:

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha;$$

$$\mathrm{d}E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Чтобы просуммировать d$\vec{E}$ от всех элементов стержня, необходимо менять угол α от значения α_1 (dQ взят на левом краю стержня) до α_2 (dQ — на правом краю). При заданном положении точки М знаки углов α_1 и α_2 различны ($\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 < 0$):

$$E_x = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1);$$

$$E_y = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Величина и направление напряженности в точке М определяются соотношениями:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2};$$

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{1 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2} = -\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

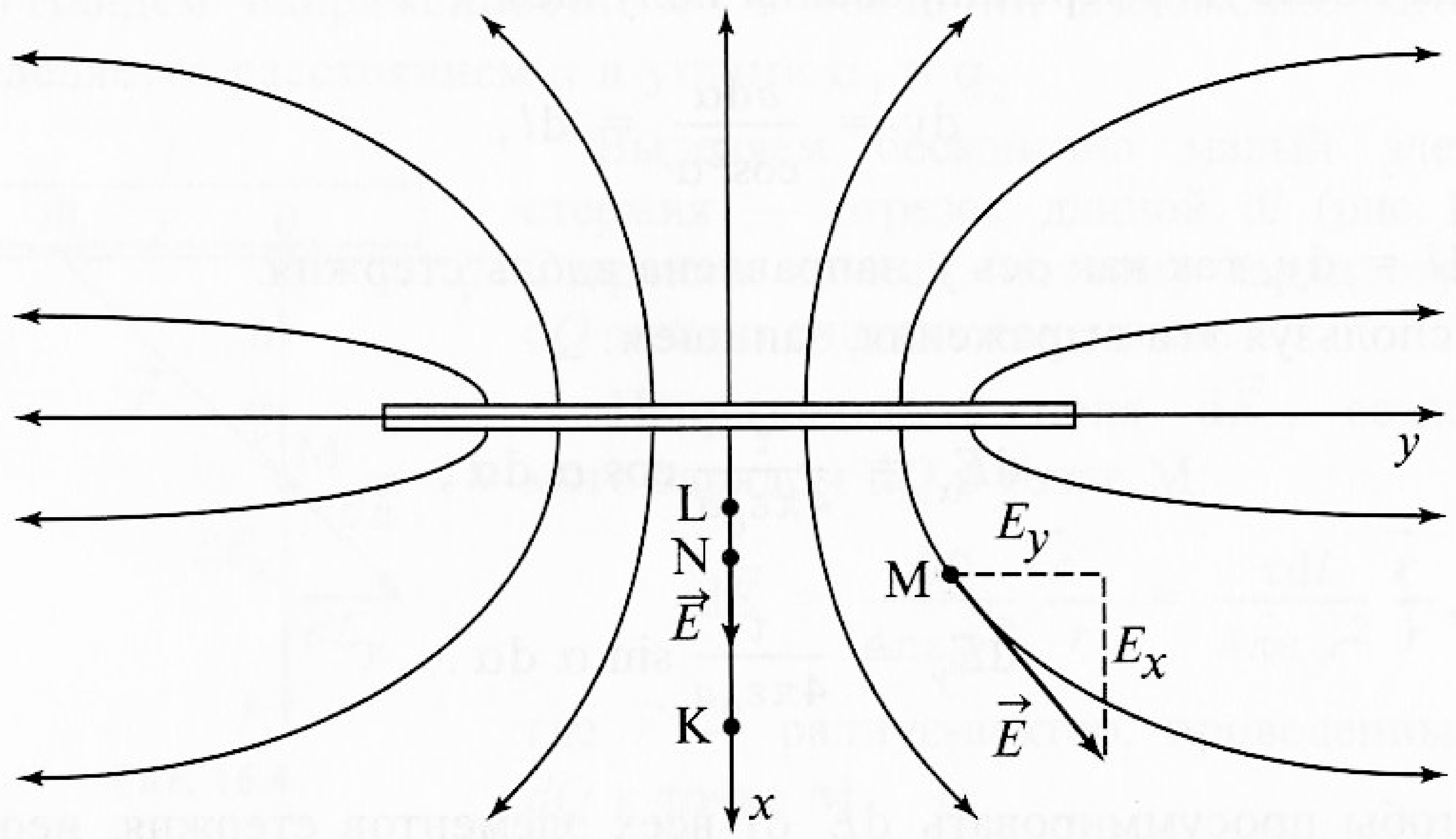

Рис. 16.5

Поле стержня и одно из возможных положений точки M показано на рис. 16.5.

б) Второй вопрос задачи относится к частному случаю: точка N находится против середины стержня. Тогда:

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha_0;$$

$$\sin\alpha_1 = -\sin\alpha_0;$$

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\alpha_0 + \sin\alpha_0) = \frac{\tau\sin\alpha_0}{2\pi\varepsilon_0 a};$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha_0) = 0\,.$$

Вектор $\vec{E}$ в этой точке имеет только одну составляющую — вдоль оси x (рис. 16.5). Такое направление вектора $\vec{E}$ согласуется с соображениями симметрии

$$E_{\mathrm{N}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_0\,.$$

Для нахождения потенциала поля в точке N, запишем выражение для потенциала поля точечного заряда $\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}l$:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\tau\,\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha}\,.$$

Используя принцип суперпозиции для потенциала, получаем

$$\varphi = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

в) Если расстояния, на которых рассматривается поле, велики по сравнению с размерами стержня, т.е. $a >> l$, то напряженность можно оценить по формуле поля точечного заряда $Q = \tau l$:

$$E \approx E_{\mathrm{т}} = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,.$$

По точной формуле, учитывающей размеры стержня, в точке против его середины напряженность поля равна:

$$E_{\text{стерж}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_0\,; \qquad \sin\alpha_0 = \frac{l/2}{\sqrt{a^2 + l^2/4}}\,.$$

Относительная погрешность при использовании приближенной формулы составляет

$$\delta = \frac{|E_{\mathrm{т}} - E_{\text{стерж}}|}{E_{\text{стерж}}} = \left|\sqrt{1 + \left(\frac{l}{2a}\right)^2} - 1\right|.$$

Если $l << a$, $\left(\frac{l}{2a}\right)^2 << 1$, то

$$\left(1 + \left(\frac{l}{2a}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1 + l^2/(8a^2)\,.$$

По условию $5\,\% \ge \delta$, т.е. $0{,}05 \ge l^2/(8a^2)$, откуда получаем $a/l = 1{,}6$.

Таким образом, если длина стержня в 2 раза меньше расстояния до точки K, находящейся против его середины (рис. 16.5), вычисление напряженности по закону Кулона отличается от точного решения менее, чем на 5 %.

Выясним, при каком значении l/a стержень можно считать «длинным» по отношению к точке, лежащей против его середины.

Для бесконечно длинного стержня $\alpha_0 = \pi/2$, поэтому:

$$E_{\text{беск.длин}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}; \qquad (16.1)$$

$$\delta = \frac{\left|E_{\text{беск.длин}} - E_{\text{стерж}}\right|}{E_{\text{стерж}}};$$

$$\frac{E_{\text{беск.длин}}}{E_{\text{стерж}}} = 1 + \delta = 1{,}05 = \frac{1}{\sin\alpha_0},$$

где

$$\sin\alpha_0 = l/\sqrt{4a^2 + l^2}.$$

Откуда $l/a \approx 6$. Следовательно, в точках, отстоящих от середины стержня на расстояниях в 6 раз меньших длины стержня (например, точка L на рис. 16.5), стержень можно считать бесконечно длинным с точностью 5 %.

Пример 3. В одной плоскости с длинной тонкой нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью $\tau = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл/м, перпендикулярно к ней расположен тонкий стержень длиной $l = 3$ см с зарядом $Q = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл, равномерно распределенным по его длине. Найдите силу, действующую на стержень, если его ближайший конец отстоит от нити на расстоянии $r_0 = 2$ см (рис. 16.6).

Решение. Поле создано заряженной длинной нитью и является плоскорадиальным (рис. 16.7), причем из выражения (16.1) следует, что

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

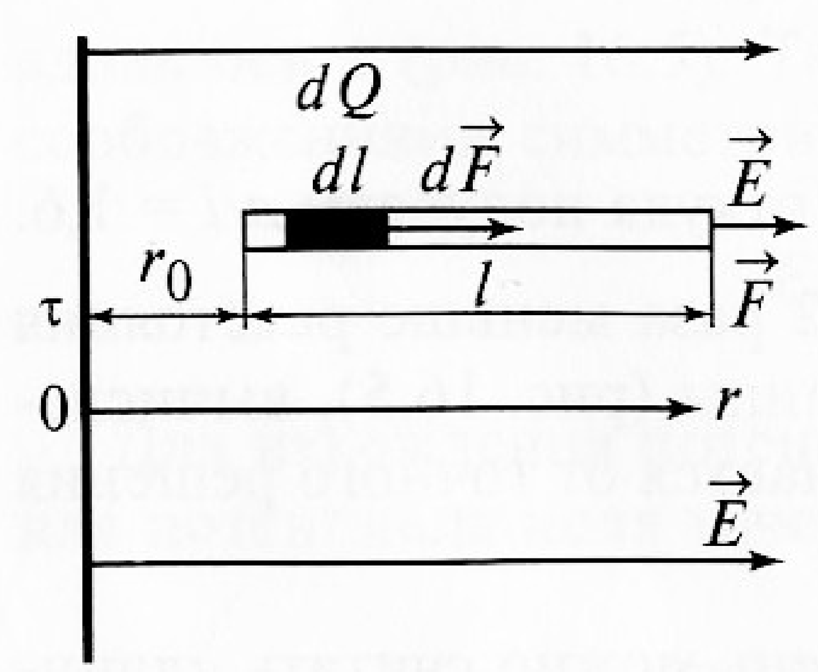

Рис. 16.6

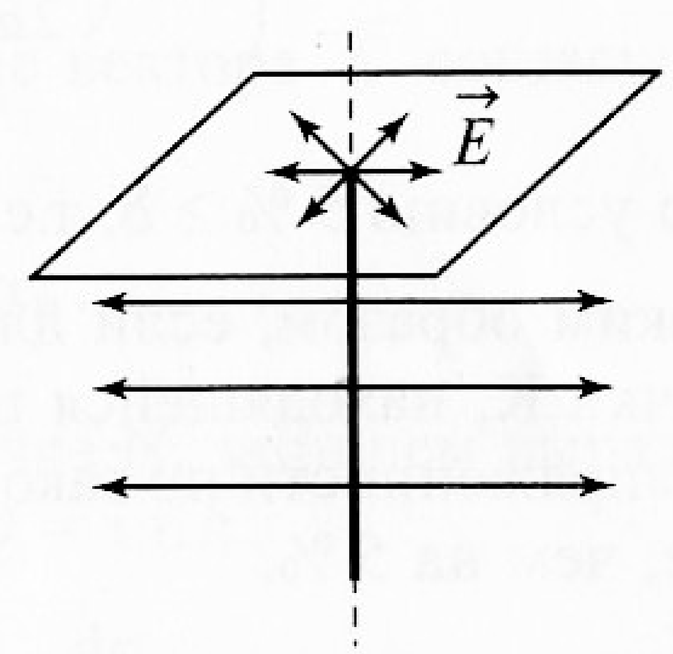

Рис. 16.7

Заряд стержня распределен по его длине, длина соизмерима с расстоянием до нити. Такой заряд нельзя считать точечным, в разных точках стержня напряженность поля, созданного нитью, разная.

Выделяем произвольный элемент dl заряженного стержня, заряд dQ на котором можно считать точечным (рис. 16.6).

Сила, действующая на заряд dQ со стороны заряженной нити

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{E}\,\mathrm{d}Q,$$

где $\vec{E}$ — напряженность поля, созданного нитью, в точке, в которой находится заряд dQ.

Направление вектора $\mathrm{d}\vec{F}$ совпадает с направлением $\vec{E}$, так как заряд стержня положительный. Модуль вектора $\mathrm{d}\vec{F}$ равен

$$\mathrm{d}F = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}Q.$$

Введем ось координат Or с началом на нити, направленную перпендикулярно к ней. Тогда r — координата заряда dQ.

При переходе от одного элемента dl к другому координата меняется на величину $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l$, так как стержень параллелен оси r.

Величина силы, действующей на элементарный заряд, может быть выражена через одну переменную:

$$\mathrm{d}F = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{Q}{l}\,\mathrm{d}r,$$

где $\mathrm{d}Q = \frac{Q}{l}\mathrm{d}r$.

Сила, действующая на весь стержень, равна векторной сумме сил, действующих на его части:

$$\vec{F} = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \mathrm{d}\vec{F} = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \vec{E}\,\mathrm{d}Q.$$

В пределах стержня направление вектора $\vec{E}$ не меняется, так что все элементарные силы $\mathrm{d}\vec{F}$ коллинеарны, поэтому

$$F = \int\limits_{\substack{\text{по}\\\text{стержню}}} \mathrm{d}F,$$

или

$$F = \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{\tau Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\tau Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{r_0 + l}{r_0} = 5{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$$

16.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

16.1. Два одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных заряда $Q_1 = -Q_2 = 1 \cdot 10^{-11}$ Кл расположены на расстоянии $l = 4$ см друг от друга (рис. 16.8). Найдите напряженность и потенциал поля в точках M, N, K, если $a = 2$ см, $b = 3$ см. Постройте примерные графики зависимостей напряженности и потенциала от координаты для точек, расположенных на линии, соединяющей заряды.

16.2. Равномерно заряженный тонкий стержень имеет длину l. Найдите напряженность и потенциал поля стержня в точке M, лежащей на его продолжении на расстоянии x от ближайшего к ней конца стержня. При каком значении отношения x/l поле в точке M можно рассчитывать по формуле поля точечного заряда с погрешностью $\delta = 10$ %? Заряд стержня Q.

16.3. Тонкое плоское кольцо, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно $R_1 = 4$ см, $R_2 = 5{,}2$ см, заряжено равномерно по поверхности с плотностью $\sigma = 8{,}85 \cdot 10^{-10}$ Кл/м^2.

1. Найдите напряженность и потенциал поля в точке M, лежащей на оси симметрии кольца, перпендикулярной его плоскости, на расстоянии $x = 3$ см от центра кольца (рис. 16.9).

2. Выведите формулы для напряженности и потенциала, создаваемых в точке M:

а) диском радиусом R, заряженным равномерно по поверхности с плотностью σ;

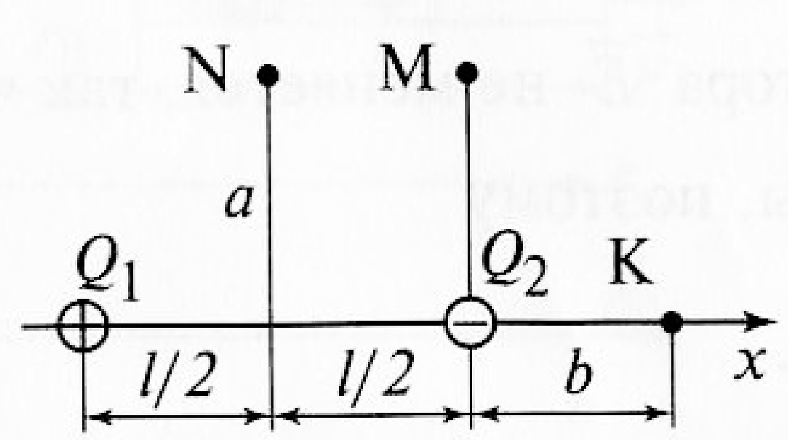

Рис. 16.8

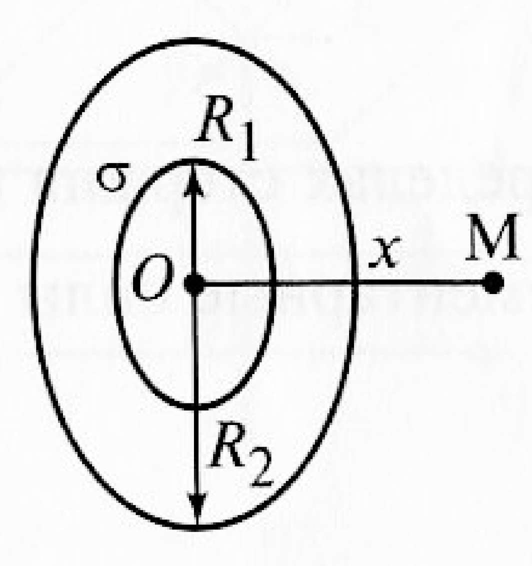

Рис. 16.9

б) большой плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью зарядов σ (найдите формулу для напряженности поля).

16.4. Найдите напряженность и потенциал электрического поля в центре тонкого полукольца, заряженного равномерно по длине. Заряд полукольца Q, радиус R.

16.5. Две длинные одинаково заряженные нити расположены параллельно в вакууме на расстоянии a друг от друга. Напряженность электрического поля в точке, отстоящей на расстоянии a от каждой нити, равна E. Найдите линейную плотность зарядов нитей τ.

16.6. Вдоль оси тонкого равномерно заряженного кольца, заряд которого $Q = 2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Кл, радиус $R = 15$ см, расположен перпендикулярно плоскости кольца тонкий стержень длиной $l = 5$ см так, что его конец совпадает с центром кольца. Стержень заряжен равномерно с плотностью $\tau = 7{,}1 \cdot 10^{-7}$ Кл/м. Найдите силу, действующую на стержень.

16.7. Точечный заряд $-Q$ находится в центре тонкого кольца радиусом R, по которому равномерно распределен заряд Q. Найдите модуль вектора напряженности электрического поля на оси кольца в точке, отстоящей от плоскости кольца на расстоянии x. Найдите работу сил поля при перемещении заряда $-Q$ из центра кольца в бесконечно удаленную точку поля.

16.8. Три одинаковых заряда $(-q)$ расположены в вершинах равностороннего треугольника, а заряд $Q > 0$ находится в центре тяжести системы. Найдите величину заряда Q, если сила, действующая на каждый отрицательный заряд равна нулю? Является ли состояние равновесия системы устойчивым?

16.9. С какой силой будут отталкиваться два одинаковых равномерно заряженных стержня, лежащих на одной прямой? Ближайшие концы стержней расположены на расстоянии x_0, длины стержней a и b. Стержни заряжены с линейными плотностями зарядов τ_1 и τ_2 соответственно.

16.10. Найдите напряженность и потенциал поля в центре тонкой полусферы радиусом R, заряженной равномерно по поверхности с плотностью σ.

16.11. В центре тонкой полусферы радиусом R, заряженной равномерно по поверхности с плотностью σ находится точечный заряд q. С какой силой этот заряд действует на полусферу?

16.12. Половина шара радиусом R заряжена равномерно по объему с плотностью ρ. Найдите напряженность и потенциал в центре основания полушара. Принять $\varphi(\infty) = 0$.

16.13. В одной плоскости с длинной тонкой нитью, заряженной с линейной плотностью τ, перпендикулярно к нити расположен стержень длиной a с зарядом Q. Линейная плотность заряда стержня меняется по закону:

$$\text{а) } \tau_1 = \frac{Q}{a^2}\,r; \quad \text{б) } \tau_2 = \frac{Q}{a^3}\,r^2,$$

где r — расстояние от нити.

Найдите силу, действующую на стержень в случаях а) и б), если его ближайший конец отстоит от нити на расстояние r_0.

16.14. Два разноименных точечных заряда $-Q_1$ и $+Q_2$ ($|Q_1| < |Q_2|$), отношение величин которых равно n, расположены на расстоянии d друг от друга. Докажите, что поверхностью нулевого потенциала является сферическая поверхность. Определите радиус R этой сферы и расстояние h от ее центра до меньшего заряда.

16.15. Найдите потенциал в центре и на краю тонкого диска радиусом R, равномерно заряженного по поверхности с поверхностной плотностью заряда σ.

16.16. Начертите схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы из двух точечных зарядов ($+Q$) и ($+4Q$), находящихся в вакууме на расстоянии d друг от друга.

Глава 17

СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

17.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

17.1.1. Работа $\mathrm{d}A$, совершаемая силами электростатического поля (кулоновскими силами) при малом перемещении $\mathrm{d}\vec{l}$ точечного заряда Q в электростатическом поле равна

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\mathrm{d}\vec{l} = Q\vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = QE\mathrm{d}l\cos\left(\widehat{\vec{E}, \mathrm{d}\vec{l}}\right) = Q(E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z),$$

где $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{i}\,\mathrm{d}x + \vec{j}\,\mathrm{d}y + \vec{k}\,\mathrm{d}z$;

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}W_\text{п} = -Q\mathrm{d}\varphi = -Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z\right),$$

где $(-\mathrm{d}W_\text{п})$ — убыль потенциальной энергии заряда Q в поле.

17.1.2. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля, позволяющая по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке

$$\vec{E}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \quad \text{или } \vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi.$$

В проекциях на координатные оси x, y, z:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

17.1.3. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля, позволяющая по заданным значениям $\vec{E}$ в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{E}\mathrm{d}\vec{l} \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l}.$$