

СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

17.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ

17.1.1. Работа dA , совершаемая силами электростатического поля (кулоновскими силами) при малом перемещении $d\vec{l}$ точечного заряда Q в электростатическом поле равна

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F}d\vec{l} = Q\vec{E}d\vec{l} = QE dl \cos(\vec{E}, \hat{d\vec{l}}) = \\ &= Q(E_x dx + E_y dy + E_z dz), \end{aligned}$$

где $d\vec{l} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$;

$$dA = -dW_{\text{п}} = -Qd\varphi = -Q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz\right),$$

где $(-dW_{\text{п}})$ — убыль потенциальной энергии заряда Q в поле.

17.1.2. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля, позволяющая по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке

$$\vec{E}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}\right) \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

В проекциях на координатные оси x, y, z :

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

17.1.3. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля, позволяющая по заданным значениям \vec{E} в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l} \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$

Если $\varphi_2 = 0$, то потенциал произвольной точки 1 поля равен

$$\varphi_1 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}.$$

Интеграл можно брать по любой траектории, соединяющей точки 1 и 2 поля, так как работа сил электростатического поля не зависит от пути. Электростатическое поле потенциально:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

(L)

17.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Два равных точечных заряда $Q_1 = Q_2 = Q$ находятся на расстоянии l один от другого. Найдите потенциал и напряженность электрического поля в произвольной точке M на плоскости (x, y) (рис. 17.1).

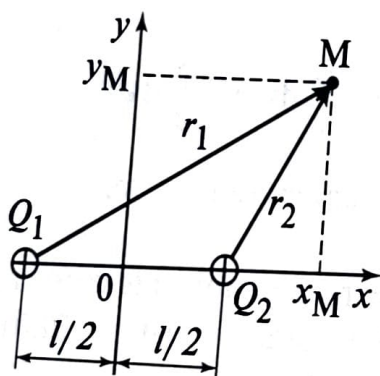


Рис. 17.1

Решение. В системе зарядов, описанной в условии, найти потенциал в каждой точке поля проще, чем напряженность, так как применение принципа суперпозиции для потенциала предполагает алгебраическое сложение величин φ_1 и φ_2 .

Введем систему координат, как показано на рис. 17.1. Потенциал поля в произвольной точке $M(x, y)$ по принципу суперпозиции определяется суммой потенциалов, созданных в этой точке каждым зарядом:

$$\varphi_M = \varphi_{1M} + \varphi_{2M} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x + l/2)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - l/2)^2 + y^2}.$$

Тогда

$$\varphi(x, y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x + l/2)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - l/2)^2 + y^2}} \right).$$

Найдем проекции вектора напряженности на оси координат, используя связь между E и φ :

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x + l/2}{\left((x + l/2)^2 + y^2\right)^{3/2}} + \frac{x - l/2}{\left((x - l/2)^2 + y^2\right)^{3/2}} \right);$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left((x + l/2)^2 + y^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((x - l/2)^2 + y^2\right)^{3/2}} \right);$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Если $x = l/2$ и $y = h$, то:

$$E_y(l/2, h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{h}{(l^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{1}{h^2} \right);$$

$$E_x(l/2, h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{(l^2 + h^2)^{3/2}},$$

что совпадает с результатом, полученным ранее при помощи принципа суперпозиции (пример 1 из гл. 16).

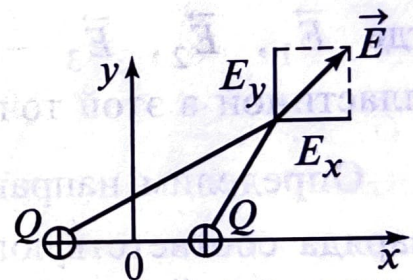


Рис. 17.2

Зная проекции, можем найти вектор \vec{E} (рис. 17.2):

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \quad \text{или} \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Пример 2. Электрическое поле создано тремя большими плоскими пластинами, расположенными параллельно друг другу на расстояниях $d = 2$ см (рис. 17.3). Пластины заряжены с постоянными поверхностными плотностями $\sigma_1 = -\sigma$; $\sigma_2 = -3\sigma$ и $\sigma_3 = 5\sigma$, $\sigma = 1 \cdot 10^{10}$ Кл/м². Найдите напряженность и потенциал электрического поля в точках А и В, расположенных посередине между соседними пластинами, и в точках М и N, лежащих за пределами крайних пластин на расстояниях $a = 1$ см от них. Постройте графики зависимостей $E_x(x)$, $\varphi(x)$. Ось x перпендикулярна пластинам.

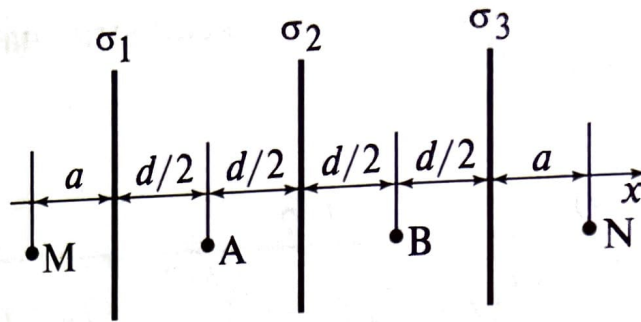


Рис. 17.3

Решение. Напряженность поля, созданного каждой пластиной, определяется соотношениями:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}; \quad E_3 = \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}.$$

Напряженность поля в произвольной точке в соответствии с принципом суперпозиции равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3,$$

где \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 — напряженности полей, создаваемых каждой пластиной в этой точке.

Определим направление векторов \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 , исходя из знака заряда соответствующей пластины. На рис. 17.4 показаны силовые линии полей, создаваемых каждой пластиной в отдельности. Точка на пластине указывает, откуда «выходит» (или куда «входит») сило-

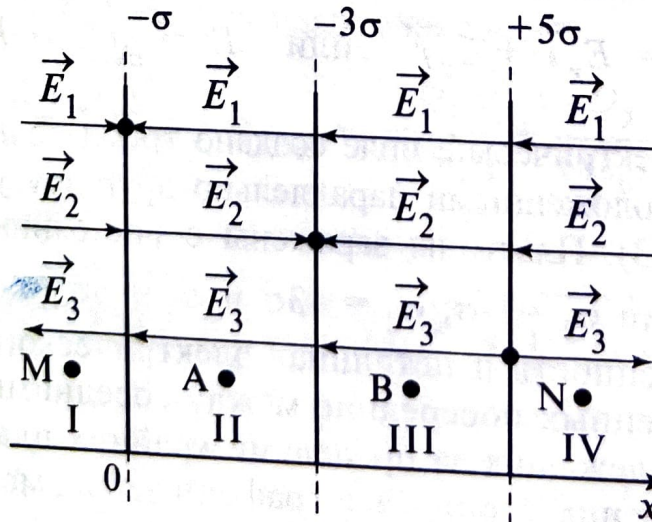


Рис. 17.4

вая линия. Выбираем ось x , направленную вправо ($x = 0$ на первой пластине), и найдем в каждой из областей I, II, III, IV, указанных на рисунке, проекцию результирующего вектора \vec{E} :

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x},$$

где E_{1x} , E_{2x} , E_{3x} — проекции векторов \vec{E}_1 , \vec{E}_2 , \vec{E}_3 на ось x .

Во всех случаях величина проекции равна модулю соответствующего вектора \vec{E}_i , а знак зависит от направления \vec{E}_i по отношению к направлению оси x .

В области I для $x < 0$:

$$E_{xI} = E_1 + E_2 - E_3 = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_3|}{2\varepsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Величины $|\sigma_1|$ и $|\sigma_2|$ взяты по модулю, так как отрицательные знаки зарядов уже учтены при определении направления силовых линий полей, созданных этими зарядами.

В области II для $0 < x < d$:

$$E_{xII} = -E_1 + E_2 - E_3 = -\frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} - \frac{|\sigma_3|}{2\varepsilon_0} = -\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

В области III для $d < x < 2d$:

$$E_{xIII} = -E_1 - E_2 - E_3 = -\frac{9\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

В области IV для $x > 2d$:

$$E_{xIV} = -E_1 - E_2 + E_3 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Построим график зависимости $E_x(x)$. Очевидно, что в каждой из областей E_x не зависит от координаты, т.е. является константой. Изменение величины E_x происходит только при переходе через заряженную поверхность. Скачок значений на границе областей пропорционален поверхностной плотности заряда на этой границе (рис. 17.5) и равен

$$|\Delta E| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

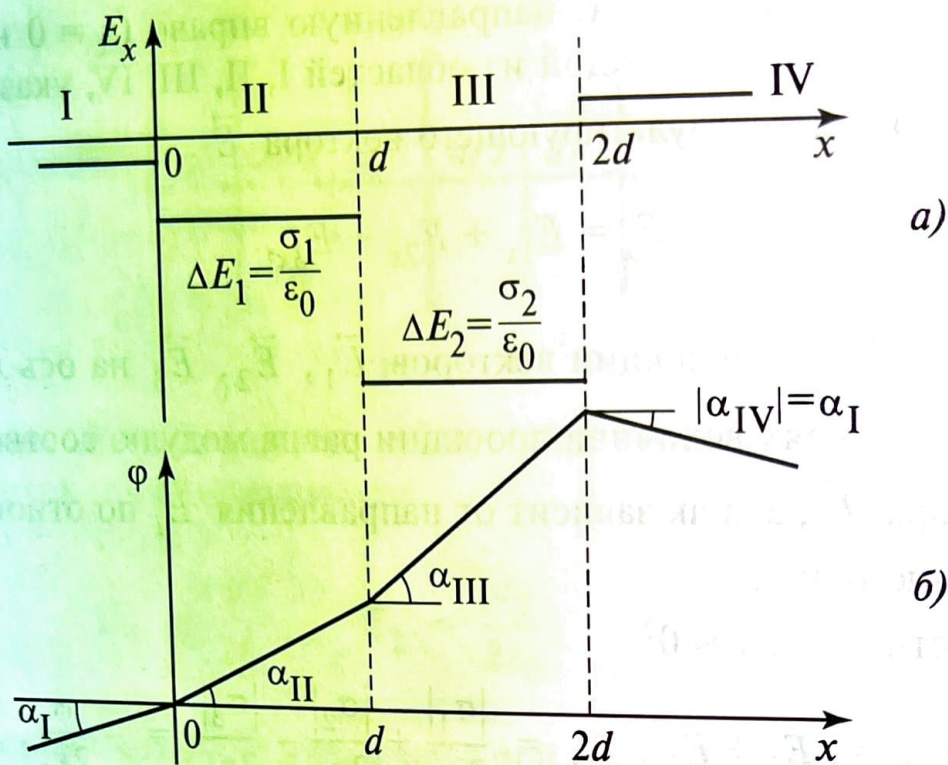


Рис. 17.5

Величина напряженности в заданных точках А, В, М, N зависит только от того, в какой области находится точка:

$$E_x(x_A) = E_{xII} = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0} = 17 \text{ В/м};$$

$$E_x(x_B) = E_{xIII} = -\frac{9\sigma}{2\epsilon_0} = 51 \text{ В/м};$$

$$E_x(x_M) = E_{xI} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -5,7 \text{ В/м};$$

$$E_x(x_N) = E_{xIV} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 5,7 \text{ В/м}.$$

Для расчета потенциала положим, что потенциал поля равен нулю в точках заряженной плоскости $x = 0$, т.е. для любой точки поля

$$\varphi(x) = \int_x^0 E_x dx.$$

Применим это соотношение для каждой из областей I—IV:

$$\varphi_I(x) = \int_x^0 E_{xI} dx = \int_x^0 \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) dx = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}; \text{ где } x < 0;$$

$$\varphi_{II}(x) = \int_x^0 E_x dx = \int_x^0 E_{xII} dx = \int_x^0 \left(-\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\right) dx = \frac{3\sigma x}{2\varepsilon_0};$$

$$\varphi_{III}(x) = \int_x^d E_{xIII} dx + \int_d^0 E_{xII} dx = -\frac{9\sigma}{2\varepsilon_0}(d-x) + \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}d.$$

(Заметим, что второе слагаемое — потенциал второй пластины, $\varphi_{II}(x=d)$.)

После приведения подобных получаем:

$$\varphi_{III}(x) = \frac{9\sigma}{2\varepsilon_0}x - \frac{6\sigma}{2\varepsilon_0}d;$$

$$\varphi_{IV}(x) = \int_x^{2d} E_{xIV} dx + \int_{2d}^d E_{xIII} dx + \int_d^0 E_{xII} dx = \frac{14\sigma}{2\varepsilon_0}d - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x.$$

В каждой области $\varphi(x)$ представляет собой прямую с коэффициентом при x , равном значению $(-E_x)$ в этой области.

Таким образом, тангенс угла наклона графика $\varphi(x)$ равен по величине и противоположен по знаку значению E_x в соответствии с выражением

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

График $\varphi(x)$ показан на рис. 17.5. Потенциал поля всегда является непрерывной функцией координат.

Используя полученные функции $\varphi(x)$, найдем значения потенциалов в указанных точках:

$$\varphi(x_A) = \varphi_{II}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{2} = 0,17 \text{ В};$$

$$\varphi(x_B) = \varphi_{III}\left(\frac{3d}{2}\right) = \frac{15\sigma}{4\varepsilon_0} d = 0,86 \text{ В};$$

$$\varphi(x_M) = \varphi_I(-a) = -\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} = -0,057 \text{ В};$$

$$\varphi(x_N) = \varphi_{IV}(2d + a) = \frac{12\sigma d}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0} = 1,3 \text{ В}.$$

Пример 3. Функция $E_x(x)$, описывающая одномерное электростатическое поле, задана графически (рис. 17.6, а). Постройте качественно график зависимости $\varphi(x)$.

Решение. Выберем начало отсчета потенциала в точке с координатой x_1 , тогда $\varphi(x_1) = 0$. В любой точке x справедливы выражения:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x};$$

$$\varphi(x) = \int_x^{x_1} E_x dx.$$

В областях I (при $0 \leq x \leq x_1$) и II (при $x_1 \leq x \leq x_2$) вектор напряженности поля направлен вдоль оси x (так как $E_x > 0$).

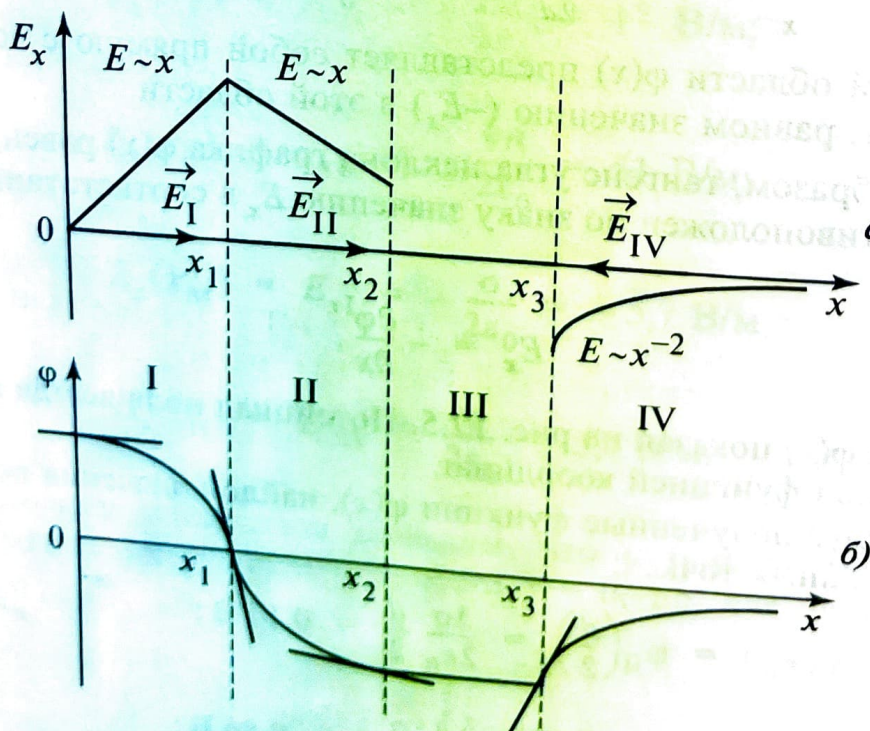


Рис. 17.6

Следовательно, потенциал в этих областях будет убывать с увеличением x (напряженность поля направлена в сторону убывания потенциала) по закону $\varphi \sim x^2$ (так как $E \sim x$).

В точке $x = 0$ $E_x = 0$, следовательно, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ и функция $\varphi(x)$ имеет экстремум.

В области III ($x_2 \leq x \leq x_3$) $E_x = 0$ и потенциал не изменяется, т.е. $\varphi_{III} = \text{const}$.

В области IV ($x \geq x_3$) вектор напряженности поля направлен против оси x ($E_x < 0$), следовательно, потенциал возрастает с ростом x : $\varphi_{IV} \sim x^{-1}$, так как $E_{IV} \sim x^{-2}$ (см. рис. 17.6, б).

График функции $\varphi(x)$ не должен иметь скачков — потенциал является непрерывной функцией координат.

17.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

17.1. На продолжении тонкого равномерно заряженного стержня (заряд стержня Q , длина стержня l) на расстоянии x от его конца находится точечный заряд q . Определите потенциальную энергию системы; найдите силу, действующую на заряд q .

17.2. Три большие плоскопараллельные тонкие пластины, расположенные на малом расстоянии $d = 0,01$ м друг от друга, равномерно заряжены. Поверхностные плотности зарядов пластин равны соответственно $\sigma_1 = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², $\sigma_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², $\sigma_3 = -1 \cdot 10^{-9}$ Кл/м². Найдите напряженность и потенциал поля в точках, лежащих между пластинами и с внешней стороны. Постройте графики зависимостей напряженности и потенциала поля от расстояния, выбрав за начало отсчета положение первой пластины. Определите потенциалы пластин. Принять $\varphi(0) = 0$.

17.3. Зависимость проекции напряженности электрического поля E_r от координаты r представлена на рис. 17.7. Постройте график зависимости $\varphi(r)$, приняв $\varphi(\infty) = 0$. Величина E_1 задана.

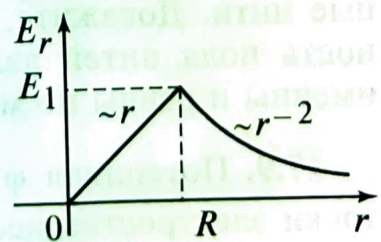


Рис. 17.7

17.4. Рассмотрим поле заряженного диска, описанного в задаче 16.3. Как следует из решения этой задачи, потенциал точки М поля диска описывается формулой

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \right).$$

Исходя из связи напряженности и потенциала, получите выражение для напряженности поля в точке М.

17.5. Две плоскопараллельные тонкие пластины площадью $S = 1 \text{ м}^2$ каждая, расположенные на расстоянии $d = 0,01 \text{ м}$, равномерно заряжены. Найдите напряженность и потенциал поля в точках, лежащих между пластинами и с внешней стороны. Постройте графики зависимостей $E_x(x)$ и $\varphi(x)$, выбрав за начало отсчета положение одной из пластин. Принять $\varphi(0) = 0$. Заряды пластин равны соответственно:

а) $Q_1 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$, $Q_2 = -1 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$;

б) $Q_1 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$, $Q_2 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$;

в) $Q_1 = -1 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$, $Q_2 = -1 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$.

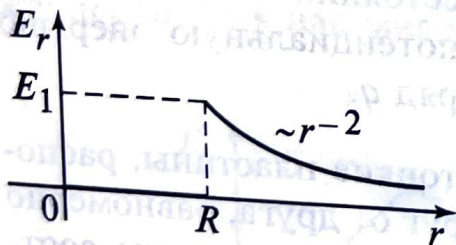


Рис. 17.8

17.6. Зависимость напряженности E_r от координаты r представлена на рис. 17.8. Постройте качественно график $\varphi(r)$, приняв $\varphi(\infty) = 0$.

17.7. Определите напряженность электрического поля, потенциал которого зависит от координат x, y по закону $\varphi = a(x^2 - y^2)$, где a — постоянная. Какова размерность постоянной? Изобразите примерный вид поля с помощью силовых линий.

17.8. Имеются две равномерно заряженные параллельные длинные нити. Докажите, что хотя бы одна эквипотенциальная поверхность поля нитей является цилиндром, если заряды нитей разноименны и равны по модулю.

17.9. Потенциал φ и проекция напряженности E_r произвольной точки электростатического поля, лежащей на оси Ox , связаны соотношением

$$E_r(r) = \left(a + \frac{1}{r} \right) \varphi(r).$$

Известно, что в точке с координатой $r = r_0$ значение потенциала равно φ_0 . Найдите потенциал и напряженность поля в произвольной точке оси. Константа a задана.

17.10. Положительный точечный заряд находится в начале координат. Постройте графики зависимостей $E_x(x)$ и $\varphi(x)$ для:

- точек оси x ;
- точек прямой $y = \text{const}$, лежащей в плоскости xu .

17.11. Найдите напряженность поля \vec{E} , если потенциал $\varphi = cr$, где c — отрицательная константа; r — расстояние от начала координат. Изобразите силовые линии поля и эквипотенциальные поверхности.

17.12. На рис. 17.9 (а, б) изображены силовые линии электрического поля. Определите, является ли данное поле потенциальным?

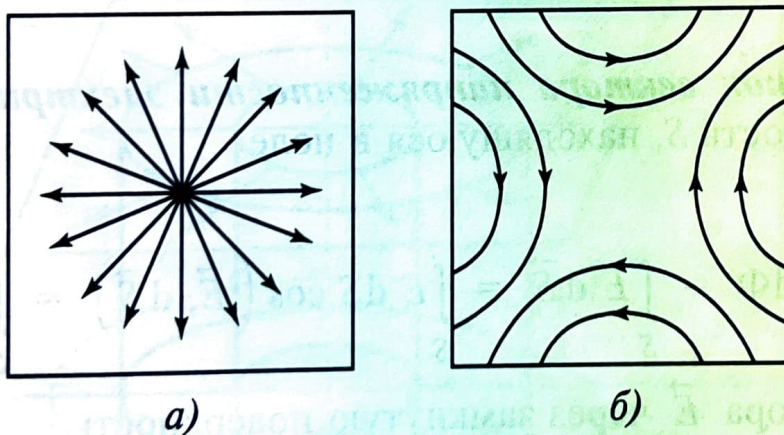


Рис. 17.9