Методика решения задач по разделу «Механика»

Кинематика поступательного движения

Задача 1

Материальная точка движется в плоскости, причем ее координаты определяются уравнениями:

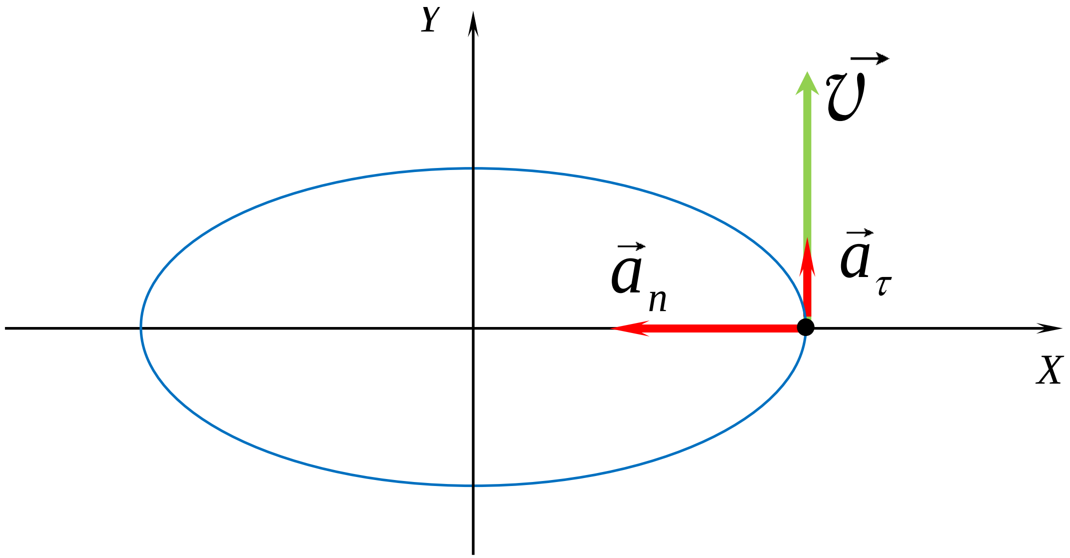
$$x = A\cos\omega t; \quad y = B\sin\omega t,$$

где A, B, ω — заданные величины.

Найдите уравнение траектории. Начертите траекторию в декартовой системе координат. Определите радиусы кривизны траектории в точках пересечения ее с осями координат.

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t \qquad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = B\omega\cos\omega t \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -B\omega^2\sin\omega t$$



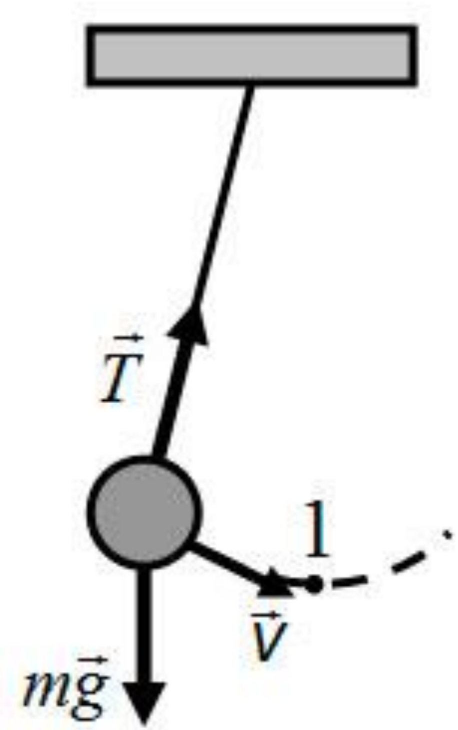
Если $\upsilon_x = 0$, то $\upsilon_y = B\omega$, тогда $a_x = -A\omega^2$

$a_y = 0$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\upsilon_y^2}{|a_x|} = \frac{B^2}{A}$$

Динамика поступательного движения

Задача 2 Сравните в точке 1 модули силы натяжения нити и силы тяжести, действующих на шар, раскачивающийся на нити



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

как направлена равнодействующая?

в нижней точке траектории (точка 1): $\left(\vec{T} + m\vec{g}\right) \perp \vec{\upsilon}$

$$\vec{a} \perp \vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \equiv \vec{a}_n \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \uparrow$$

$$ma = T - mg \quad \Rightarrow \quad T > mg$$

равнодействующая направлена вертикально вверх

в точке максимального отклонения: $\upsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \equiv \vec{a}_\tau \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \| \vec{\upsilon}$

равнодействующая направлена по касательной к траектории (перпендикулярно нити)

в промежуточной точке: $\upsilon \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

равнодействующая направлена выше касательной (внутрь траектории)

Динамика поступательного движения

Рекомендации по решению задач

При решении задач с использованием законов динамики в инерциальных системах отсчета необходимо выполнить следующие действия.

1. Сделать рисунок системы тел и показать векторы сил, действующих **на каждое** тело, и векторы ускорений тел (или возможных ускорений).

2. Записать второй закон Ньютона **в векторной форме для каждого из тел системы в отдельности**.

3. Для каждого из тел системы выбрать направления осей координат таким образом, чтобы **направление одной** из осей совпадало с направлением ускорения тела.

Замечание 1: если тело покоится или движется равномерно, то ось сонаправлена с возможным ускорением;

Замечание 2: если тело движется криволинейно, то ось сонаправлена с нормальным ускорением.

4. Спроецировать все векторы на выбранные оси координат и записать уравнения второго закона Ньютона **в скалярном виде для каждого из тел системы в отдельности**.

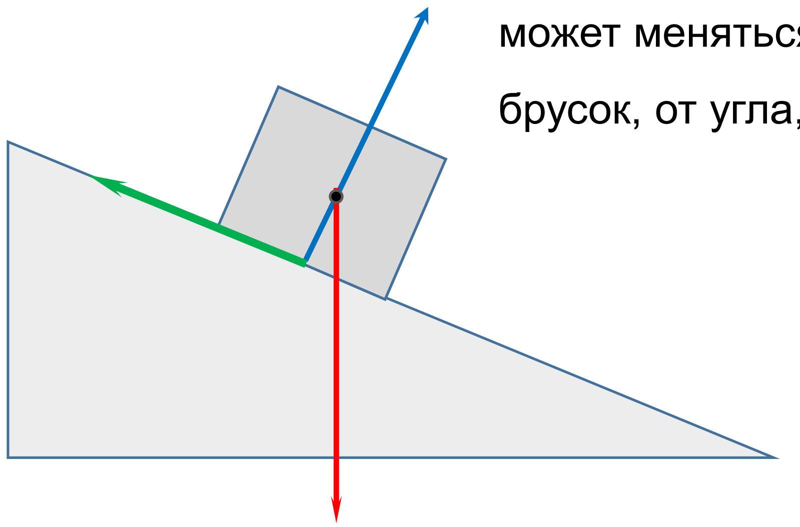
5. К этой системе необходимо добавить уравнения, связывающие между собой силы и ускорения тел – **уравнения связи**, речь о которых пойдет ниже.

6. Полученную систему уравнений необходимо решить **в общем виде**. В итоговые формулы нужно подставить численные данные условия задачи.

Динамика поступательного движения

Задача 3

Брусок массой *m* находится на наклонной плоскости, угол между которой и горизонтом может меняться: $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Постройте график зависимости силы трения, действующей на брусок, от угла, если коэффициент трения между бруском и плоскостью μ .

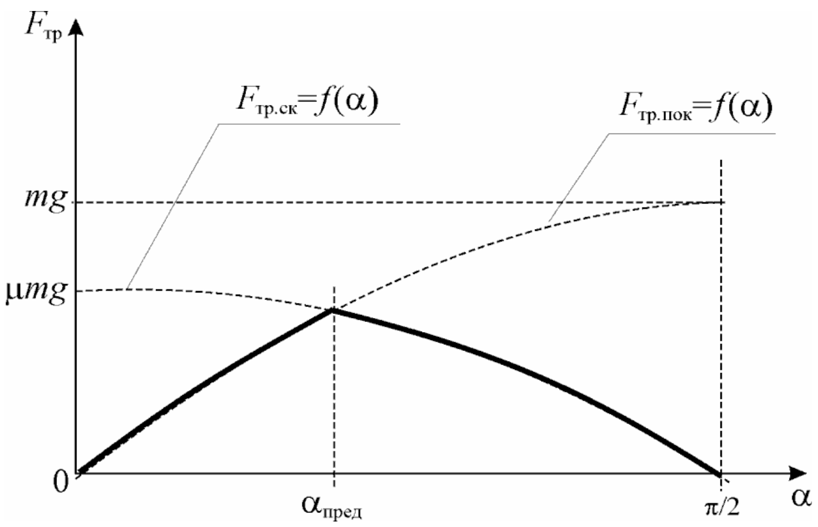


1. **Состояние покоя**, 1 закон Ньютона $0 = mg\sin\alpha - F_{\text{тр пок}}$

$$F_{\text{тр пок}} = mg\sin\alpha$$

2. **Процесс скольжения**, 2 закон Ньютона $ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр ск}}$

$$F_{\text{тр ск}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha \qquad a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$



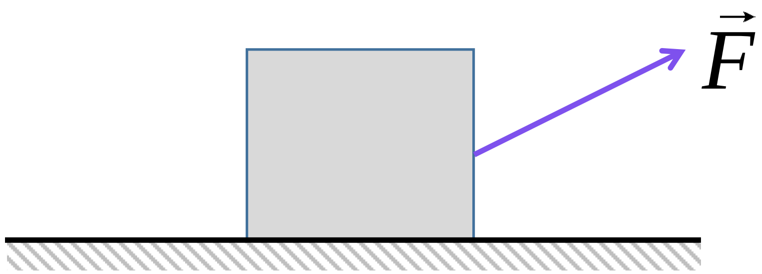
$$mg\sin\alpha_{\text{пред}} = \mu mg\cos\alpha_{\text{пред}}$$

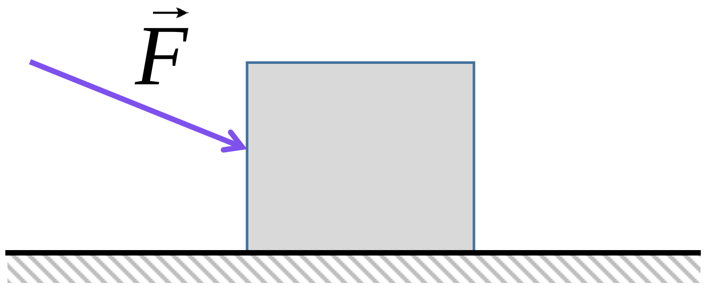
$$\mu = \operatorname{tg}\alpha_{\text{пред}}$$

Тело начинает процесс скольжения, когда величина силы трения покоя достигает значения силы трения скольжения !

Динамика поступательного движения

Задача 4 **В каком случае тело будет двигаться с большим ускорением: когда его тянут под углом α к горизонту или толкают под тем же углом?** (***что выгоднее – тянуть или толкать?***)





$$\begin{cases} ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр ск}} \\ 0 = N + F\sin\alpha - mg \end{cases}$$

$$F_{\text{тр ск}} = \mu\left(mg - F\sin\alpha\right)$$

$$a = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - \mu g$$

$$\begin{cases} ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр ск}} \\ 0 = N - F\sin\alpha - mg \end{cases}$$

$$F_{\text{тр ск}} = \mu\left(mg + F\sin\alpha\right)$$

$$a = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right) - \mu g$$

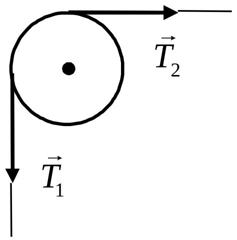
выгоднее тянуть

Динамика поступательного движения

ЗАДАЧИ С ДИНАМИЧЕСКИМИ СВЯЗЯМИ

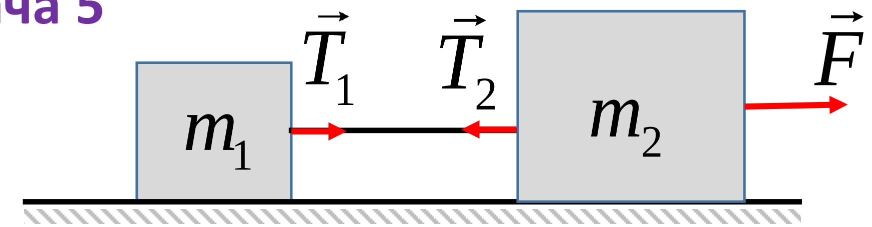
Связями называют уравнения, которые дополняют систему скалярных динамических уравнений до полной, в которой число неизвестных совпадает с числом уравнений. Связи следуют из законов динамики, поэтому называются динамическими

Модули сил натяжения нити, перекинутой через *идеальный блок* (масса блока равна нулю), равны друг другу: $\vec{T}_1 \neq \vec{T}_2$**, но** $T_1 = T_2$



выгоднее тянуть в какую сторону?

Задача 5



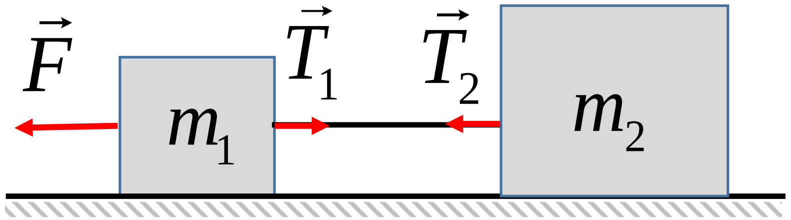
$$(m_1 + m_2)a = F$$
$$m_2 a_2 = F - T_2$$
$$m_1 a_1 = T_1$$

нить нерастяжима

$$a_1 = a_2$$
$$T_1 = T_2$$

нить невесома

$$\boxed{T = F\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$



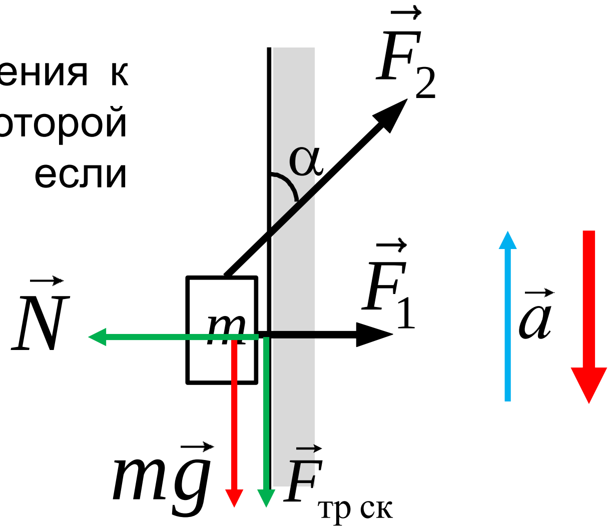
$$(m_1 + m_2)a = F$$
$$m_2 a_2 = T_2$$
$$m_1 a_1 = F - T_1$$

$$a_1 = a_2$$
$$T_1 = T_2$$

$$\boxed{T = F\frac{m_2}{m_1 + m_2}}$$

Динамика поступательного движения

Задача 6 Магнит массой m = 5 кг движется по вертикальной стенке, сила притяжения к которой F_1 = 5 Н. К магниту приложена сила F_2 = 20 Н, линия действия которой составляет угол α = 30° со стенкой. Определите ускорение магнита, если коэффициент трения между стенкой и магнитом μ = 0,2.



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{\text{тр ск}}$$

$$ma = F_2\cos\alpha - mg - F_{\text{тр ск}}$$

$$0 = N - F_1 - F_2\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad N = F_1 + F_2\sin\alpha$$

$$\boxed{N \neq F_1}$$

$$F_{\text{тр ск}} = \mu N$$

$$ma = F_2\cos\alpha - mg - \mu\left(F_1 + F_2\sin\alpha\right)$$

$$a = \frac{F_2}{m}\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right) - \mu\frac{F_1}{m} - g$$

$$a = -7{,}14\,\text{м/с}^2$$

$$ma = mg - F_2\cos\alpha - F_{\text{тр ск}}$$

$$a = g - \frac{F_2}{m}\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - \mu\frac{F_1}{m}$$

$$\boxed{a = 5{,}93\,\text{м/с}^2}$$

ИМПУЛЬС. Закон сохранения импульса

$$\mathrm{d}\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \,\mathrm{d}t$$

Изменение импульса материальной точки равно суммарному импульсу всех сил, действующих на неё

$$\mathrm{d}\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\ \text{внешн}} \,\mathrm{d}t$$

Изменение импульса системы материальных точек равно суммарному импульсу всех внешних сил, действующих на неё

импульс системы материальных точек могут изменить только внешние силы, если их геометрическая сумма не равна 0

Импульс системы материальных точек не изменяется, если

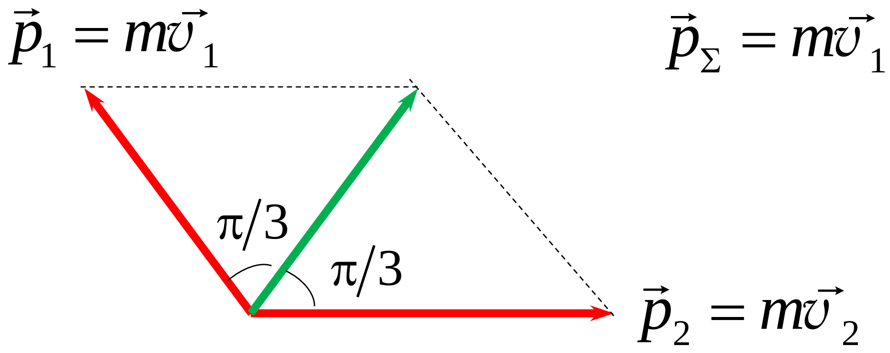
- **система изолирована** $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$
- **система замкнута** $\sum \vec{F}_{\text{внеш}\ i} = 0$
- **модуль внутренних сил системы существенно больше модуля внешних сил**
- **время длительности процесса взаимодействия мало**
- **система условно замкнута – в этом случае сохраняется проекция импульса системы** $\left(\sum \vec{F}_{\text{внеш}\ i}\right)_x = 0 \Rightarrow \left(\vec{p}_{\text{сист}}\right)_x = \text{const}$

ИМПУЛЬС. Закон изменения импульса

Задача 7 Два тела с одинаковыми массами двигаются с одинаковыми по модулю скоростями. Может ли импульс системы тел быть равен по модулю импульсу одного из тел системы?

$$\vec{p}_1 = m\vec{\upsilon}_1 \qquad \vec{p}_2 = m\vec{\upsilon}_2 \qquad \left|\vec{\upsilon}_1\right| = \left|\vec{\upsilon}_2\right|$$

$$\vec{p}_\Sigma = m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 \qquad \left|\vec{p}_\Sigma\right| = \left|m\vec{\upsilon}_1\right| = \left|m\vec{\upsilon}_2\right|$$



ИМПУЛЬС. Закон изменения импульса

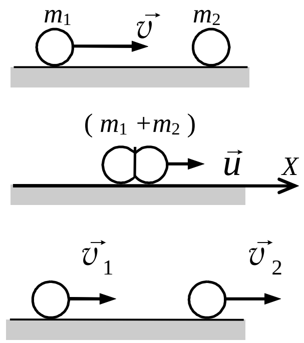
Столкновение – кратковременное взаимодействие тел, при котором они изменяют свои скорости на конечную величину

Удар – столкновение, при котором тела соприкасаются

ТИП удара, процессы в ходе удара, результат удара определяются характером деформации в телах

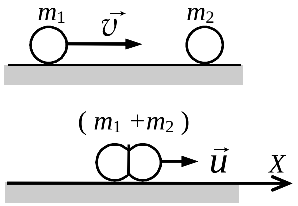
Абсолютно упругий удар –
в телах не наблюдаются остаточные деформации

- кинетическая энергия системы тел ДО удара равна кинетической энергии системы тел ПОСЛЕ удара;
- каждое тело системы после удара полностью восстанавливает свою первоначальную форму;
- каждое тело системы после удара двигается самостоятельно



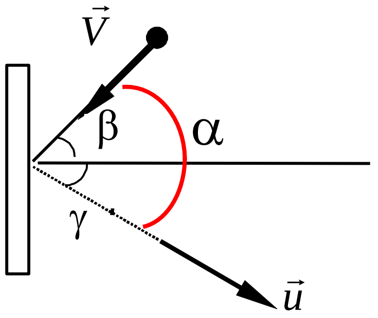
Абсолютно неупругий удар – в телах не возникают упругие деформации

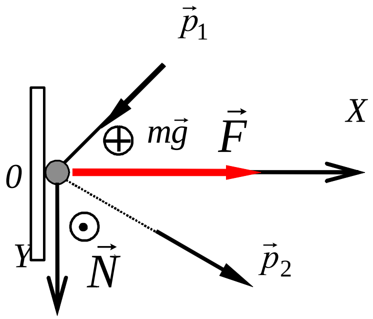
- кинетическая энергия системы тел ДО удара больше кинетической энергии системы тел ПОСЛЕ удара;
- тела системы после удара сохраняют состояние максимальной деформации;
- система тел после удара движется как единое тело



ИМПУЛЬС. Закон изменения импульса

Задача 8 Тело массой *m* скользит по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью *V* и сталкивается с упругой гладкой вертикальной стенкой так, что угол между векторами скоростей перед ударом и после удара равен α . Определите продолжительность удара, если известно, что средняя сила удара *F* .





$$\vec{p}_1 = m\vec{V}$$
$$\vec{p}_2 = m\vec{u}$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \left(\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}\right)\Delta t$$

$$p_{2x} - p_{1x} = F\Delta t$$
$$p_{2y} - p_{1y} = 0$$

$$mu\cos\gamma - (-mV\cos\beta) = F\Delta t$$
$$mu\sin\gamma - mV\sin\beta = 0$$

Условие упругого соударения со стенкой – сохранение модуля нормальной к стенке составляющей импульса (модуль проекции импульса на ось *OX* не меняется)

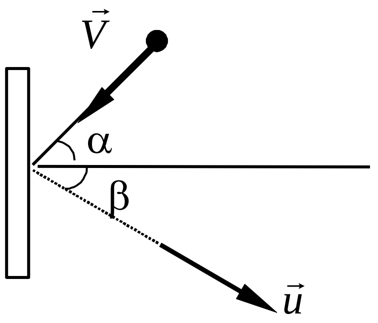
$$mu\cos\gamma = mV\cos\beta$$
$$mu\sin\gamma - mV\sin\beta = 0$$

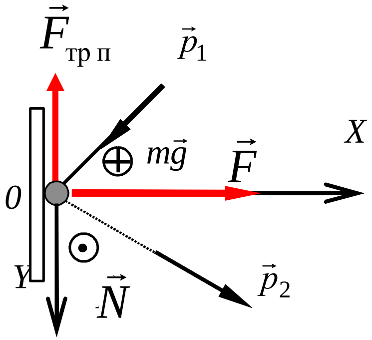
$$\Rightarrow \quad \beta = \gamma = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2mV\cos\frac{\alpha}{2}}{F}$$

$$\boxed{u = V}$$

ИМПУЛЬС. Закон изменения импульса

Задача 9 Тело массой *m* скользит по гладкой горизонтальной плоскости и сталкивается с упругой вертикальной стенкой так, что угол между вектором скорости и нормалью к стенке равен α . Определите угол, под которым тело отскочит от стенки, если коэффициент трения между телом и стенкой равен μ .





$$\vec{p}_1 = m\vec{V}$$

$$\vec{p}_2 = m\vec{u}$$

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \left(\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр п}} + \vec{N} + m\vec{g}\right)\Delta t$$

$$p_{2x} - p_{1x} = F\Delta t$$

$$p_{2y} - p_{1y} = -F_{\text{тр п}}\Delta t$$

$$mu\cos\beta - (-mV\cos\alpha) = F\Delta t$$

$$mu\sin\beta - mV\sin\alpha = -F_{\text{тр п}}\Delta t$$

$$F_{\text{тр п}} < \mu F$$

$$mu\cos\beta = mV\cos\alpha$$

$$\frac{V\sin\alpha - u\sin\beta}{2V\cos\alpha} = \frac{F_{\text{тр п}}}{F} < \mu$$

$$\text{tg}\beta > \text{tg}\alpha\text{-}2\mu$$

$$\boxed{u \neq V}$$

Механическая энергия

$$\Delta W_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

Изменение кинетической энергии системы тел при переходе системы из одного состояния в другое равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на тела системы

механическая работа – характеристика действия силы в пространстве по перемещению тела

$$\Delta W_{\text{мех}} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{\text{непот}}$$

Изменение механической энергии системы тел при переходе системы из одного состояния в другое равно алгебраической сумме работ всех непотенциальных сил, действующих на тела системы

Механическая энергия системы тел не изменяется, если сумма работ всех непотенциальных сил, действующих на тела системы, равна нулю

Механическая энергия замкнутой консервативной системы тел не изменяется

Физический смысл кинетической энергии

Физический смысл потенциальной энергии

Может ли механическая энергия системы быть отрицательной?

Выбор нулевого уровня потенциальной энергии

Механическая энергия

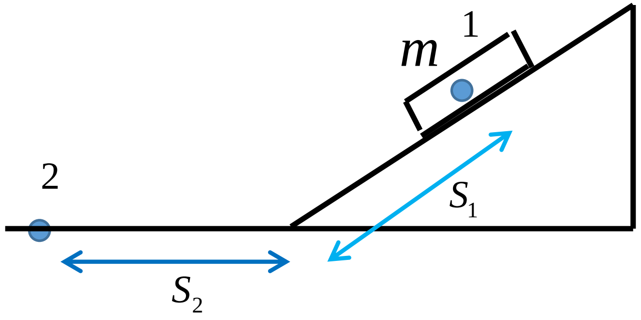
рекомендации по решению задач

- изобразить на рисунке характерные состояния системы тел в процессе их взаимодействия;
- обосновать возможность применения закона сохранения механической энергии (определить суммарную работу непотенциальных сил);
- выбрать нулевой уровень потенциальной энергии системы так, чтобы ее значение в одном из состояний системы равнялось нулю;
- правильно определить те состояния системы тел, к которым можно применить закон сохранения механической энергии

если в условии задачи описан абсолютно неупругий удар, то необходимо изобразить состояние системы тел <u>непосредственно перед</u> ударом и <u>сразу после</u> удара

Тема 3. Механическая энергия

Задача 10 Тело массой *m*, находящееся на наклонной плоскости на высоте *H*, соскальзывает вниз и, пройдя некоторый путь по горизонтальному участку, останавливается. Какую работу надо совершить, чтобы втащить тело обратно на вершину наклонной плоскости по тому же пути?



$$W_{кин\,2} - W_{кин\,2} = A_{mg} + A_{F_{тр1}} + A_{F_{тр2}}$$

$$0 = mgH - F_{тр1}S_1 - F_{тр2}S_2$$

$$mgH = F_{тр1}S_1 + F_{тр2}S_2$$

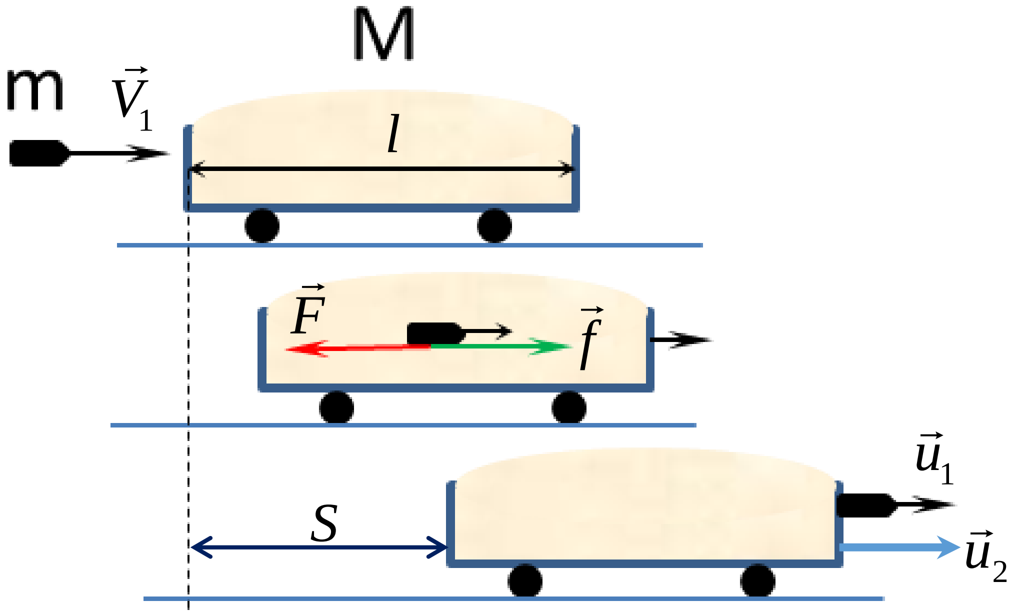
$$W_{кин\,1} - W_{кин\,2} = A_{mg} + A_{F_{тр1}} + A_{F_{тр2}} + A_{внеш}$$

$$0 = -mgH - F_{тр1}S_1 - F_{тр2}S_2 + A_{внеш}$$

$$A_{внеш} = mgH + F_{тр1}S_1 + F_{тр2}S_2 = \boxed{2mgH}$$

Механическая энергия

Задача 11 Снаряд массой *m*, летящий горизонтально вдоль рельс, попадает в вагонетку с песком массой *M*, которая первоначально покоилась. Найдите наименьшую скорость снаряда, при которой он может выйти через противоположную стенку вагонетки, если средняя сила трения его о песок равна *F*, а длина вагонетки *l*. Трением колес о рельсы пренебречь, стенки вагонетки считайте тонкими, не оказывающими существенного сопротивления движению.



$$\left(\sum \vec{F}_{\text{внеш } i}\right)_x = 0 \Rightarrow \left(\vec{p}_{\text{сист}}\right)_x = \text{const}$$

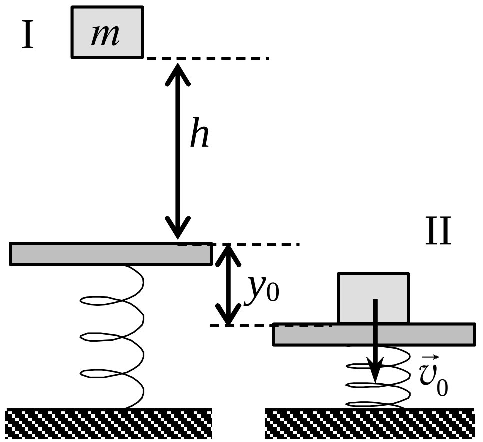
$$mV_1 = mu_1 + Mu_2 \overset{u_1 > u_2}{\Rightarrow} mV_{1\min} = (m+M)u_2$$

$$\frac{(m+M)u_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_F + A_f = -F(l+S) + f\,S = -Fl$$

$$V_{1\min} = \sqrt{2Fl\frac{m+M}{mM}}$$

Механическая энергия

Задача 12 На невесомую пружину жесткостью *k* с высоты *h* падает небольшой груз массой *m* и прилипает к пружине. Найдите максимальную скорость груза в процессе его дальнейшего движения



$$\frac{mv_0^2}{2} - 0 = \underbrace{mg\left(h + y_0\right)}_{} \underbrace{- \frac{ky_0^2}{2}}_{}$$

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad ky_0 = mg \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{mg}{k}$$

$$v_0 = \sqrt{2gh + \frac{mg^2}{k}}$$

потенциальная энергия тела в поле тяжести может быть и положительной, и отрицательной

работа силы тяжести может быть и положительной, и отрицательной

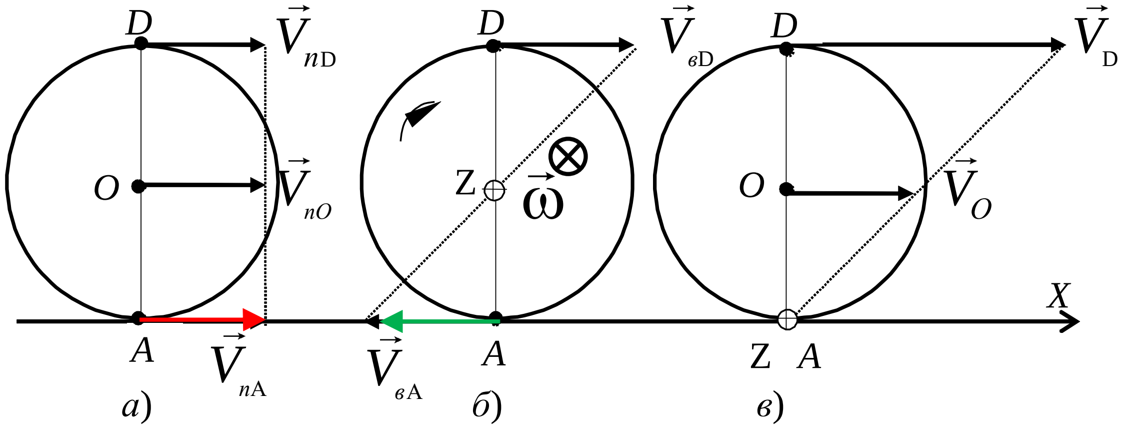
работа упругой силы всегда всегда отрицательна

Кинематика вращательного движения

Поступательное движение абсолютно твердого тела – такое, при котором любая прямая, связанная с двумя точками тела, остается параллельной сама себе

Вращательное движение абсолютно твердого тела – такое, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой (ось вращения)

Сложное плоское движение: $\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{V}_в$



$$\vec{V}_O = \vec{V}_{nO} + \vec{V}_{вO} = \vec{V}_{nO} + 0 = \vec{V}_{nO}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{nA} + \vec{V}_{вA} = 0 \qquad \vec{V}_{nA} = -\vec{V}_{вA} \qquad V_{вA} = V_{вD}$$

$$\vec{V}_D = \vec{V}_{nD} + \vec{V}_{вD} = \vec{V}_{nO} + \vec{V}_{вA} = 2\vec{V}_{nO}$$

$$\vec{V}_{nA} = -\vec{V}_{вA} \Rightarrow \frac{d\vec{V}_{nA}}{dt} = -\frac{d\vec{V}_{вA}}{dt} \Rightarrow \vec{a}_{\tau A} = -\vec{a}_O$$

без проскальзывания

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}} \Rightarrow a_O = \varepsilon R$$

Динамика вращения. Основное уравнение

Рекомендации по решению задач

При решении задач по динамике вращения тел в инерциальных системах отсчета необходимо выполнить следующие действия.

1. **Сделать рисунок** системы тел и показать векторы сил, действующих **на каждое** тело, и векторы ускорений центров масс тел, векторы угловых скоростей и угловых ускорений тел, векторы моментов сил.

2. Записать второй закон Ньютона и основное уравнение динамики вращательного движения **в векторной форме для каждого из тел системы в отдельности**.

3. Для каждого из тел системы выбрать направления осей координат таким образом, чтобы **направление оси *X*** совпадало с направлением ускорения центра масс тела, **направление оси *Z*** совпадало с направлением углового ускорения тела.

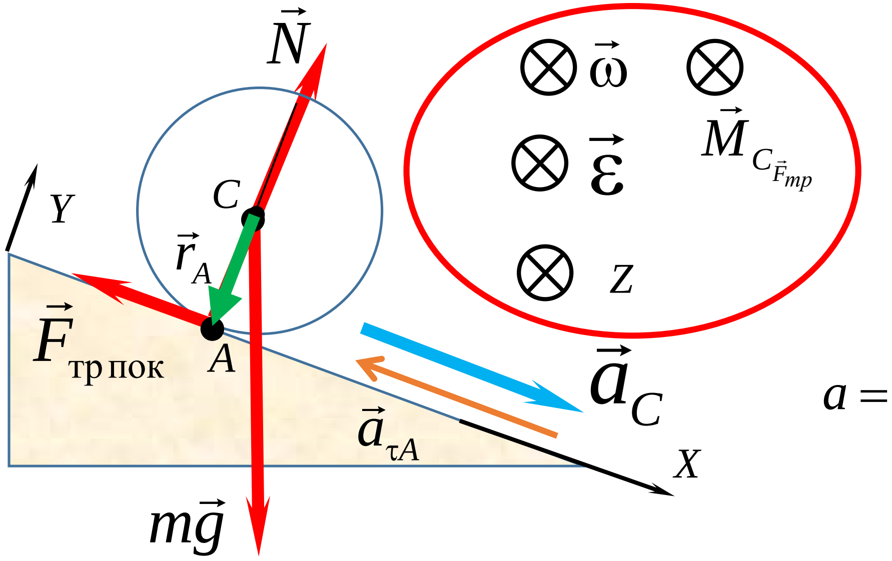
4. Спроецировать все векторы на выбранные оси координат и записать уравнения динамики поступательного и вращательного движений **в скалярном виде для каждого из тел системы в отдельности**.

5. К этой системе необходимо добавить **уравнения связи**.

6. Полученную систему уравнений необходимо решить **в общем виде**. В итоговые формулы нужно подставить численные данные условия задачи.

Динамика вращения. Основное уравнение

Задача 13 Симметричное в поперечном сечении тело массой *m* скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определите ускорение центра масс тела и силу трения между телом и плоскостью, если коэффициент трения равен μ. Радиус максимального поперечного сечения тела равен *R*.



$$\boxed{\begin{aligned} m\vec{a}_C &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр пок}} \\ I_C\vec{\varepsilon} &= \vec{M}_{C_{m\vec{g}}} + \vec{M}_{C_{\vec{N}}} + \vec{M}_{C_{\vec{F}_{mp}}} \\ \vec{a}_{\tau A} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A \end{aligned}}$$

$$ma_C = mg\sin\alpha - F_{\text{тр пок}}$$

$$0 = N - mg\cos\alpha$$

$$I_C\varepsilon = F_{\text{тр пок}}R$$

$$a_C = \varepsilon R \qquad F_{\text{тр пок}} < \mu N$$

$$a = g\frac{\sin\alpha}{1 + \dfrac{I_C}{mR^2}}$$

$$a_{\text{диск}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$$a_{\text{кольцо}} = \frac{1}{2}g\sin\alpha$$

$$F_{\text{тр пок}} = mg\frac{\sin\alpha}{1 + \dfrac{mR^2}{I_C}} < \mu mg\cos\alpha$$

$$tg\alpha < \mu\left(1 + \frac{mR^2}{I_C}\right) \qquad a_C = \varepsilon R$$

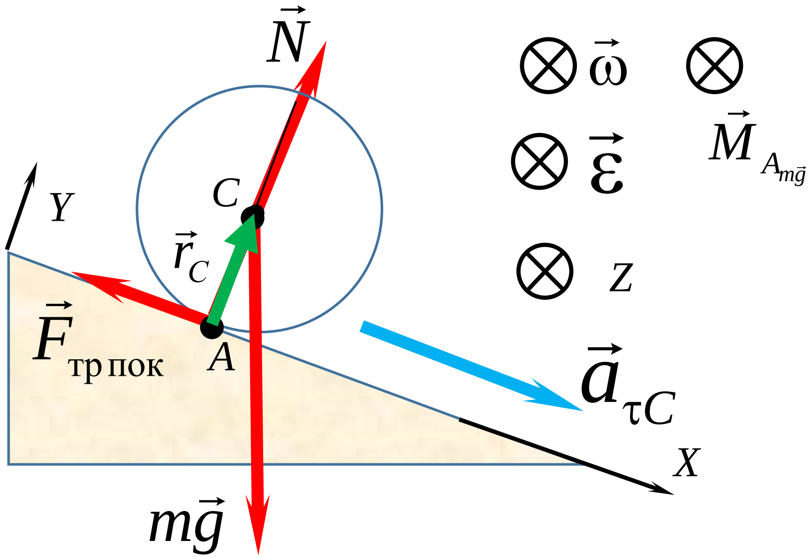
условия отсутствия проскальзывания

Если $F_{\text{тр ск}} = \mu N$, то $a_C = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{тр ск}}R}{I_C} = \frac{\mu mgR\cos\alpha}{I_C} \neq \frac{a_C}{R}$$

Динамика вращения. Основное уравнение

Если рассмотреть вращение тела вокруг мгновенной оси:



$$\boxed{\begin{aligned} m\vec{a}_C &= m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр пок}} \\ I_A\vec{\varepsilon} &= \vec{M}_{A_{m\vec{g}}} + \vec{M}_{A_{\vec{N}}} + \vec{M}_{A_{\vec{F}_{тр}}} \\ \vec{a}_{\tau C} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_C \end{aligned}}$$

$$ma_C = mg\sin\alpha - F_{\text{тр пок}}$$

$$0 = N - mg\cos\alpha$$

$$I_A\varepsilon = mgR\sin\alpha$$

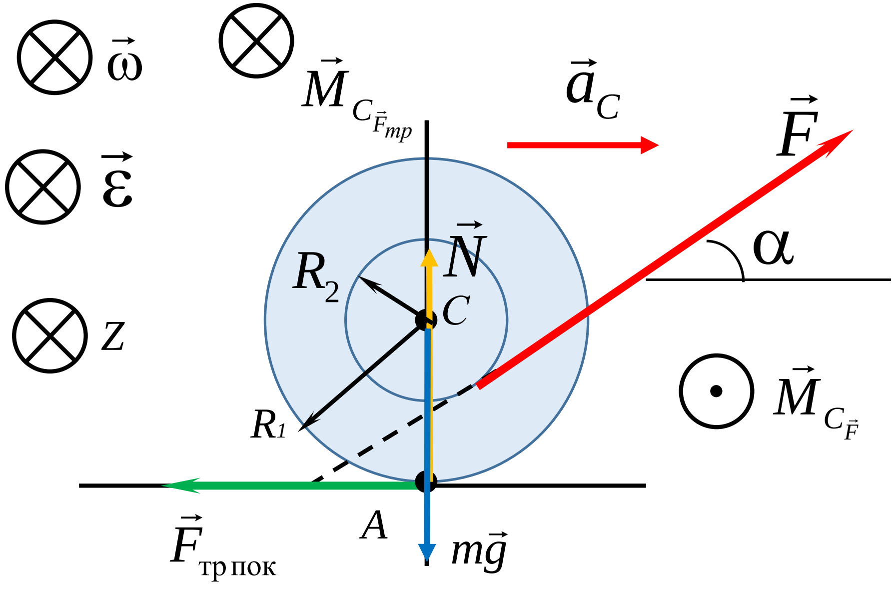
$$a_C = \varepsilon R \qquad F_{\text{тр пок}} < \mu N$$

$$a = \frac{mgR^2\sin\alpha}{I_A} = \frac{mgR^2\sin\alpha}{I_C + mR^2} = g\frac{\sin\alpha}{1 + \dfrac{I_C}{mR^2}}$$

Динамика вращения. Основное уравнение

Задача 14

При каком минимальном коэффициенте трения μ возможно качение катушки без проскальзывания под действием силы F, приложенной под углом α к горизонту? Радиусы катушки R_1 и R_2, ее масса m, момент инерции относительно оси симметрии I_0.



$$m\vec{a}_C = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр\,пок}$$

$$I_C\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{C_{\vec{F}}} + \vec{M}_{C_{m\vec{g}}} + \vec{M}_{C_{\vec{N}}} + \vec{M}_{C_{\vec{F}_{тр}}}$$

$$\vec{a}_{\tau A} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A$$

$$ma_C = F\cos\alpha - F_{тр\,пок}$$

$$0 = F\sin\alpha + N - mg$$

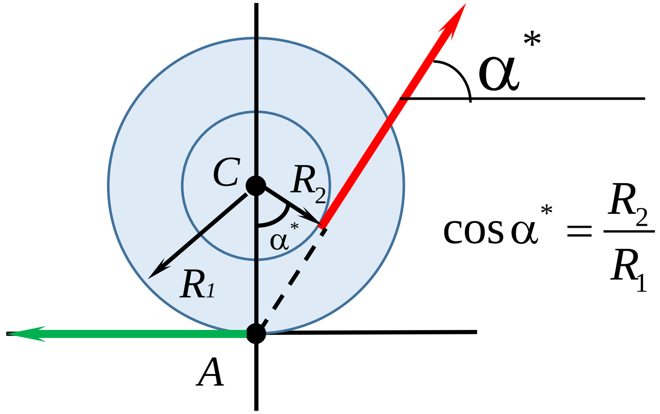
$$I_C\varepsilon = F_{тр\,пок}R_1 - FR_2$$

$$a_C = \varepsilon R_1$$

$$\frac{I_C}{R_1^2}a_C = F_{тр\,пок} - F\frac{R_2}{R_1}$$

$$\left(m + \frac{I_C}{R_1^2}\right)a_C = F\cos\alpha - F\frac{R_2}{R_1}$$

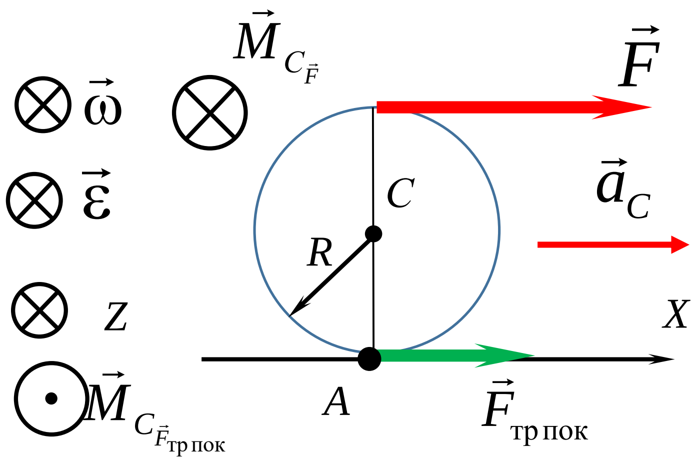
$$a_C = F\frac{\cos\alpha - \frac{R_2}{R_1}}{m + \frac{I_C}{R_1^2}} = \frac{F}{m}\cdot\frac{\cos\alpha - \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{I_C}{mR_1^2}}$$



$$\cos\alpha^* = \frac{R_2}{R_1}$$

Динамика вращения. Основное уравнение

Задача 15



$$m\vec{a}_C = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр\,пок}$$

$$I_C\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{C_{\vec{F}}} + \vec{M}_{C_{m\vec{g}}} + \vec{M}_{C_{\vec{N}}} + \vec{M}_{C_{\vec{F}_{тр}}}$$

$$\vec{a}_{\tau A} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A$$

$$ma_C = F + F_{тр\,пок}$$

$$0 = N - mg$$

$$I_C\varepsilon = FR - F_{тр\,пок}R$$

$$a_C = \varepsilon R$$

$$\boxed{\begin{aligned} &I_A\varepsilon = F\,2R \\ &I_A = I_C + mR^2 \\ &a_C = \varepsilon R \end{aligned}}$$

$$ma_C = F + F_{тр\,пок}$$

$$I_C\frac{a_C}{R^2} = F - F_{тр\,пок}$$

$$a_C = 2\frac{F/m}{1 + \dfrac{I_C}{mR^2}}$$

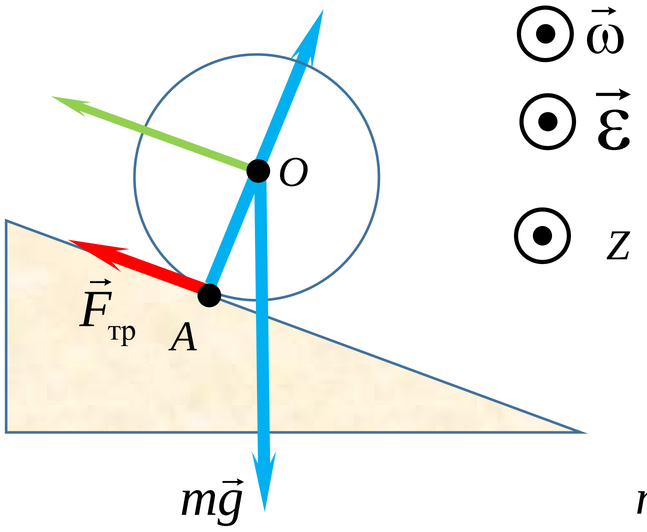
$$F_{тр\,пок} = F\frac{1 - \dfrac{I_C}{mR^2}}{1 + \dfrac{I_C}{mR^2}}$$

для трубы $I_C = mR^2$ $\qquad a_C = F/m \qquad F_{тр\,пок} = 0$

Динамика вращения. Основное уравнение

Задача 16 Однородный цилиндр радиусом R, вращающийся с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси, ставится без начальной скорости поступательного движения у основания наклонной плоскости. Определите **время закатывания** цилиндра на плоскость, если она составляет угол α с горизонтом.

Сначала – **сила трения скольжения**, потом – **сила трения покоя**!



$$\cancel{a = \varepsilon R \quad \upsilon = \omega R}$$

$$\begin{cases} ma = F_{тр} - mg\sin\alpha \\ I_O\varepsilon = -F_{тр}R \end{cases} \qquad maR = -I_O\varepsilon - mg\sin\alpha$$

$$m\frac{d\upsilon}{dt}R = -I_O\frac{d\omega}{dt} - mgR\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad mRd\upsilon = -I_O d\omega - mgR\sin\alpha dt$$

$$mR\int_0^\upsilon d\upsilon = -I_O\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega - mgR\sin\alpha\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad mR\upsilon = -I_O(\omega - \omega_o) - mgRt\sin\alpha$$

при остановке $\begin{cases} \upsilon = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$

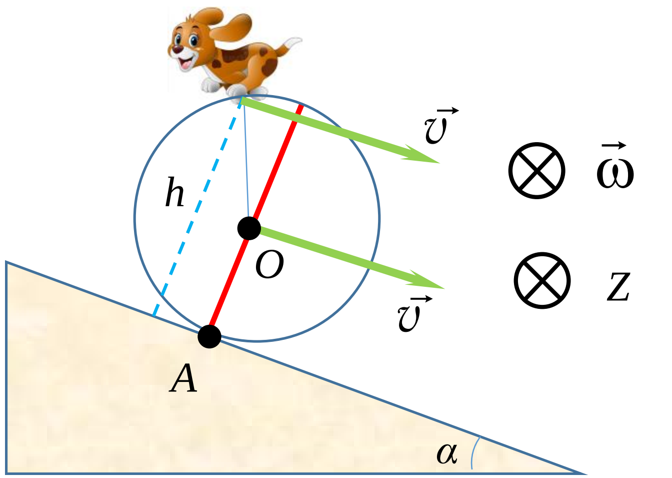
$$\tau = \frac{I_O\omega_0}{mgR\sin\alpha} = \frac{\omega_0 R}{2g\sin\alpha}$$

время закатывания не зависит от коэффициента трения!

время скатывания зависит от коэффициента трения!

Законы сохранения в сложном движении

Задача 17 Дрессированная собачка массой ***m*** бежит по поверхности полого тонкостенного цилиндра массой ***M***, который скатывается с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определите ускорение центра масс цилиндра, если собачка все время занимает наивысшее положение на его поверхности.



$$L = l_c + L_ц = m\upsilon h + I_A\omega = m\upsilon R(1+\cos\alpha) + 2MR^2\omega$$

$$\upsilon = \omega R$$

$$L = \left[2M + m(1+\cos\alpha)\right]\upsilon R$$

дифференцируем: $\dfrac{dL}{dt} = \left[2M + m(1+\cos\alpha)\right]aR$

Будем рассматривать вращение цилиндра относительно мгновенной оси (т.А)

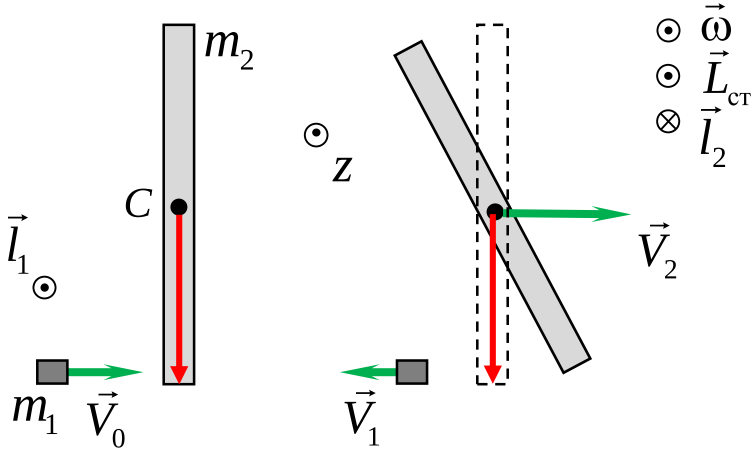
согласно уравнению моментов: $\dfrac{dL}{dt} = (M+m)gR\sin\alpha$

В неподвижной с.о. собачка движется параллельно наклонной плоскости с той же скоростью, что и центр масс цилиндра

$$a = \frac{M+m}{2M + m(1+\cos\alpha)}g\sin\alpha$$

Законы сохранения в сложном движении

Задача 18 На гладком горизонтальном столе лежит однородный длинный стержень. В конец стержня ударяет небольшой кубик, движущийся по поверхности стола в направлении, перпендикулярном оси стержня, со скоростью V_0. Найдите скорость кубика после абсолютно упругого удара о стержень. Масса кубика в n раз меньше массы стержня.



$$\vec{L}_{ст} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{l}_{мт} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}$$

$$m_2 = nm_1$$

$$\sum\left(\vec{F}_{внеш}\right)_x = 0 \Rightarrow \left(\vec{p}_{сист}\right)_x = const$$

$$\sum\left(\vec{M}_{внеш}\right)_z = 0 \Rightarrow \left(\vec{L}_{сист}\right)_z = const$$

$$\sum A_{непот} = 0 \Rightarrow W_{кин\ сист} = const$$

$$\begin{cases} m_1\vec{V}_0 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 \\ \vec{l}_1 = \vec{l}_2 + \vec{L}_{ст} \\ W_1 = W_1' + W_2 \end{cases}$$

свободная ось вращения тела будет устойчивой, если она проходит через центр масс тела

$$I_{ст} = \frac{m_2 l^2}{12}$$

$$\begin{cases} m_1V_0 = -m_1V_1 + m_2V_2 \\ m_1V_0\dfrac{l}{2} = -m_1V_1\dfrac{l}{2} + I_{ст}\omega \\ m_1V_0^2 = m_1V_1^2 + m_2V_2^2 + I_{ст}\omega^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 + V_1 = nV_2 \\ V_0 + V_1 = \dfrac{nl}{6}\omega \\ V_0^2 - V_1^2 = nV_2^2 + \dfrac{nl^2}{12}\omega^2 \end{cases}$$

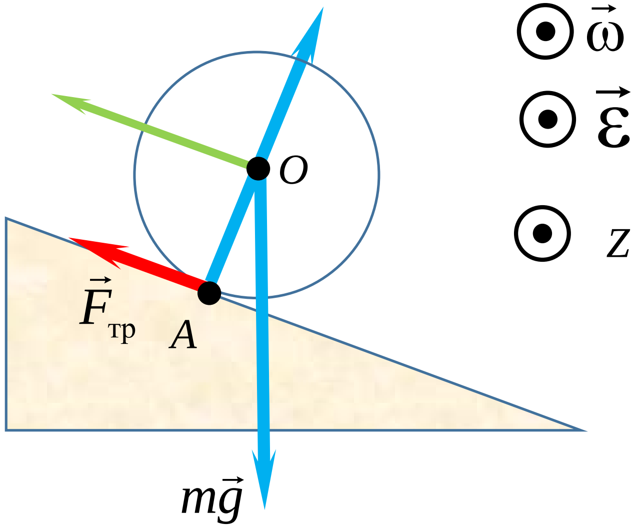
$$\begin{cases} V_0 + V_1 = nV_2 \\ V_2 = \dfrac{\omega l}{6} \\ V_0^2 - V_1^2 = nV_2^2 + 3nV_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 + V_1 = nV_2 \\ V_0 - V_1 = 4V_2 \end{cases}$$

$$\boxed{V_1 = V_0\frac{n-4}{n+4}}$$

Законы сохранения в сложном движении

Задача 19 Однородный цилиндр радиусом R, вращающийся с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси, ставится без начальной скорости поступательного движения у основания наклонной плоскости. Определите **длительность скольжения** цилиндра по плоскости, если она составляет угол α с горизонтом, а коэффициент трения равен μ.



Сначала – **сила трения скольжения**, причем $F_{тр\,ск} = \mu mg\cos\alpha$

$$\begin{cases} ma = F_{тр} - mg\sin\alpha \\ I_O\varepsilon = -F_{тр}R \end{cases} \Rightarrow \quad a = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$maR = -I_O\varepsilon - mg\sin\alpha$$

$$m\frac{dv}{dt}R = -I_O\frac{d\omega}{dt} - mgR\sin\alpha$$

окончание скольжения $\longleftrightarrow$ $v = \omega R$

$$mR\int_0^v dv = -I_O\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega - mgR\sin\alpha\int_0^t dt$$

$$mRv = -I_O(\omega - \omega_o) - mgRt\sin\alpha$$

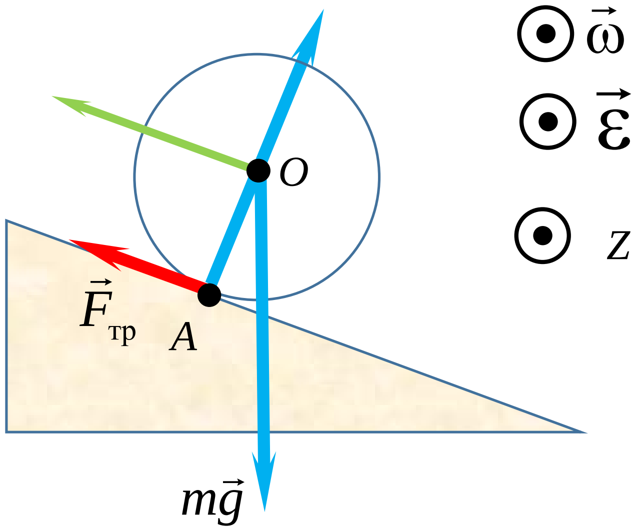
$$mRv + I_O\frac{v}{R} = I_O\omega_o - mgRt\sin\alpha$$

$$v = v_0 + at = at$$

$$\tau = \frac{I_O\omega_0}{mRa + \frac{I_O}{R}a + mgR\sin\alpha} = \frac{I_O\omega_0 R}{(mR^2 + I_O)a + mgR^2\sin\alpha} = \frac{\omega_0 R}{g(3\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

Законы сохранения в сложном движении

Задача 20 Однородный цилиндр радиусом R, вращающийся с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси, ставится без начальной скорости поступательного движения у основания наклонной плоскости. Определите **высоту, на которую закатится** цилиндр по плоскости, если она составляет угол α с горизонтом, а коэффициент трения равен μ.



ускорение при скольжении $a = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$ $\quad a > 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{tg}\alpha < \mu$

длительность скольжения $\tau == \dfrac{\omega_0 R}{g(3\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}$

высота окончания скольжения $h_1 = \dfrac{a\tau^2}{2}\sin\alpha$

после окончания скольжения цилиндр поднимется еще на h_2 $\quad \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2} = mgh_2$ $\quad v = a\tau$, $\quad v = \omega R$

тогда $h_2 = \dfrac{3v^2}{4g} = \dfrac{3}{4}\dfrac{(a\tau)^2}{g}$

общая высота подъема цилиндра:
$$H = h_1 + h_2 = \frac{a\tau^2}{2}\sin\alpha + \frac{3}{4}\frac{(a\tau)^2}{g} = \frac{a\tau^2}{2}\left(\sin\alpha + \frac{3}{2}\frac{a}{g}\right) = \frac{\omega_0^2 R^2}{4g}\,\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{3\mu\cos\alpha - \sin\alpha}$$

$$\boxed{H = 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{tg}\alpha = \mu}$$

Законы сохранения в сложном движении

Задача 21 Из-за приливного трения земные сутки за год удлиняются на 0,5мс. Определите, на сколько за год изменяется расстояние между Землей и Луной. Известно, что масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, расстояние до Луны в 60 раз больше радиуса Земли, а момент инерции Земли $I = \frac{1}{3} m_з R_з^2$

$$m_Л \omega_Л^2 R_Л = G \frac{m_Л m_З}{R_Л^2} \Rightarrow \omega_Л^2 R_Л^3 = const$$

$$L = L_з + l_л = I\omega_З + m_Л R_Л^2 \omega_Л = const$$

$$2\omega_Л d\omega_Л R_Л^3 + \omega_Л^2 3R_Л^2 dR_Л = 0 \quad \vdots \omega_Л^2 R_Л^3$$

$$Id\omega_З + m_Л 2R_Л \omega_Л dR_Л + m_Л R_Л^2 d\omega_Л = 0$$

$$2\frac{d\omega_Л}{\omega_Л} = -3\frac{dR_Л}{R_Л} \Rightarrow d\omega_Л = -\frac{3}{2}\frac{dR_Л}{R_Л}\omega_Л$$

$$Id\omega_З + m_Л 2R_Л \omega_Л dR_Л - \frac{3}{2}\omega_Л m_Л R_Л dR_Л = 0$$

$$I = \frac{1}{3} m_з R_з^2$$

$$Id\omega_З - \frac{1}{2}\omega_Л m_Л R_Л dR_Л = 0 \Rightarrow dR_Л = \frac{2Id\omega_З}{\omega_Л m_Л R_Л}$$

$$\omega_З T_З = 2\pi = const \Rightarrow d\omega_З = \omega_З \frac{dT_З}{T_З}$$

$$\omega_З = \omega_Л$$

$$dR_Л = \frac{2m_З R_З^2 \omega_З}{3m_Л R_Л \omega_Л}\frac{dT_З}{T_З} = \frac{2}{3}\cdot\frac{81}{60}\cdot 6,4\cdot 10^6 \cdot \frac{0,5\cdot 10^{-3}}{24\cdot 60\cdot 60} = 0,03\,\text{м}$$